Oraux Mines-Télécom

Exercice 1 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom MP 2024 (RMS 135-1 1405)

Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3)$ et $g \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ tel que $\mathrm{rg}(f \circ g) = 2$. Calculer $\mathrm{rg}(f)$ et $\mathrm{rg}(g)$.

Exercice 2 (★☆☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom PSI 2024

Soit la matrice suivante

$$\Theta = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

En faisant un minimum de calcul déterminer le rang de Θ, $\ker(\Theta)$ et $\mathrm{im}(\Theta)$.

Exercice 3 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom PSI 2024 (RMS 135-1 1401)

Factoriser $X^8 + X^4 + 1$ dans $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 4 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom MP-MPI 2024 (RMS 135-1 1404)

On considère la matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ de coefficients $a_{i,j} = \sin(i + j)$. Déterminer $\mathrm{rg}(A)$ et en déduire $\det(A)$.

Indication : On pourra introduire les vecteurs $X = \begin{pmatrix} \cos(1) \\ \vdots \\ \cos(n) \end{pmatrix}$ *et* $Y = \begin{pmatrix} \sin(1) \\ \vdots \\ \sin(n) \end{pmatrix}$.

Exercice 5 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom

Soit $n \geq 2$. Calculer le déterminant et la trace de l'application

$$\Phi : \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array}$$

où A^T désigne la transposée de la matrice A.

Exercice 6 (★★★☆☆) - Inspiré d'un d'oral Mines-Télécom 2024

Soit $n \geq 2$, un entier. Déterminer toutes les matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} M^5 & = M^2 \\ \mathrm{Tr}(M) & = n. \end{cases}$$

Exercice 7 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom 2025

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de A pour que la suite (A^n) converge vers une matrice $L \neq 0$.

Exercice 8 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom MP-MPI 2024 (RMS 135-1 1408)

Soit $X \in M_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(I_n + XX^T) = 1 + X^T X$.

Exercice 9 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom PSI 2025

On pose $\forall x > 0, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!(x+n)}$.

1. Justifier que f est bien définie.
2. Déterminer deux réels a et b tels que

$$f(x) = \frac{a}{x} + \frac{b}{x^2} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

Exercice 10 (★☆☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom PSI 2022 (RMS 133-2 1346)

Calculer $\forall x \in \mathbb{R}, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cos(kx).$$

Exercice 11 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom PSI 2023 (RMS 134-1 1572)

Étudier la nature de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{(-1)^n + \sqrt{n}\ln(n)}$.

Exercice 12 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom MP 2023

Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

Exercice 13 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom 2023 (RMS 134-1 1503)

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^{2n}(x)\,dx$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, I_{n+1} + I_n = \frac{1}{2n+1}$.
2. Donner un équivalent simple de I_n.
3. Nature et somme éventuelle de $\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}$.

Exercice 14 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom 2023 (RMS 135-1 1481)

On pose

$$\begin{array}{rccl} f: &]-\frac{1}{3},+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{3x} \frac{1}{\sqrt{1+t^3}}\,dt. \end{array}$$

Étudier f et donner son graphe *(on admettra que $\lim_{x\to -\frac{1}{3}} f(x)$ est finie)*.

Exercice 15 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom PC 2016

Déterminer toutes les fonctions dérivables $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)f(-x) = 1.$$

Indication : on pourra introduire $g : x \mapsto f(x)f(-x)$.

Exercice 16 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom 2023 (RMS 134-1 1522)

1. Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) + f(x) = e^{-x}$. Montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.
2. Plus généralement montrer que si $f'(x) + f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ alors $f(x) \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$.

Exercice 17 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom 2024

On considère l'équation

$$(E) : \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1.$$

1. Résoudre (E) sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
2. Soit

$$g : \begin{array}{rcl}]-1, +\infty[\setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{x} \end{array}.$$

   Montrer que g est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1, +\infty[$.
3. Montrer que (E) possède une unique solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : `fabien.narbonne@posteo.net` **Site internet :** `https://fabiennarbonne.fr`