

Oraux faisables en L1/sup

Algèbre

Exercice 1 (★☆☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom PSI 2024

Soit la matrice suivante

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant un minimum de calcul déterminer le rang de Θ , $\ker(\Theta)$ et $\text{im}(\Theta)$.

Exercice 2 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom MP-MPI 2024 (RMS 135-1 1404)

On considère la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \sin(i + j)$. Déterminer $\text{rg}(A)$ et en déduire $\det(A)$.

Indication : On pourra introduire les vecteurs $X = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$ et $Y = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix}$.

Exercice 3 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 857)

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de racine carrée.

Exercice 4 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral CCINP PSI 2022 (RMS 133-2 1347)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p + q = \text{id}_E$ et $\text{rg}(p) + \text{rg}(q) \leq n$.

1. Montrer que $E = \text{im}(p) \oplus \text{im}(q)$.
2. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 5 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom MP 2024 (RMS 135-1 1405)

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tel que $\text{rg}(f \circ g) = 2$. Calculer $\text{rg}(f)$ et $\text{rg}(g)$.

Exercice 6 (★☆☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom PSI 2022 (RMS 133-2 1346)

Calculer $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx).$$

Exercice 7 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom PSI 2024 (RMS 135-1 1401)

Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 8 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Navale MP-MPI 2024 (RMS 135-1 1403)

Déterminer l'ensemble des matrices qui commutent avec les matrices de rang 1.

Exercice 9 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom MP-MPI 2024 (RMS 135-1 1408)

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + XX^T) = 1 + X^T X$.

Exercice 10 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral CCINP PSI 2025

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A commute avec sa transposée.

1. Montrer que $\ker(A) = \ker(A^T)$.
2. Montrer que $\ker(A)$ et $\text{im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 11 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts MP-MPI (RMS 134-1 558)

Soient K_1, \dots, K_n des segments non triviaux disjoints.

1. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifie pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\int_{K_j} P = 0$ alors $P = 0$.
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que pour tout $j \in \{1, \dots, n\}$, $\int_{K_j} P = 0$.

Exercice 12 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts PSI 2025

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et a_0, \dots, a_n des réels distincts deux à deux.

1. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels non tous nuls et $H = \left\{ P \in E \mid \sum_{k=0}^n \alpha_k P(a_k) = 0 \right\}$.
 - (a) Justifier que H est un espace vectoriel et calculer sa dimension.
 - (b) Soit $Q \in E$. Déterminer $d(Q, H)$.

Exercice 13 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 858)

Soit D_n le nombre de permutations de \mathfrak{S}_n sans point fixe et $D_0 = 1$.

1. Soit $M = \left(\binom{j}{i} \right)_{1 \leq i, j \leq n} \in M_n(\mathbb{R})$ déterminer M^{-1} .
2. Exprimer D_n en fonction des D_k pour $0 \leq k \leq n$.
3. Exprimer D_n en fonction de n .

Analyse**Exercice 14 (★☆☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom PSI 2022 (RMS 133-2 1346)**

Calculer $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \cos(kx).$$

Exercice 15 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts MP 2024

Montrer que toute fonction de classe C^2 sur un intervalle s'écrit comme différence de deux fonctions convexes.

Exercice 16 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom 2023 (RMS 135-1 1481)

On pose

$$f :]-\frac{1}{3}, +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$$

$$x \longmapsto \int_x^{3x} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}} dt.$$

Étudier f et donner son graphe (on admettra que $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} f(x)$ est finie).

Exercice 17 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom PSI 2023 (RMS 134-1 1572)

Étudier la nature de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n} \ln(n)}$.

Exercice 18 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2023 (RMS 134-1 833)

Soit $f : x \mapsto \int_0^\pi \ln(x^2 - 2x \cos(t) + 1) dt$.

- Déterminer le domaine de définition de f , étudier la continuité et les symétries.
- Expliciter $f(x)$.

Exercice 19 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom 2023 (RMS 134-1 1503)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x) dx$.

- Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$.
- Donner un équivalent simple de I_n .
- Nature et somme éventuelle de $\sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 20 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom 2023 (RMS 134-1 1522)

- Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = e^{-x}$. Montrer que $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.
- Plus généralement montrer que si $f'(x) + f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$ alors $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} 0$.

Exercice 21 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts MP 2024

Montrer que toute fonction de classe \mathcal{C}^2 sur un intervalle s'écrit comme différence de deux fonctions convexes.

Exercice 22 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom PC 2016

Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1.$$

Indication : on pourra introduire $g : x \mapsto f(x)f(-x)$.

Exercice 23 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral X PC 2024 (RMS 135-1 416)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et \mathbb{U}_n l'ensemble des racines n -ème de l'unité. Calculer

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{2-z}.$$

Exercice 24 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral X PC 2024 (RMS 135-1 418)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le module de $\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(2i\pi \frac{k^2}{n}\right)$.

Exercice 25 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts PSI 2023 (RMS 134-1 961)

Justifier l'existence et l'unicité d'une fonction continue et bornée $f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \geq 0, f(x) = 2 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{2 + f(t)^2} dt.$$

Le cas échéant étudier le comportement de f en $+\infty$.

Exercice 26 (★★★★★) - Inspiré d'un oral X-ENS

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \sin\left(\pi(2 + \sqrt{3})^n\right)$.

Indication : on pourra faire intervenir la quantité $a_n = (2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n$.

Exercice 27 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2023 (RMS 133-2 570)

Soit $a > 1$. Calculer l'intégrale $\int_0^\pi \ln(a^2 - 2a \cos(t) + 1) dt$.

Exercice 28 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts MP 2016 (RMS 127-2 577)

Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-3 \lfloor \frac{n}{3} \rfloor}{n(n+1)}.$$

Probabilités**Exercice 29 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts MP-MPI 2023 (RMS 134-1 892)**

Une puce se trouve sur l'origine de \mathbb{Z}^2 . À chaque étape elle saute aléatoirement d'une unité dans l'une des 4 directions. On note X_n l'abscisse de la position de la puce après n étapes. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathbb{V}[X_n]$.

Exercice 30 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral ENS

Lors d'une fête les N invités arrivent avec un chapeau qu'ils laissent au vestiaire. En repartant les chapeaux ont été mélangés et chaque invité repart avec un chapeau pris au hasard. Déterminer le nombre moyen d'invités repartant avec le même chapeau que celui qu'il avait en arrivant.

Exercice 31 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral X PSI 2024 (RMS 135-1 409)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ avec a_{ij} des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Calculer $\mathbb{E}[\det(A)]$ et $\mathbb{V}(\det(A))$.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : fabien.narbonne@posteo.net

Site internet : <https://fabiennarbonne.fr>