

Oraux X-ENS

Exercice 1 (★★★★☆) – Oral X-ESPCI PC 2015 (RMS 126-2 308)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer que les coefficients de P sont dans $\mathbb{Q}$. Donner un exemple de P à coefficients non entiers tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 2 (★★★★☆) – Oral X PSI 2024 (RMS 135-1 409)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec a_{ij} des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Calculer $\mathbb{E}[\det(A)]$ et $\mathbb{V}(\det(A))$.

Exercice 3 (★★★★☆) – Oral ENS 2021

Soit A, B deux matrices non colinéaires dans $M_n(\mathbb{R})$. Étudier la diagonalisabilité de

$$\begin{aligned} f: M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto \operatorname{Tr}(B^T M)A - \operatorname{Tr}(A^T M)B. \end{aligned}$$

Exercice 4 (★★★★★) - Problème 2 de l'IMC 2022 et de ENS MP 2023 (RMS 134-1 64)

Soit $n, k \in \mathbb{N}^*$ tels que $k \geq n$. Déterminer toutes les matrices $n \times n$ réelles à valeurs propres réelles telles que

$$A + A^k = A^T.$$

Exercice 5 (★★☆☆☆) – Oral X PC 2019 (RMS 130-2 398)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$. Montrer que $\operatorname{Tr}(A) = 0$.

Exercice 6 (★★★★☆) – Oral X PC 2022 (RMS 133-2 352)

Soit $\alpha > 0$ et $(a_n), (b_n)$ et (c_n) vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, a_{n+1} = \frac{b_n + c_n}{\alpha}, b_{n+1} = \frac{a_n + c_n}{\alpha} \text{ et } c_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{\alpha}.$$

Déterminer le comportement asymptotique de ces suites.

Exercice 7 (★★★★☆) – Oral X-ESPCI PC 2019 (RMS 130-2 403)

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension finie n , $f \in \mathcal{L}(E)$ diagonalisable. Montrer qu'il existe $a \in E$ tel que $(a, f(a), \dots, f^{n-1}(a))$ soit une base de E si, et seulement si f possède n valeurs propres distinctes.

Exercice 8 (★★★★★) – Oral Magistère 2025 et d'un oral ENS Ulm 2012

Soit $p \geq 3$ un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et, pour un anneau R , $\operatorname{GL}_n(R)$ le groupe des matrices à coefficients dans R inversibles et dont l'inverse est également à coefficients dans R . On note aussi $\operatorname{SL}_n(R)$ le sous-groupe de $\operatorname{GL}_n(R)$ formé des éléments de déterminant 1.

1. Soit $B \in M_n(\mathbb{Z})$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$ dont toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Montrer que B est nulle.

2. On considère l'application de réduction modulo p .

$$\begin{aligned}\pi: \quad \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_p) \\ A = (a_{ij}) &\longmapsto \bar{A} = (a_{ij} \bmod p).\end{aligned}$$

Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes dont la restriction à tout sous-groupe fini est injective.

3. Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est de cardinal inférieur à 24. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ possède-t-il un élément d'ordre 24 ?

Exercice 9 (★★★★★) – Oral X MP 2019 (RMS 130-2 273)

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice. On pose $C(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\}$ sa classe de conjugaison. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si $C(A)$ est connexe par arcs.

Exercice 10 (★★★★★) – Oral X PC 2025 (RMS 136-1 391)

On considère une ferme avec $2n+1$ vaches. Le fermier s'aperçoit que quelle que soit la vache que l'on retire du troupeau, il peut séparer les vaches restantes en deux groupes de n vaches, de telle sorte que les sommes des poids des vaches de chacun des groupes sont égales. Montrer que toutes les vaches ont le même poids.

Exercice 11 (★★★★★) – Oral ENS MP 2025 (RMS 136-1 39)

Soient $n, k \in \mathbb{N}^*$, $M = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$ avec $A \in M_n(\mathbb{R})$, $B \in M_k(\mathbb{R})$ et $C \in M_{n,k}(\mathbb{R})$. On pose $e^M = \begin{pmatrix} M_1 & \varphi_{A,B}(C) \\ M_2 & M_3 \end{pmatrix}$.

- Déterminer M_1, M_2, M_3 .
- Montrer que $\varphi_{A,B}$ est linéaire.
- Montrer que si A et B sont diagonalisables alors $\varphi_{A,B}$ l'est aussi, et préciser son spectre.
- Soit $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x, y) = \frac{e^x - e^y}{x - y}$ si $x \neq y$, et $f(x, x) = e^x$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$.
- On suppose que $\varphi_{A,B}$ est diagonalisable et que toutes ses valeurs propres sont distinctes. Montrer que A et B sont diagonalisables.

Exercice 12 (★★★★☆) – Oral X MP 2024 (RMS 135-1 307)

Combien y a-t-il de matrices orthogonales de taille $n \in \mathbb{N}^*$ à coefficients dans $\mathbb{Z}$?

Exercice 13 (★★★★☆) – Oral X MP 2025 (RMS 136-1 286)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in O_n(\mathbb{R})$. Calculer $|\det(\psi_P)|$ où $\psi_P: A \in S_n(\mathbb{R}) \mapsto P^T A P$.

Exercice 14 (★★★★☆) – Oral ENS MP 2021 (RMS 132-2 39)

On considère le produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$

$$\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt.$$

- Montrer qu'il existe une suite orthonormée (P_n) de $\mathbb{R}[X]$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, \deg(P_n) = n$.
- Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que P_n admet n racines simples toutes dans $]0, 1[$.
On fixe n et on note $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ les racines de P_n .
- Montrer que les $R \mapsto R(\alpha_i)$ forment une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]^*$.
- Montrer qu'il existe des réels $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tels que $\forall P \in \mathbb{R}_{2n-1}[X]$,

$$\int_0^1 P(t) dt = \sum_{k=1}^n \lambda_k P(\alpha_k).$$

Donner une expression de λ_k ainsi que son signe.

Exercice 15 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS

Soit n un entier impair. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- $M \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique.
- Pour toute matrice A antisymétrique $\det(A + M) = 0$.

Exercice 16 (★★★★☆) – Oral X MP 2019 (RMS 130-2 224)

Quel est le chiffre des unités de $23^{23^{23}}$?

Exercice 17 (★★★★★) - Un théorème de Pòlya, oral ENS 2018 (RMS 129-2 10)

Soit $k \geq 2$ un entier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n divise

$$\sum_{i=1}^n k^{\text{pgcd}(i,n)}.$$

Exercice 18 (★★★★★) – Oral ENS MP 2025 (RMS 136-1 15)

1. Soit A un anneau commutatif. Rappeler la définition d'un idéal de A . Un idéal I de A est dit maximal si A est le seul idéal J de A tel que

$$I \subsetneq J \subseteq A.$$

Montrer qu'un idéal maximal de A ne contient pas d'élément inversible.

2. On pose $U = F(\{0, 1\}, \mathbb{R})$. Donner les idéaux maximaux de U .
3. On pose $V = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$. Donner les idéaux maximaux de V .

Exercice 19 (★★★★★) – Oral ENS Ulm MP 2025 (RMS 136-1 10)

Soit A un anneau tel que tout élément $a \in A$ soit nilpotent ou idempotent, c'est-à-dire vérifie $a^2 = a$.

1. Montrer que tout élément de A est idempotent.
2. Montrer que A est commutatif.
3. On suppose A fini. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que A soit isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

Exercice 20 (★★★★★) – Oral X MP 2024 (RMS 135-1 266) – Théorème de Midy

1. Soit n un entier supérieur à 1 et premier avec 10. Montrer que n possède un multiple dont l'écriture en base 10 n'a que des 9.
2. On remarque que

$$\begin{aligned} \frac{1}{7} &= 0, \underbrace{142857} \underbrace{142857} \dots \underbrace{142857} \dots && \text{avec } 142 + 857 = 999 \\ \frac{2}{7} &= 0, \underbrace{285714} \underbrace{285714} \dots \underbrace{285714} \dots && 285 + 714 = 999 \\ \frac{1}{13} &= 0, \underbrace{076923} \underbrace{076923} \dots \underbrace{076923} \dots && 76 + 923 = 999. \end{aligned}$$

Expliquer.

3. Que peut-on anticiper quant au développement décimal de $\frac{1}{17}$? Généraliser.

Exercice 21 (★★★★★) – Oral ENS MP 2019 (RMS 130-2 19)

Soit p un nombre premier impair et $a \in \mathbb{F}_p \setminus \{0\}$ avec $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On pose

$$m_a: \begin{array}{ccc} \mathbb{F}_p & \longrightarrow & \mathbb{F}_p \\ x & \longmapsto & ax. \end{array}$$

Montrer que m_a est une permutation de $\mathbb{F}_p$ et montrer qu'elle est de signature 1 si, et seulement si a est un carré du corps $\mathbb{F}_p$.

Exercice 22 (★★★★☆) – Oral ENS MP 2018 (RMS 129-2 17)

Soit G un sous-groupe strict de $(\mathbb{R}, +)$. Montrer que $\mathbb{R} \setminus G$ n'est pas dénombrable.

Exercice 23 (★★★★★) – Oral ENS MP 2019 (RMS 130-2 3)

L'ensemble $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ des permutations de $\mathbb{N}$ est-il dénombrable ?

Exercice 24 (★★★★★) – Oral X MP 2020 (RMS 131-2 45)

Soit E l'espace des fonctions continues et bornées de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Déterminer les $f \in E$ telles que le sous-espace de E engendré par les $x \mapsto f(x+k), k \in \mathbb{Z}$ soit de dimension finie.

Exercice 25 (★★★★☆) – Oral X MP 2020 (RMS 131-2 86)

Soit E l'espace des fonctions continues de $[0, 1]$ dans $\mathbb{R}$. Pour $f \in E$, soit $T(f)$ la fonction définie sur $[0, 1]$ par

$$\forall x \in]0, 1], T(f)(x) = \frac{1}{x} \int_0^x f \text{ et } T(f)(0) = f(0).$$

1. Montrer que T est un endomorphisme de E .
2. Soit $f \in E$. Étudier la convergence uniforme de $(T^k(f))_{k \in \mathbb{N}}$.

Exercice 26 (★★★★☆) – Oral ENS

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et K un compact non vide de E .

1. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant K .
2. Montrer que si $\|\cdot\|$ est issue d'un produit scalaire alors cette boule est unique.

Exercice 27 (★★★★☆) – Oral X MP 2022 (RMS 133-2 242)

Soit $n \in \mathbb{N}^*, 0 \leq r \leq n$ et $\mathcal{A}_r = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid \text{rg}(A) = r\}$.

1. L'ensemble $\mathcal{A}_r$ est-il ouvert ? Fermé ?
2. Déterminer l'intérieur et l'adhérence de $\mathcal{A}_r$.

Exercice 28 (★★★★★) – Oral ENS PC 2022 (RMS 133-2 185)

Soit E un espace vectoriel normé dans lequel toute suite bornée possède une sous-suite convergente.

1. Montrer qu'il existe $n \geq 1$ et des vecteurs $y_1, \dots, y_n \in E$ tels que

$$\mathbb{B}(0, 1) \subseteq \bigcup_{k=1}^n \mathbb{B}(y_k, 1/2).$$

(toutes les boules sont fermées).

2. Montrer que $\text{Vect}(y_1, \dots, y_n)$ est dense dans E et en déduire que E est de dimension finie.

Exercice 29 (★★★★★) – Oral ENS MP 2018 (RMS 129-2 86)

On veut montrer que $\mathbb{R}$ ne s'écrit pas comme union dénombrable de segments disjoints. On suppose par l'absurde que $\mathbb{R}$ est l'union disjointe des $[a_n, b_n]$ avec $a_n \leq b_n$. On pose $E = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

1. Montrer que E est fermé.
2. Montrer que E ne contient aucun point isolé.
3. Conclure.

Exercice 30 (★★★★★) – Oral ENS PC 2022 (RMS 134-1 465)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie inclus dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On suppose que E est stable par translation c'est à dire que $\forall f \in E, \forall a \in \mathbb{R}, (x \mapsto f(x+a)) \in E$. Montrer que $\forall f \in E, f' \in E$.

Exercice 31 (★★★☆☆) – Oral ENS PSI 2021 (RMS 132-2 166)

Soit (u_n) définie par $u_0 = u_1 = 1$ et $\forall n \geq 1, 2(n+1)u_{n+1} = \sum_{k=0}^n u_k u_{n-k}$. Soit $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$. On note R le rayon de convergence de f .

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \leq \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}^n}$. Que peut-on dire de R ?
2. Montrer que $\forall x \in]-R, R[, \int_0^x \frac{2f'(t)}{1+f(t)^2} dt = x$.
3. En déduire l'expression de f .

Exercice 32 (★★★★☆) – Oral X PC 2024 (RMS 135-1 416)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ème de l'unité. Calculer

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{2-z}.$$

Exercice 33 (★★★★☆) – Oral X PC 2024 (RMS 135-1 418)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le module de $\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(2i\pi \frac{k^2}{n}\right)$.

Exercice 34 (★★★★★) – Oral X-ENS & Mines-Ponts MP 2021 (RMS 132-2 527)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi(2+\sqrt{3})^n)$.

Indication : on pourra faire intervenir la quantité $a_n = (2+\sqrt{3})^n + (2-\sqrt{3})^n$.

Exercice 35 (★★★★☆) – Oral MP X-ENS (RMS 132-2 139/130-2 347)

Les $n \geq 2$ participants à une soirée déposent leur chapeau au vestiaire. À la fin de la soirée les chapeaux sont redistribués aléatoirement. Soit X le nombre d'invités qui retrouvent leur chapeau. Préciser l'espérance et la variance de X .

Exercice 36 (★★★★★) – Oral X PC 2018 (RMS 129-2 480)

On suppose que $N \geq 2$ passagers montent successivement dans un avion. Le premier passager se trompe et s'installe à une place autre que la sienne. Les suivants prennent une place au hasard si la leur est déjà occupée. Déterminer la probabilité que le dernier passager soit à sa place.

Exercice 37 (★★★★★) – Oral X MP 2024 (RMS 135-1 409)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec a_{ij} des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Calculer $\mathbb{E}[\det(A)]$ et $\mathbb{V}(\det(A))$.

Exercice 38 (★★★★★) - Inspiré d'un oral ENS 2022

Soit $n \geq 2$ un entier et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déterminer $\mathbb{P}(XY = 0)$.

Exercice 39 (★★★★★) – Oral ENS MP 2025 (RMS 136-1 622)

Soit $n \geq 3$. Une alpiniste dispose de n lieux possibles pour planter sa tente, lieux numérotés de 1 à n . Elle peut visiter chacun de ces lieux successivement, à partir du numéro 1, et doit décider si elle y plante sa tente. Lorsqu'elle visite le lieu k , elle peut savoir si elle préfère ce lieu à tous les lieux précédemment visités, mais ne sait pas si elle le préfère aux lieux non encore visités. Une fois un lieu visité, si l'alpiniste a refusé d'y installer sa tente elle ne pourra plus revenir sur ce lieu. L'alpiniste a pour objectif de maximiser la probabilité d'avoir choisi celui des n lieux qui a sa préférence parmi les n lieux¹.

1. Déterminer une stratégie optimale pour l'alpiniste lorsque $n = 3$.
2. On fixe un $k \in \llbracket 0, n-1 \rrbracket$. L'alpiniste suit la stratégie décrite ci-après : elle visite automatiquement les $k+1$ premiers lieux ; étant donné $\ell \in \llbracket k+1, n-1 \rrbracket$, si l'alpiniste visite le ℓ -ième lieu alors elle l'écarte si et seulement s'il n'a pas sa préférence parmi tous les lieux déjà visités. Déterminer la probabilité $p_{n,k}$ pour que l'alpiniste s'installe sur le lieu ayant sa préférence parmi les n lieux.
3. On fixe un k_n maximisant $p_{n,k}$ lorsque k parcourt $\llbracket 0, n-1 \rrbracket$. Étudier le comportement asymptotique de k_n quand n tend vers $+\infty$.

Exercice 40 (★★★★☆) - Inspiré de ENS MP 2025 (RMS 136-1 38)

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite de Bourdaud si ses valeurs propres apparaissent sur sa diagonale comptées avec même multiplicité. Dans tout l'exercice $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle \cdot, \cdot \rangle$.

1. Montrer qu'une matrice de $M_n(\mathbb{K})$ est semblable sur $\mathbb{K}$ à une matrice de Bourdaud si, et seulement si elle est trigonalisable sur $\mathbb{K}$.
2. Soit A symétrique réelle. On considère l'application

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R} \\ X &\longmapsto \langle AX, X \rangle. \end{aligned}$$

Montrer que la restriction de f à la sphère unité $\mathbb{S}(0,1)$ admet un maximum. On donnera une caractérisation du lieu où les maxima sont atteints en terme du spectre de A .

3. Quelles sont les matrices réelles symétriques de Bourdaud ?

Exercice 41 (★★★★★) – Oral ENS 2023

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\sum_{j=0}^k f^{(j)}$ possède une limite finie ℓ en $+\infty$. Peut-on en déduire que f possède une limite finie en $+\infty$? On discutera selon la valeur de k .

1. Il s'agit d'un problème célèbre connu sous le nom de *problème du secrétaire*.

Exercice 42 (★★★★★) – Oral ENS MP (RMS 127-2 120) - Équations de Mathieu

Soit $q: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continue et de période π . On note E l'ensemble des solutions de $y'' + qy = 0$.
On note $f: \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$, l'application qui à φ associe $x \mapsto \varphi(x + \pi)$.

1. Montrer que E est un espace vectoriel dont on précisera la dimension.
2. Montrer que f induit un endomorphisme de E noté $\tilde{f}$.
3. Montrer que $\det(\tilde{f}) = 1$.
4. On suppose que $|\operatorname{Tr}(\tilde{f})| < 2$. Montrer que E est constitué de fonctions bornées.
5. On suppose que $|\operatorname{Tr}(\tilde{f})| > 2$. Montrer que la fonction nulle est la seule fonction bornée de E .
6. On suppose que $|\operatorname{Tr}(\tilde{f})| = 2$. Montrer que E contient une fonction bornée non nulle.
7. Soient $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ avec $a < b$, $\varphi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, nulle en a et b et strictement positive sur $]a, b[$. On admet que, pour une telle fonction, $\int_a^b \frac{|\varphi''(t)|}{\varphi(t)} dt > \frac{4}{b-a}$. Montrer que si q est positive, q n'est pas la fonction nulle et $\int_0^\pi q(t) dt \leq \frac{4}{\pi}$, alors E ne contient que des fonctions bornées.

Exercice 43 (★★★★☆) – ENS MP 2024 (RMS 134-1 135)

On munit $M_n(\mathbb{R})$ de sa structure euclidienne canonique.

1. Montrer que $\operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$ est un ouvert.
2. Pour $A \in M_n(\mathbb{R})$, que vaut $d(A, \operatorname{GL}_n(\mathbb{R}))$?
3. On note $S = M_n(\mathbb{R}) \setminus \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que, pour tout $A \in \operatorname{GL}_n(\mathbb{R})$, il existe $M_0 \in S$ telle que $d(A, S) = \|A - M_0\|$.
4. Rappeler le résultat sur les extrema sous contrainte. Que peut-on en déduire sur la matrice M_0 définie ci-dessus ?

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications, que vous avez des questions sur cette colle ou que vous voulez parler de maths vous pouvez m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : fabien.narbonne@posteo.net

Site internet : <https://fabiennarbonne.fr>