Oraux X-ENS

Exercice 1 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral X PSI 2024 (RMS 135-1 409)

Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ avec a_{ij} des variables aléatoires indépendantes de même loi uniforme sur $\{-1, 1\}$. Calculer $\mathbb{E}[\det(A)]$ et $\mathbb{V}(\det(A))$.

Exercice 2 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS 2021

Soit A, B deux matrices non colinéaires dans $M_n(\mathbb{R})$. Étudier la diagonalisabilité de

$$f: \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(B^T M)A - \mathrm{Tr}(A^T M)B. \end{array}$$

Exercice 3 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Magistère 2025 et d'un oral ENS Ulm 2012

Soit $p \geq 3$ un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et, pour un anneau R, $\mathrm{GL}_n(R)$ le groupe des matrices à coefficients dans R inversibles et dont l'inverse est également à coefficients dans R. On note aussi $\mathrm{SL}_n(R)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(R)$ formé des éléments de déterminant 1.

1. Soit $B \in M_n(\mathbb{Z})$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$ dont toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Montrer que B est nulle.
2. On considère l'application de réduction modulo p.

$$\pi: \begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}_p\right) \\ A = (a_{ij}) & \longmapsto & \overline{A} = (a_{ij} \mod p). \end{array}$$

   Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes dont la restriction à tout sous-groupe fini est injective.
3. Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est de cardinal inférieur à 24. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ possède-t-il un élément d'ordre 24 ?

Exercice 4 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS

Soit n un entier impair. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- $M \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique.
- Pour toute matrice A antisymétrique $\det(A + M) = 0$.

Exercice 5 (★★★★★) - Un théorème de Pòlya, inspiré d'un oral ENS Lyon 2018

Soit $k \geq 2$ un entier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n divise

$$\sum_{i=1}^{n} k^{\mathrm{pgcd}(i,n)}.$$

Exercice 6 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et K un compact non vide de E.

1. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant K.
2. Montrer que si $||\cdot||$ est issue d'un produit scalaire alors cette boule est unique (faire un dessin).

Exercice 7 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral X PC 2024 (RMS 135-1 416)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathbb{U}_n$ l'ensemble des racines n–ème de l'unité. Calculer

$$\sum_{z \in \mathbb{U}_n} \frac{1}{2-z}.$$

Exercice 8 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral X PC 2024 (RMS 135-1 418)

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le module de $\sum_{k=0}^{n-1} \exp\left(2i\pi \frac{k^2}{n}\right)$.

Exercice 9 (★★★★★) - Inspiré d'un oral X-ENS

Déterminer la nature de la série $\sum_{n \geq 0} \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.

Indication : on pourra faire intervenir la quantité $a_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$.

Exercice 10 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral ENS

Lors d'une fête les N invités arrivent avec un chapeau qu'ils laissent au vestiaire. En repartant les chapeaux ont été mélangés et chaque invité repart avec un chapeau pris au hasard. Déterminer le nombre moyen d'invités repartant avec le même chapeau que celui qu'il avait en arrivant.

Exercice 11 (★★★★★) - Inspiré d'un oral ENS

Soit $n \geq 2$ un entier et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déterminer $\mathbb{P}(XY = 0)$.

Exercice 12 (★★★★☆) - Matrices de Bourdaud, inspiré d'un oral ENS 2025

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite de Bourdaud si ses valeurs propres apparaissent sur sa diagonale comptées avec même multiplicité. Dans tout l'exercice $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$.

1. Montrer qu'une matrice réelle est semblable à une matrice de Bourdaud si, et seulement si elle est trigonalisable.
2. Soit A symétrique réelle. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & \langle AX, X \rangle \end{array}.$$

   Montrer que la restriction de f à la sphère unité $\mathbb{S}(0,1)$ admet un maximum. On donnera une caractérisation du lieu où les maxima sont atteints en terme du spectre de A.
3. Quelles sont les matrices réelles symétriques de Bourdaud ?

Exercice 13 (★★★★★) - Inspiré d'un oral inter-ENS 2023

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\sum_{j=0}^{k} f^{(j)}$ possède une limite finie ℓ en $+\infty$. Peut-on en déduire que f possède une limite finie en $+\infty$? On discutera selon la valeur de k.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : `fabien.narbonne@posteo.net` **Site internet :** `https://fabiennarbonne.fr`