

Oraux Mines-Télécom

Exercice 1 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom MP 2022 (RMS 133-2 1283)

Soient u et v deux endomorphismes de E , où E est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension quelconque.

1. Montrer que, si $\lambda \neq 0$ est une valeur propre de $u \circ v$, alors c'est aussi une valeur propre de $v \circ u$.
2. Ici, $E = \mathbb{R}[X]$, $u(P) = P'$ et $v(P) = \int_0^X P$. Calculer $\ker(u \circ v)$ et $\ker(v \circ u)$. Qu'en déduire ?
3. Montrer que le résultat de la première question est aussi valable pour $\lambda = 0$ lorsque E est de dimension finie.

Exercice 2 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Télécom MP 2024 (RMS 135-1 1405)

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tel que $\text{rg}(f \circ g) = 2$. Calculer $\text{rg}(f)$ et $\text{rg}(g)$.

Exercice 3 (★☆☆☆☆) – Oral Mines-Télécom PSI 2024

Soit la matrice suivante

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant un minimum de calcul déterminer le rang de Θ , $\ker(\Theta)$ et $\text{im}(\Theta)$.

Exercice 4 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Télécom PSI 2024 (RMS 135-1 1401)

Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 5 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Télécom MP-MPI 2024 (RMS 135-1 1404)

On considère la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \sin(i+j)$. Déterminer $\text{rg}(A)$ et en déduire $\det(A)$.

Indication : On pourra introduire les vecteurs $X = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix}$.

Exercice 6 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Télécom PSI 2025 (RMS 136-1 1510)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ et $B = A + A^T$. On suppose qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que $B^k = 0$. Montrer que A est antisymétrique.

Exercice 7 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom MP 2025 (RMS 136-1 1373)

Soit $n \geq 2$, un entier. Déterminer toutes les matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} M^5 &= M^2 \\ \text{Tr}(M) &= n. \end{cases}$$

Exercice 8 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom 2025

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de A pour que la suite (A^n) converge vers une matrice $L \neq 0$.

Exercice 9 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom MP-MPI 2024 (RMS 135-1 1408)

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + XX^T) = 1 + X^T X$.

Exercice 10 (★★☆☆☆) – Oral Mines-télécom PSI 2023 (RMS 134-1 1446)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$.

1. Montrer que $\text{rg}(A)$ est pair.
2. Que dire si $A = A^T$?

Exercice 11 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom MP 2017 (RMS 128-2 1047)

Soit E un espace vectoriel normé, A un ouvert, B une partie quelconque de E .

1. Montrer que $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$.
2. Donner un contre-exemple dans le cas où A n'est pas un ouvert.

Exercice 12 (★★★★☆) — Oral Mines-Télécom MP 2017 (RMS 128-2 1048)

Soit $d \in \mathbb{N}$ fixé et (P_n) une suite de $\mathbb{R}_d[X]$ qui converge simplement vers $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}, P_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} f(x)$.

1. Montrer que la limite f est polynomiale de degré $\leq d$.
2. Montrer que la convergence est uniforme sur tout segment de $\mathbb{R}$.

Exercice 13 (★★☆☆☆) – Oral TPE (Mines-Télécom) PSI 2018 (RMS 129-2 1180)

Définissons pour $P \in \mathbb{R}[X]$, $N_1(P) = \sum_{k=0}^{+\infty} |P^{(k)}(0)|$ et $N_2(P) = \sup_{t \in [-1,1]} |P(t)|$.

1. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes sur $\mathbb{R}[X]$.
2. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P_n = \frac{1}{n} X^n$. Étudier la limite de $N_1(P_n)$ et de $N_2(P_n)$.

Exercice 14 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom PSI 2025

On pose $\forall x > 0, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(x+n)}$.

1. Justifier que f est bien définie.
2. Déterminer deux réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + o_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{x^2} \right).$$

Exercice 15 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom PSI 2022 (RMS 133-2 1379)

Déterminer le rayon de convergence et la somme de $\sum \frac{x^n}{2n+1}$.

Exercice 16 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Télécom PSI 2025 (RMS 136-1 1549)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on note $z_n = (1 + i)^n$.

1. Déterminer le module et l'argument de z_n .
2. Montrer que la fonction $x \mapsto e^x \cos(x)$ est développable en série entière sur $\mathbb{R}$.
3. En notant $e^x \cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$, montrer que, $\forall n \in \mathbb{N}, a_n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom MP 2025 (RMS 136-1 1414)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence de $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ et donner une expression de $f(x)$.

Exercice 18 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Télécom PSI 2021 (RMS 132-2 1157)

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'équation $\sum_{k=1}^n x^k = 1$ admet une unique solution dans $[0, 1]$. On la note a_n .
2. Montrer que la suite (a_n) est décroissante et minorée par $\frac{1}{2}$.
3. Montrer que la suite (a_n) converge et déterminer sa limite.

Exercice 19 (★☆☆☆☆) – Oral Mines-Télécom PSI 2022 (RMS 133-2 1346)

Calculer $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx).$$

Exercice 20 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom PSI 2023 (RMS 134-1 1572)

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n} \ln(n)}$.

Exercice 21 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom MP 2023

Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

Exercice 22 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom 2023 (RMS 134-1 1503)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x) dx$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$.
2. Donner un équivalent simple de I_n .
3. Nature et somme éventuelle de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 23 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Télécom 2023 (RMS 135-1 1481)

On pose

$$f:]-\frac{1}{3}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \int_x^{3x} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt.$$

Étudier f et donner son graphe (*on admettra que $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x)$ est finie*).

Exercice 24 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom PC 2016

Déterminer toutes les fonctions dérivables $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1.$$

Indication : on pourra introduire $g: x \mapsto f(x)f(-x)$.

Exercice 25 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom 2023 (RMS 134-1 1522)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = e^{-x}$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
2. Plus généralement montrer que si $f'(x) + f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 26 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom 2024

On considère l'équation

$$(E): \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1.$$

1. Résoudre (E) sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
2. Soit

$$g:]-1, +\infty[\setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$x \longmapsto \frac{\ln(1+x)}{x}.$$

Montrer que g est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $] -1, +\infty[$.

3. Montrer que (E) possède une unique solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications, que vous avez des questions sur cette colle ou que vous voulez parler de maths vous pouvez m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : fabien.narbonne@posteo.net

Site internet : <https://fabiennarbonne.fr>