

Oraux faisables en L1/Sup

Algèbre

Exercice 1 (★☆☆☆☆) – Oral Mines-Télécom PSI 2024

Soit la matrice suivante

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant un minimum de calcul déterminer le rang de Θ , $\ker(\Theta)$ et $\text{im}(\Theta)$.

Exercice 2 (★☆☆☆☆) – Oral Mines-Télécom PSI 2022 (RMS 133-2 1346)

Calculer $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx).$$

Exercice 3 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Télécom MP-MPI 2024 (RMS 135-1 1404)

On considère la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \sin(i+j)$. Déterminer $\text{rg}(A)$ et en déduire $\det(A)$.

Indication : On pourra introduire les vecteurs $X = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix}$.

Exercice 4 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 857)

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de racine carrée.

Exercice 5 (★★☆☆☆) – Oral CCINP PSI 2022 (RMS 133-2 1347)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p + q = \text{id}_E$ et $\text{rg}(p) + \text{rg}(q) \leq n$.

1. Montrer que $E = \text{im}(p) \oplus \text{im}(q)$.
2. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 6 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Télécom MP 2024 (RMS 135-1 1405)

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tel que $\text{rg}(f \circ g) = 2$. Calculer $\text{rg}(f)$ et $\text{rg}(g)$.

Exercice 7 (★★★★☆) – Oral X-ESPCI PC 2015 (RMS 126-2 308)

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}$. Montrer que les coefficients de P sont dans $\mathbb{Q}$. Donner un exemple de P à coefficients non entiers tel que $\forall n \in \mathbb{Z}, P(n) \in \mathbb{Z}$.

Exercice 8 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Télécom PSI 2024 (RMS 135-1 1401)

Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 9 (★★★★☆) – Oral Navale MP-MPI 2024 (RMS 135-1 1403)

Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec les matrices de rang 1.

Exercice 10 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom MP-MPI 2024 (RMS 135-1 1408)

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + XX^T) = 1 + X^T X$.

Exercice 11 (★★★★☆) – Oral CCINP PSI 2025

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A commute avec sa transposée.

1. Montrer que $\ker(A) = \ker(A^T)$.
2. Montrer que $\ker(A)$ et $\operatorname{im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 12 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP-MPI (RMS 134-1 558)

Soient $K_1, \dots, K_n$ des segments non triviaux disjoints.

1. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifie pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\int_{K_j} P = 0$ alors $P = 0$.
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\int_{K_j} P = 0$.

Exercice 13 (★★★★☆) – Oral Centrale PSI 2024 (RMS 135-1 1271)

Soient E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n et $f \in \mathcal{L}(E)$. Pour $k \in \mathbb{N}$ on pose $r_k = \operatorname{rg}(f^k)$.

1. Montrer que la suite (r_k) est décroissante et stationnaire.
2. Montrer que la suite $(r_k - r_{k+1})$ est décroissante.
Indication. On pourra considérer $g: x \in f^k(E) \mapsto f(x) \in f^{k+1}(E)$.

Exercice 14 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2025 (RMS 136-1 852)

On considère des entiers $N \geq 1$ et $n \geq 2$, et une famille de réels $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ tous distincts. On pose $\varphi: P \in \mathbb{R}_N[X] \mapsto (P(a_1), P'(a_1), P(a_2), P'(a_2), \dots, P(a_n), P'(a_n))$.

1. Quel est le rang de φ ?
2. À quelle condition φ est-il un isomorphisme ? Cette condition étant remplie déterminer l'image réciproque de $(x_1, y_1, x_2, y_2, \dots, x_n, y_n)$ par φ .

Exercice 15 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2025 (RMS 136-1 853)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. on pose $V = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \operatorname{rg}(M) \leq 1\}$.

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que M appartient à V si, et seulement si il existe $X, Y \in \mathbb{K}^n$ tels que $M = XY^T$.
2. Soient $M_1 = X_1 Y_1^T$ et $M_2 = X_2 Y_2^T$ avec $X_1, Y_1, X_2, Y_2 \in \mathbb{K}^n$. Montrer que, si $M_1 + M_2$ est de rang inférieur ou égal à 1, alors (X_1, X_2) est liée ou (Y_1, Y_2) est liée.

Exercice 16 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2025 (RMS 136-1 854)

Soient $I_0, \dots, I_n$ des segments non réduits à des points. Existe-t-il $P \in \mathbb{R}_{n+1}[X]$ tel que $\forall k \in \{0, \dots, n\}$, $\int_{I_k} P(t) dt = 0$

? Même question avec $P \in \mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 17 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PC 2025 (RMS 136-1 960)

Calculer $\min_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{i=1}^n \left\lfloor \frac{\sigma(i)}{i} \right\rfloor$.

Exercice 18 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2021 (RMS 132-2 673)

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Déterminer le rang de la comatrice de M en fonction de celui de M .

Exercice 19 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2025

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux.

1. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels non tous nuls et $H = \left\{ P \in E \mid \sum_{k=0}^n \alpha_k P(a_k) = 0 \right\}$.
 - (a) Justifier que H est un espace vectoriel et calculer sa dimension.
 - (b) Soit $Q \in E$. Déterminer $d(Q, H)$.

Exercice 20 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2019 (RMS 129-2 503)

Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ scindé à racines simples. Montrer que P n'a pas deux coefficients nuls consécutifs.

Exercice 21 (★★★★☆) – Oral Centrale PC 2022 (RMS 133-2 1041)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^n = 0$ et $A^{n-1} \neq 0$.

1. Donner une matrice T , la plus simple possible, telle que A soit semblable à T .
2. Soit $B \in M_n(\mathbb{R})$ commutant avec A . Montrer que B est un polynôme en A .

Exercice 22 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PC 2024 (RMS 135-1 495)

Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $Q = 1 + 2X + \dots + nX^{n-1}$. Calculer $\prod_{\zeta \in \mathbb{U}_n} Q(\zeta)$, où $\mathbb{U}_n$ désigne le groupe des racines n -ème de l'unité.

Exercice 23 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2017 (RMS 128-2 459)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, G une partie finie et non vide de $\text{GL}(E)$ stable par produit, $p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g$.

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$.
2. Montrer que p est un projecteur d'image $E^G = \bigcap_{g \in G} \ker(g - \text{id})$. En déduire une expression de la dimension de E^G .

Exercice 24 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2017 (RMS 128-2 461)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et G un sous-groupe fini de $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $\forall g \in G, g^2 = I_n$.

1. Montrer que G est abélien et que son cardinal est une puissance de 2. Quel est le cardinal maximal d'un tel sous-groupe ?
2. Que peut-on dire de m et n dans $\mathbb{N}^*$ tels que $\text{GL}_m(\mathbb{C})$ et $\text{GL}_n(\mathbb{C})$ soient isomorphes ?

Exercice 25 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 858)

Soit D_n le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ sans point fixe et $D_0 = 1$.

1. Soit $M = \left(\binom{j}{i}\right)_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ déterminer M^{-1} .
2. Exprimer D_n en fonction des D_k pour $0 \leq k \leq n$.
3. Exprimer D_n en fonction de n .

Analyse**Exercice 26 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Ponts MP 2024**

Montrer que toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle s'écrit comme différence de deux fonctions convexes.

Exercice 27 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Télécom 2023 (RMS 135-1 1481)

On pose

$$f:]-\frac{1}{3}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \longmapsto \int_x^{3x} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt.$$

Étudier f et donner son graphe (*on admettra que $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x)$ est finie*).

Exercice 28 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom PSI 2023 (RMS 134-1 1572)

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n} \ln(n)}$.

Exercice 29 (★★☆☆☆) – Oral Centrale PC 2022 (RMS 133-2 1197)

Soit f, g deux fonctions réelles continues sur un segment $[a, b]$ inclus dans $]0, +\infty[$ avec $g \geq 0$. Montrer qu'il existe $c \in [a, b]$ tel que $\int_a^b fg = f(c) \int_a^b g$.

Exercice 30 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts 2023 (RMS 134-1 833)

Soit $f: x \mapsto \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos(t) + 1) dt$.

1. Déterminer le domaine de définition de f , étudier la continuité et les symétries.
2. Expliciter $f(x)$.

Exercice 31 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom 2023 (RMS 134-1 1503)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x) dx$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$.
2. Donner un équivalent simple de I_n .
3. Nature et somme éventuelle de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 32 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom 2023 (RMS 134-1 1522)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = e^{-x}$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
2. Plus généralement montrer que si $f'(x) + f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 33 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2024

Montrer que toute fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur un intervalle s'écrit comme différence de deux fonctions convexes.

Exercice 34 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom PC 2016

Déterminer toutes les fonctions dérivables $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1.$$

Indication : on pourra introduire $g: x \mapsto f(x)f(-x)$.

Exercice 35 (★★★★☆) – Oral X PC 2024 (RMS 135-1 416)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n -ème de l'unité. Calculer

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{2 - z}.$$

Exercice 36 (★★★★☆) – Oral X PC 2024 (RMS 135-1 418)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le module de $\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(2i\pi \frac{k^2}{n}\right)$.

Exercice 37 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2023 (RMS 134-1 961)

Justifier l'existence et l'unicité d'une fonction continue et bornée $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \geq 0, f(x) = 2 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{2 + f(t)^2} dt.$$

Le cas échéant étudier le comportement de f en $+\infty$.

Exercice 38 (★★★★☆) – Oral Centrale PC 2022 (RMS 132-2 1066)

Pour $n \geq 2$ on pose $a_n = \sum_{k=2}^n \ln^2(k)$.

1. Déterminer un équivalent de a_n lorsque $n \rightarrow +\infty$.
2. Quelle est la nature de la série de terme général $\frac{1}{a_n}$?
3. Soit (u_n) une suite strictement positive qui tend vers $+\infty$. Peut-on affirmer que la série de terme général $\frac{1}{u_0 + u_1 + \dots + u_n}$ converge ?

Exercice 39 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 919)

Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ continue et surjective. Montrer que tout $y \in \mathbb{R}$ admet une infinité d'antécédents par f .

Exercice 40 (★★★★★) – Oral X-ENS & Mines-Ponts MP 2021 (RMS 132-2 527)

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \sin(\pi(2 + \sqrt{3})^n)$.

Indication : on pourra faire intervenir la quantité $a_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$.

Exercice 41 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts 2023 (RMS 133-2 570)

Soit $a > 1$. Calculer l'intégrale $\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos(t) + 1) dt$.

Exercice 42 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts MP 2016 (RMS 127-2 577)

Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}{n(n+1)}.$$

Probabilités

Exercice 43 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Ponts MP-MPI 2023 (RMS 134-1 892)

Une puce se trouve sur l'origine de $\mathbb{Z}^2$. À chaque étape elle saute aléatoirement d'une unité dans l'une des 4 directions. On note X_n l'abscisse de la position de la puce après n étapes. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathbb{V}[X_n]$.

Exercice 44 (★★★★☆) – Oral MP X-ENS (RMS 132-2 139/130-2 347)

Les $n \geq 2$ participants à une soirée déposent leur chapeau au vestiaire. À la fin de la soirée les chapeaux sont redistribués aléatoirement. Soit X le nombre d'invités qui retrouvent leur chapeau. Préciser l'espérance et la variance de X .

Exercice 45 (★★★★☆) – Oral X PSI 2024 (RMS 135-1 409)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec a_{ij} des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Calculer $\mathbb{E}[\det(A)]$ et $\mathbb{V}(\det(A))$.

Exercice 46 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2018 (RMS 129-2 798)

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de variables aléatoires i.i.d. de loi de Bernoulli de paramètre p . On considère la matrice aléatoire $M = (X_i X_j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

1. Donner la loi du rang et de la trace de M .
2. Quelle est la probabilité que M représente un projecteur ?

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications, que vous avez des questions sur cette colle ou que vous voulez parler de maths vous pouvez m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : fabien.narbonne@posteo.net

Site internet : <https://fabiennarbonne.fr>