

Oraux Mines-Ponts

Algèbre linéaire

Exercice 1 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2015 (RMS 126-2 482)

Soit $A = (a_{ij}) \in M_4(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = 1$ si $i + j$ est pair, $a_{ij} = 2$ sinon.

1. Trouver les valeurs propres et vecteurs propres de A .
2. Résoudre $X^2 + X = A$ dans $M_4(\mathbb{R})$.

Exercice 2 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2015 (RMS 126-2 484)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ définie par : $a_{ij} = 1$ si $|i - j| = 1, 0$ sinon.

1. Calculer $\det(A - (2 \cos a)I_n)$ pour $a \in]0, \pi[$.
2. En déduire les valeurs propres de A .

Exercice 3 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2021 (RMS 130-2 688)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ diagonalisable et $B = A^3 + A + I_n$. Montrer que A est un polynôme en B . Le résultat reste-t-il vrai si on remplace $\mathbb{R}$ par $\mathbb{C}$?

Exercice 4 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 874)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que f^2 est un projecteur. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f soit diagonalisable.

Exercice 5 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 887)

Soit $C \in M_n(\mathbb{C})$ de rang r .

1. Démontrer le théorème du rang pour les endomorphismes de $\mathbb{C}^n$.
2. Montrer qu'il existe $P, Q \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ telles que $C = PJ_rQ = \begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. Soient $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $AC = CB$. Montrer que A et B possèdent r valeurs propres communes en tenant compte des multiplicités.
4. Que peut-on dire dans la question précédente lorsque $r = n$?

Exercice 6 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 887)

Soit $A \in \text{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + A^T = I_n$.

1. Montrer que $A^4 - 2A^2 + A = 0$.
2. Montrer que 1 n'est pas valeur propre de A .
3. Montrer que A est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{R})$ et déterminer l'expression des A possibles.

Exercice 7 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2026

Soient $A, B \in M_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que si $\text{Sp}(A) \cap \text{Sp}(B) = \emptyset$ alors $\chi_A(B) \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ où χ_A désigne le polynôme caractéristique de A .
2. On suppose qu'il existe $C \in M_n(\mathbb{C}) \setminus \{0\}$ telle que $AC = CB$.
 - (a) Montrer que $\forall P \in \mathbb{C}[X], P(A)C = CP(B)$.
 - (b) En déduire que A et B ont au moins une valeur propre en commun.

Exercice 8 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Ponts 2021 (RMS 132-2 466))

Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $M^{-1} = P(M)$.

Exercice 9 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2017 (RMS 128-2 466)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ de rang 2. Exprimer son polynôme caractéristique en fonction de $\text{Tr}(A)$ et de $\text{Tr}(A^2)$.

Exercice 10 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 857)

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'admet pas de racine carrée.

Exercice 11 (★★★★☆) – Oral Centrale PSI 2025 (RMS 136-1 1253)

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in \mathcal{L}(E)$ nilpotent. Soit $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$.

1. Montrer que $\text{Sp}(u) = \{0\}$.
2. Soit $v = \sum_{k=0}^{p-1} u^k$. Montrer que v est un automorphisme et trouver v^{-1} .
3. Montrer que $\ker(v - \text{id}) = \ker(u)$.
4. Trouver le spectre de v .

Exercice 12 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2024 (RMS 135-1 549)

Soit $k \in \mathbb{C}$, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ? En déduire que le polynôme caractéristique de A s'écrit $\chi_A(X) = X^2(X - \lambda)(X - \mu)$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que λ et μ satisfont

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= k \\ \lambda^2 + \mu^2 &= k^2 + 6 \end{cases}$$

En déduire les valeurs de λ et μ .

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que A soit diagonalisable.

Exercice 13 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Ponts 2021 (RMS 132-2 444)

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^3, f(x) = g(x)v$.

Exercice 14 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2017 (RMS 128-2 465)

Existe-t-il une forme linéaire Φ sur $M_n(\mathbb{C})$ telle que $\forall A \in M_n(\mathbb{C}), \Phi(A) \in \text{Sp}(A)$?

Exercice 15 (★★★☆☆) – Oral Mines-Ponts MP 2021 (RMS 132-2 498)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et

$$\begin{aligned} f_A: M_n(\mathbb{K}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ M &\longmapsto AM. \end{aligned}$$

Montrer que A et f_A ont le même spectre.

Exercice 16 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2021 (RMS 130-2 493)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie et $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que u est diagonalisable si, et seulement si il existe $n \in \mathbb{N}^*, (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et $(v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{L}(E)^n$ tels que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, u^k = \sum_{i=1}^n \alpha_i^k v_i$.

Exercice 17 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2025 (RMS 136-1 853)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. on pose $V = \{M \in M_n(\mathbb{K}) \mid \text{rg}(M) \leq 1\}$.

1. Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que M appartient à V si, et seulement si il existe $X, Y \in \mathbb{K}^n$ tels que $M = XY^T$.
2. Soient $M_1 = X_1 Y_1^T$ et $M_2 = X_2 Y_2^T$ avec $X_1, Y_1, X_2, Y_2 \in \mathbb{K}^n$. Montrer que, si $M_1 + M_2$ est de rang inférieur ou égal à 1, alors (X_1, X_2) est liée ou (Y_1, Y_2) est liée.

Exercice 18 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts

Soit

$$\begin{aligned} u: \mathbb{K}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P &\longmapsto P(X+1). \end{aligned}$$

1. Montrer que χ_u , le polynôme caractéristique de u vérifie $\chi_u(X) = (X-1)^n$.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Déterminer des réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on a

$$P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

Exercice 19 (★★★★☆) - Oral Mines-Pont

On considère $z \in \mathbb{C}$ et $M_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que M_z soit diagonalisable.

Exercice 20 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2021 (RMS 132-2 468)

Soit p un nombre premier et $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le corps à p éléments.

1. Déterminer $q = \text{Card}(\text{GL}_2(\mathbb{F}_p))$.
2. Montrer que $\forall A \in M_2(\mathbb{F}_p), A^{q+2} = A^2$.
3. On considère désormais $q = \text{Card}(\text{GL}_3(\mathbb{F}_p))$. A-t-on $\forall A \in M_3(\mathbb{F}_p), A^{q+3} = A^3$?

Exercice 21 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2015 (RMS 126-2 474)

Soit $A \in M_2(\mathbb{C})$. Montrer que A est semblable à $-A$ si et seulement si $\text{Tr}(A) = 0$.

Exercice 22 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts 2025 (RMS 136-1 531)

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Déterminer l'ensemble $I = \{P \in \mathbb{C}[X] \mid P(M) \text{ nilpotente}\}$.

Exercice 23 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2025 (RMS 136-1 530)

Soient $J \in M_n(\mathbb{C})$ la matrice dont tous les coefficients sont égaux à 1 et $A \in M_n(\mathbb{C})$ telle que $A^3 = J$. Montrer que $\text{Tr}(A)^3 = \text{Tr}(J)$.

Exercice 24 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2015 (RMS 126-2 479)

Déterminer $M \in M_4(\mathbb{C})$ telle que $M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 25 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts MP 2016 (RMS 127-2 541)

Déterminer les A de $M_2(\mathbb{R})$ telles que $A^T = A^2$.

Exercice 26 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts 2024 (RMS 135-1 592)

Soit $n \geq 3$. Soient $A, B \in \mathbb{R}^n$ non colinéaires. On pose $M = AB^T + BA^T$.

1. Montrer que M est diagonalisable.
2. Déterminer $\text{rg}(M)$.
3. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de M .

Exercice 27 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2018 (RMS 129-2 717)

Soit $A \in M_n(\mathbb{Z})$ telle que $4A^3 + 2A^2 + A = 0$. Montrer que $(A^k)_{k \geq 0}$ converge et déterminer sa limite. Qu'en déduire sur A ?

Exercice 28 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts 2023 (RMS 134-1 686)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice. On pose $C(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}$ sa classe de conjugaison. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si $C(A)$ est fermée.

Exercice 29 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2021 (RMS 132-2 673)

Soit $M \in M_n(\mathbb{C})$. Déterminer le rang de la comatrice de M en fonction de celui de M .

Exercice 30 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 855)

Soit $P \in M_n(\mathbb{R})$ représentant un projecteur p de rang r dans la base canonique de $\mathbb{R}^n$. Déterminer la trace de l'endomorphisme de $M_n(\mathbb{R})$ défini par $\psi(X) = PX - XP$.

Exercice 31 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts MP-MPI 2024 (RMS 135-1 604)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On pose

$$\begin{aligned} f_A: M_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{C}) \\ M &\longmapsto AMA^T. \end{aligned}$$

1. Soit $(X_1, \dots, X_n, Y_1, \dots, Y_n) \in (\mathbb{C}^n)^{2n}$. Montrer que $(X_1, \dots, X_n)$ et $(Y_1, \dots, Y_n)$ sont des bases de $\mathbb{C}^n$ si et seulement si $(X_i Y_j^T)_{1 \leq i, j \leq n}$ est une base de $M_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer que A est inversible si et seulement si f_A est inversible.
3. On suppose A diagonalisable. Montrer que f_A est diagonalisable.
4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ une valeur propre de A et Y un vecteur propre associé. Montrer que le sous-espace vectoriel $F = \{XY^T \mid X \in \mathbb{C}^n\}$ est stable par f_A .
5. Montrer que si f_A est diagonalisable, alors A est diagonalisable.

Exercice 32 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 858)

Soit D_n le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ sans point fixe et $D_0 = 1$.

1. Soit $M = \left(\binom{j}{i}\right)_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ déterminer M^{-1} .
2. Exprimer D_n en fonction des D_k pour $0 \leq k \leq n$.
3. Exprimer D_n en fonction de n .

Espaces préhilbertiens réels**Exercice 33 (★★★☆☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 902)**

Déterminer toutes les matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que $M^T M M^T = I_n$.

Exercice 34 (★★★☆☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 894)

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E .

1. Montrer que $F \subseteq (F^\perp)^\perp$.
2. On munit $E = \mathbb{R}[X]$ du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t) dt$. Soit $F = \{P \in E \mid P(1) = P'(1) = 0\}$. Déterminer $F^\perp$ et $(F^\perp)^\perp$.
3. Pour E préhilbertien, donner une condition suffisante sur F pour que $F = (F^\perp)^\perp$.

Exercice 35 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2025

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux.

1. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels non tous nuls et $H = \left\{ P \in E \mid \sum_{k=0}^n \alpha_k P(a_k) = 0 \right\}$.
 - (a) Justifier que H est un espace vectoriel et calculer sa dimension.
 - (b) Soit $Q \in E$. Déterminer $d(Q, H)$.

Exercice 36 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2021 (RMS 130-2 503)

Soient $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien, H et K deux hyperplans de E , s_H et s_K les symétries orthogonales associées. Montrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$.

Exercice 37 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2018 (RMS 129-2 738)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que A est antisymétrique si, et seulement si pour toute matrice P orthogonale, $P^{-1}AP$ est à diagonale nulle.

Exercice 38 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2018 (RMS 129-2 741)

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique. Soit $a \in O_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^n = \ker(a - \text{id}) \oplus \text{im}(a - \text{id})$.
2. On note, pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $b_N = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} a^k$. Montrer que la suite converge et trouver sa limite.

Exercice 39 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in [-\alpha, \alpha], \exp \left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} \text{Tr}(F^k) \right) = \frac{1}{\det(I_n - tF)}.$$

Exercice 40 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2025

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux.

1. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels non tous nuls et $H = \left\{ P \in E \mid \sum_{k=0}^n \alpha_k P(a_k) = 0 \right\}$.
 - (a) Justifier que H est un espace vectoriel et calculer sa dimension.
 - (b) Soit $Q \in E$. Déterminer $d(Q, H)$.

Exercice 41 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2023 (RMS 134-1 944)

On munit $E = \mathbb{R}^3$ de sa structure euclidienne orientée canonique. Soient $u = (a, b, c)^T$ non nul et $f: x \in E \mapsto x + u \wedge x$.

1. Montrer que $f \in \mathcal{L}(E)$. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de E .
2. Montrer que 1 est l'unique valeur propre de f . Déterminer le sous-espace propre associé.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ? bijectif ? Donner son rang.

Exercice 42 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2019 (RMS 130-2 520)

Soit E un espace euclidien et a et b deux vecteurs non nuls de E . On pose pour $x \in E \setminus \{0\}$, $f(x) = \frac{\langle a, x \rangle \langle b, x \rangle}{\|x\|^2}$. Déterminer la borne supérieure et la borne inférieure de f .

Exercice 43 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts PSI 2023 (RMS 134-1 943)

Soit E un espace euclidien de dimension 3 et u un vecteur de norme 1. On note f la fonction $f: x \mapsto \langle x, u \rangle u + u \wedge x$.

1. Montrer que f est une isométrie et la caractériser.
2. Trouver toutes les isométries g vérifiant $g^2 = f$.

Groupes, anneaux et arithmétique

Exercice 44 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2017 (RMS 128-2 459)

Soit E un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension finie, G une partie finie et non vide de $\text{GL}(E)$ stable par produit,
$$p = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} g.$$

1. Montrer que G est un sous-groupe de $\text{GL}(E)$.
2. Montrer que p est un projecteur d'image $E^G = \bigcap_{g \in G} \ker(g - \text{id})$. En déduire une expression de la dimension de E^G .

Exercice 45 (★★★☆☆) – Oral Mines-Ponts 2023 (RMS 134-1 521)

Soit $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n + 1 \equiv 0 \pmod n\}$.

1. Montrer que 3 est l'unique nombre premier appartenant à A .
2. Montrer que A contient toutes les puissances de 3.

Exercice 46 (★★★☆☆) – Oral Mines-Ponts MP-MPI 2021 (RMS 132-2 431)

Montrer qu'il existe un multiple de 2021 qui ne possède que des 1 dans son écriture en base 10.

Exercice 47 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2025 (RMS 136-1 469)

On veut montrer qu'il n'existe pas de groupe fini abélien dont l'ensemble des automorphismes est de cardinal 3. Supposons par l'absurde qu'on dispose d'un tel groupe $(G, +)$.

1. Montrer que $\varphi: x \in G \mapsto -x$ est un automorphisme de G , puis que $\forall x \in G, 2x = 0$.
2. Montrer que G possède un sous-groupe V d'ordre 4 et déterminer les automorphismes de V .
3. Montrer qu'il existe $r \in \mathbb{N}$ tel que G soit isomorphe à $V \times (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^r$, et en déduire une absurdité.

Dénombrabilité

Exercice 48 (★★★☆☆) – Oral Mines-Ponts MP 2015 (RMS 126-2 421)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Les familles $\left(\frac{1}{(p+q)^\alpha} \right)_{p,q \in \mathbb{N}^*}$ et $\left(\frac{1}{(p^2+q^2)^\alpha} \right)_{p,q \in \mathbb{N}^*}$ sont-elles sommables ?

Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 49 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 907)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ et $\varphi \in E$. On note, pour $f \in E$, $N_\varphi(f) = \|f\varphi\|_\infty$.

1. Montrer que N_φ est une norme si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est d'intérieur vide.
2. Montrer que N_φ et $\|\cdot\|_\infty$ sont équivalentes si et seulement si $\varphi^{-1}(\{0\})$ est vide.

Exercice 50 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2022 (RMS 133-2 858)

Soit $E = \mathcal{C}^0([0, 1], \mathbb{R})$ muni de la norme $\|\cdot\|_\infty$. Soit φ une forme linéaire sur E telle que $\forall f \in E, (f \geq 0) \Rightarrow (\varphi(f) \geq 0)$. Montrer que φ est continue.

Exercice 51 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2024 (RMS 135-1 594)

Décrire $\{e^A \mid A \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$.

Exercice 52 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2024 (RMS 135-1 637)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. Montrer que e^A est un polynôme en A . Est-ce que A est un polynôme en e^A ?

Exercice 53 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2019

1. Montrer que $O_n(\mathbb{R}) = \{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid M^T M = I_n\}$ est un fermé borné de $M_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $GL_n(\mathbb{R})$ est un ouvert non borné et dense de $M_n(\mathbb{R})$.
3. Soient $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ et $(B_k)_{k \in \mathbb{N}}$ deux suites convergentes de $M_n(\mathbb{R})$, de limites A et B .
 - (a) On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A_k = P_k B_k P_k^{-1}$.
Montrer qu'il existe $P \in O_n(\mathbb{R})$ tel que $A = P B P^{-1}$.
 - (b) On suppose que pour tout $k \in \mathbb{N}$, il existe $P_k \in GL_n(\mathbb{R})$ tel que $A_k = P_k B_k P_k^{-1}$.
 A et B sont-elles semblables ?

Suites et séries de fonctions

Exercice 54 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2025 (RMS 136-1 931)

1. Soient a et b strictement positifs. Montrer que $\int_0^1 \frac{t^{a-1}}{1+t^b} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{a+nb}$.
2. Calculer $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+3n}$.

Exercice 55 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2022 (RMS 133-2 572)

Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^+)$ décroissante et intégrable. Pour $x > 0$ on pose $g(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f(nx)$.

1. Montrer que g est bien définie.
2. Limite et équivalent de g en 0.

Exercice 56 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2021 (RMS 132-2 550)

Existence et calcul de

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n)}{n}.$$

Exercice 57 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 939)

On cherche à déterminer le cardinal¹ m_n de l'ensemble M_n formé des n -uplets $(a_i)_{1 \leq i \leq n}$ tels que :

- $\forall i, a_i \in \{-1, 0, 1\}$.
- $\sum_{i=1}^n a_i = 0$
- $\forall p \in \llbracket 1, n \rrbracket, \sum_{i=1}^p a_i \geq 0$.

On pose $m_0 = 1$.

1. Calculer m_1, m_2 et m_3 .
2. Soit $n \geq 2$. Soit $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \in M_n$ tel que $a_1 = 1$. Montrer qu'il existe $k \in \llbracket 0, n-2 \rrbracket, (b_1, \dots, b_k) \in M_k, (c_1, \dots, c_{n-k-2}) \in M_{n-k-2}$ tels que

$$(a_1, \dots, a_n) = (1, b_1, \dots, b_k, -1, c_1, \dots, c_{n-k-2})$$

et justifier l'unicité de cette décomposition.

3. En déduire une formule de récurrence sur les $m_0, \dots, m_n$.
4. Soit $f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} m_n x^n$. Montrer que le rayon de convergence de cette série est > 0 et déterminer f .

Exercice 58 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts PSI 2019 (RMS 130-2 714) – Nombres de Bell

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note p_n le nombre de partitions de $\{1, \dots, n\}$. On pose $p_0 = 1$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, p_{n+1} = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p_k$.
2. Montrer que le rayon de convergence de $\sum \frac{p_n}{n!} x^n$ est supérieur ou égal à 1.
3. Calculer la somme de cette série entière.

Exercice 59 (★★★★☆) – Oral Mines-Télécom MP 2025 (RMS 136-1 1414)

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on note $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$. Déterminer le rayon de convergence de $f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n$ et donner une expression de $f(x)$.

Exercice 60 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts PSI 2015 (RMS 126-2 518)

Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{\prod_{k=0}^n (2k+1)}$. Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{\prod_{k=0}^n (2k+1)} = \sqrt{e} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2^n n! (2n+1)}.$$

Indication : Considérer une équation différentielle.

1. Il s'agit des nombres de Motzkin.

Exercice 61 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Ponts MP 2021 (RMS 130-2 557)

La fonction f est définie par $f(0) = 1$ et $\forall x \in \mathbb{R}^*, f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 62 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts MP 2025 (RMS 136-1 715)

Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t} \operatorname{sh}(x\sqrt{t}) dt$.

1. Donner le domaine de définition de f .
2. Développer f en séries entières puis exprimer f à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 63 (★★★★★) – Oral Centrale MP 2025 (RMS 136-1 1222)

Pour $n \in \mathbb{N}$, on note u_n la somme des nombres de l'écriture binaire de n . On note $S: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. Soit $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ continue et décroissante. Montrer que $\sum f(n)$ et $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ sont de même nature.
2. (a) Donner le rayon de convergence R de $\sum u_n x^n$.
(b) Donner une relation vérifiée par $S(x^2)$ et $S(x)$.
3. Exprimer $(1-x)S(x)$ sous forme d'une somme, puis donner un équivalent de S en R^- .

Séries numériques**Exercice 64 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2015 (126-2 494)**

Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+n}$.

Exercice 65 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (134-1 916)

On donne $H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln(n) + \gamma + o(1)$.

1. On pose $u_k = \frac{(-1)^k}{k}$. Étudier la convergence et la somme de $\sum_{k \geq 1} u_k$.
2. On donne σ bijection de $\mathbb{N}^*$ avec

k	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$\sigma(k)$	1	3	2	5	7	4	9	11	6	13	15	...

Donner $\sigma(k)$.

3. Déterminer la somme de la série $\sum_{k \geq 1} u_{\sigma(k)}$.

Exercice 66 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2024 (134-1 914)

Pour $n \geq 3$, on s'intéresse à l'équation $e^x - x^n = 0$.

1. Montrer que cette équation admet exactement deux solutions positives u_n et v_n , avec $u_n < v_n$.
2. (a) Montrer que (u_n) tend vers une limite ℓ .
(b) Trouver un équivalent de $u_n - \ell$.
3. Montrer que la suite (v_n) diverge.

Exercice 67 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts 2018 (RMS 129-2 585)

Soit (x_n) définie par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. Montrer que $x_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice 68 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts 2018

Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2(n-i)^2}$. Déterminer un équivalent de (u_n) .

Exercice 69 (★★★★★) – Exemple d'oral Mines-Pont 2025

On considère la suite définie par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de (u_n) .

Exercice 70 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts MP 2016 (RMS 127-2 577)

Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n - 3 \left\lfloor \frac{n}{3} \right\rfloor}{n(n+1)}.$$

Exercice 71 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts MP-MPI 2023 (RMS 134-1 724)

Étudier $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{n}{k\sqrt{k^2 - n^2}}$.

Exercice 72 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts MP-MPI 2021 (RMS 132-2 537)

Étudier la convergence de

$$\sum_{k=0}^n \sin\left(\frac{k}{n}\right) \sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

Intégrales impropres et intégrales à paramètre

Exercice 73 (★★★☆☆) – Oral Mines-Ponts MP-MPI (RMS 134-1 558)

Soient $K_1, \dots, K_n$ des segments non triviaux disjoints.

1. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifie pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\int_{K_j} P = 0$ alors $P = 0$.
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\int_{K_j} P = 0$.

Exercice 74 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2023 (RMS 134-1 961)

Justifier l'existence et l'unicité d'une fonction continue et bornée $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \geq 0, f(x) = 2 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{2 + f(t)^2} dt.$$

Le cas échéant étudier le comportement de f en $+\infty$.

Exercice 75 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2024 (RMS 135-1 748)

Limite de $u_n = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{\dots + \sqrt{2 + 2x}}}}} dx$ (où il y a n racines carrées) ?

Exercice 76 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts 2024 (RMS 135-1 748)

Calculer $\int_0^1 \ln(t) \ln(1-t) dt$.

Exercice 77 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2017 (RMS 128-2 591)

Soient $a, b \in \mathbb{R}^{+*}$. Calculer

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{t} \cos(xt) dt.$$

Exercice 78 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2018 (RMS 129-2 783)

Calculer $f: x \mapsto \int_0^1 \frac{1-t}{\ln(t)} t^x dt$.

Exercice 79 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2018 (RMS 129-2 784)

1. Montrer que la fonction $g: x \mapsto \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.
2. Soit $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2(1+t^2)} dt$. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et vérifie $f(x) \leq x^2$ sur $\mathbb{R}$. Calculer $f'(0)$.
3. Montrer que f est solution de l'équation différentielle sur $\mathbb{R}_+^*$, $y'' - y = \frac{\pi}{2} - x \int_0^{+\infty} g(t) dt$.
4. En déduire que $f(x) = \frac{\pi}{2}(e^{-x} + x - 1)$ sur $\mathbb{R}^+$.

Exercice 80 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2018 (RMS 129-2 759)

Justifier l'existence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{sh}(\sqrt{x})} dx$ et la calculer.

Exercice 81 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2022 (RMS 133-2 594)

Soit $f: x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer $\int_0^{+\infty} f(x) dx$.

Exercice 82 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2025 (RMS 136-1 933)

Soient $f: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2} dt$ et $g: x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{x+t} dt$.

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$ et qu'elles vérifient l'équation différentielle

$$y'' + y = \frac{1}{x}.$$

2. Montrer que f et g sont continues en 0.

3. Trouver les limites de f et de g en $+\infty$.

4. En déduire que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Probabilités**Exercice 83 (★★★☆☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2018 (RMS 129-2 792)**

Soit $(X_1, \dots, X_n)$ une famille de variables i.i.d. dont la loi est déterminée par :

$$\mathbb{P}(X_k = 0) = \frac{8}{27}, \mathbb{P}(X_k = 1) = \frac{12}{27}, \mathbb{P}(X_k = 2) = \frac{6}{27}, \mathbb{P}(X_k = 3) = \frac{1}{27}.$$

Déterminer la loi de $S = X_1 + \dots + X_n$.

Exercice 84 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Ponts MP 2019 (RMS 130-2 622)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour un tournoi de football, n équipes de D_1 et n équipes de D_2 sont rassemblées et n matchs sont organisés successivement. Pour chaque match, les équipes qui s'affrontent sont choisies en toute indépendance et équiprobabilité.

1. Déterminer la probabilité a_n pour que chaque équipe de D_1 rencontre une équipe de D_2 .
2. Donner un équivalent de a_n lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 85 (★★☆☆☆) – Oral Mines-Ponts MP-MPI 2023 (RMS 134-1 892)

Une puce se trouve sur l'origine de $\mathbb{Z}^2$. À chaque étape elle saute aléatoirement d'une unité dans l'une des 4 directions. On note X_n l'abscisse de la position de la puce après n étapes. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathbb{V}[X_n]$.

Exercice 86 (★★★☆☆) – Oral Mines-Ponts 2019 (RMS 130-2 616)

Soient $n \in \mathbb{N}^*$, A, B deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $\mathcal{P}(\{1, \dots, n\})$. Calculer

$$\mathbb{P}(A \subseteq B).$$

Calcul différentiel et équations différentielles

Exercice 87 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2025 (136-1 770)

Soit $A \in M_{2n}(\mathbb{R})$ telle que $A^2 + I_{2n} = 0$. Déterminer toutes les solutions de : $X' = AX$.

Exercice 88 (★★★★☆) – Mines-Ponts MP 2025 (RMS 136-1 778)

Soit (E, N) un espace vectoriel normé de dimension finie. Montrer que N n'est pas différentiable en 0.

Exercice 89 (★★★★☆) – Mines-Ponts MP 2025 (RMS 136-1 787)

On munit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ d'une norme sous-multiplicative.

1. Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall X \in E, |\operatorname{Tr}(X)| \leq C \|X\|$.
2. Montrer que $g : X \mapsto X^2$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
3. Montrer que $f : X \mapsto \operatorname{Tr}(X^2)$ est différentiable sur E et calculer sa différentielle.
4. Montrer que $\forall (A, B) \in E^2, |\operatorname{Tr}(A^2) - \operatorname{Tr}(B^2)| \leq 2C \max(\|A\|, \|B\|) \|A - B\|$.

Exercice 90 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts 2021 (RMS 132-2 611)

Soit E_n l'ensemble des $f \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} f^{(k)} = 0$. Montrer que E_n est un $\mathbb{R}$ -espace vectoriel dont on donnera la dimension et une base.

Exercice 91 (★★★★☆) – Oral Mines-Pont 2021 (RMS 132-2 529)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose $n(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N(f) = \|f + f'\|_\infty$.

1. Justifier que n et N sont des normes sur E .
2. Montrer que n et N sont équivalentes.

Exercice 92 (★★★★☆) – Mines-Ponts MP 2025 (RMS 136-1 786)

Soit $(E, \|\cdot\|)$ un espace vectoriel normé de dimension finie (non nulle). Soit $f : \mathbb{B}_F(0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ continue, constante sur la sphère unité et différentiable sur la boule ouverte $\mathbb{B}_o(0, 1)$. Montrer que f admet un point critique sur $\mathbb{B}_o(0, 1)$.

Exercice 93 (★★★★☆) – Mines-Ponts MP 2025 (RMS 136-1 788)

Soient $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable, et $k \geq 1$ un entier. Montrer l'équivalence entre les énoncés suivants :

- i) $\forall t \in \mathbb{R}^+, \forall x \in \mathbb{R}^n, f(tx) = t^k f(x),$ ii) $\forall x \in \mathbb{R}^n, df(x)(x) = kf(x).$

Exercice 94 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts MP 2019 (RMS 130-2 605)

Soient a et b deux fonctions continues de 1-périodiques de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$. Soit E l'espace des solutions de $y'' + a(t)y' + b(t)y = 0$. Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{C}^*$ et $y \in E \setminus \{0\}$ tels que $\forall t \in \mathbb{R}, y(t+1) = \lambda y(t)$.

Exercice 95 (★★★★☆) – Oral Mines-Pont 2024 (RMS 135-1 783)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- A est antisymétrique.
- Pour toute solution X du système différentiel $X' = AX$ l'application $t \mapsto \|X(t)\|$ est constante.

Exercice 96 (★★★★☆) – Oral Mines-Pont 2021 (RMS 132-2 527)

Soit $E = \{f \in \mathcal{C}^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1. Justifier que N est une norme sur E .
2. Résoudre l'équation $f'' + 2f' + f = g$ en fonction de g d'inconnue $f \in E$.
3. Montrer que qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq aN(f)$.
4. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 97 (★★★★☆) – Mines-Ponts PC 2023 (RMS 134-1 1179)

Soit $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. Résoudre $f''(x) + f(-x) = x$.

Exercice 98 (★★★☆☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2021 (RMS 130-2 727)

Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle $xy' - ny = 0$.

Exercice 99 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PSI 2026

Soit $(E): x^2y'' - 4xy' + (x^2 + 6)y = 0$.

1. Déterminer les solutions de (E) développables en série entière.
2. Déterminer la dimension de l'espace vectoriel des solutions définies sur $\mathbb{R}$.

Exercice 100 (★★★★☆) – Oral Mines-Ponts PC 2025 (RMS 136-1 1079)

Déterminer toutes les $f \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + 2 \int_0^x f(t) \cos(x-t) dt.$$

Exercice 101 (★★★★★) – Oral Mines-Ponts MP 2025 (RMS 136-1 765) – Équation d'Euler

Déterminer les $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^{++}, \mathbb{R})$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^{++}, f'\left(\frac{1}{x}\right) = -f\left(\frac{x}{2}\right)$.

Exercice 102 (★★★★★) – Oral Mines-Pont MP 2021 (RMS 132-2 634)

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ telle que $f + f'' \geq 0$. Déterminer le signe de $\int_0^{2\pi} f(x) dx$.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications, que vous avez des questions sur cette colle ou que vous voulez parler de maths vous pouvez m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : fabien.narbonne@posteo.net

Site internet : <https://fabiennarbonne.fr>