Oraux Mines-Ponts

Exercice 1 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 857)

Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ n'a pas de racine carré.

Exercice 2 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2021

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = g(x)v$.

Exercice 3 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts

Soit

$$u: \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1). \end{array}$$

1. Montrer que χ_u, le polynôme caractéristique de u vérifie $\chi_u(X) = (X-1)^n$.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Déterminer des réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on a

$$P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

Exercice 4 (★★★☆☆) Inspiré d'un oral Mines-Pont

On considère $z \in \mathbb{C}$ et $M_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que M_z soit diagonalisable.

Exercice 5 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts

Soit p un nombre premier.

1. Déterminer $q = \text{Card}\left(\text{GL}_2\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)\right)$.
2. Montrer que $\forall A \in M_2\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right), A^{q+2} = A^2$.
3. On considère désormais $q = \text{Card}\left(\text{GL}_3\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right)\right)$. A-t-on

$$\forall A \in M_3\left(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}\right), A^{q+3} = A^3 ?$$

Exercice 6 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts PSI 2024 (RMS 135-1 858)

Soit D_n le nombre de permutations de $\mathfrak{S}_n$ sans point fixe et $D_0 = 1$.

1. Soit $M = \left(\binom{j}{i}\right)_{1 \le i,j \le n} \in M_n(\mathbb{R})$ déterminer M^{-1}.
2. Exprimer D_n en fonction des D_k pour $0 \le k \le n$.
3. Exprimer D_n en fonction de n.

Exercice 7 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts PSI 2025

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux.

1. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels non tous nuls et $H = \left\{ P \in E \mid \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(a_k) = 0 \right\}$.
   (a) Justifier que H est un espace vectoriel et calculer sa dimension.
   (b) Soit $Q \in E$. Déterminer $d(Q, H)$.

Exercice 8 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in [-\alpha, \alpha], \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} \operatorname{Tr}\left(F^k\right)\right) = \frac{1}{\det\left(I_n - tF\right)}.$$

Exercice 9 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts PSI 2025

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux.

1. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels non tous nuls et $H = \left\{ P \in E \mid \sum_{k=0}^{n} \alpha_k P(a_k) = 0 \right\}$.
   (a) Justifier que H est un espace vectoriel et calculer sa dimension.
   (b) Soit $Q \in E$. Déterminer $d(Q, H)$.

Exercice 10 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2023 (RMS 134-1 521)

Soit $A = \{n \in \mathbb{N} \mid 2^n + 1 \equiv 0 \mod n\}$.

1. Montrer que 3 est l'unique nombre premier appartenant à A.
2. Montrer que A contient toutes les puissances de 3.

Exercice 11 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2018

Soit (x_n) définie par $x_0 > 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$. Montrer que $x_n \sim \sqrt{2n}$.

Exercice 12 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2018

Soit (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par $u_n = \sum_{i=1}^{n-1} \frac{1}{i^2(n-i)^2}$. Déterminer un équivalent de (u_n).

Exercice 13 (★★★★★) - Inspiré d'un exemple d'oral Mines-Pont 2025

On considère la suite définie par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Déterminer un développement asymptotique à deux termes de (u_n).

Exercice 14 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2016 (RMS 127-2 577)

Calculer

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n-3\left\lfloor \frac{n}{3}\right\rfloor}{n(n+1)}.$$

Exercice 15 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts MP-MPI (RMS 134-1 558)

Soient $K_1, \ldots, K_n$ des segments non triviaux disjoints.

1. Montrer que si $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ vérifie pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\int_{K_j} P = 0$ alors $P = 0$.
2. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{R}_n[X]$ non nul tel que pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, $\int_{K_j} P = 0$.

Exercice 16 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts PSI 2023 (RMS 134-1 961)

Justifier l'existence et l'unicité d'une fonction continue et bornée $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telle que

$$\forall x \geq 0, f(x) = 2 + \int_0^x \frac{e^{-t^2}}{2+f(t)^2}\,dt.$$

Le cas échéant étudier le comportement de f en $+\infty$.

Exercice 17 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts MP-MPI 2023 (RMS 134-1 892)

Une puce se trouve sur l'origine de $\mathbb{Z}^2$. À chaque étape elle saute aléatoirement d'une unité dans l'une des 4 directions. On note X_n l'abscisse de la position de la puce après n étapes. Calculer $\mathbb{E}[X_n]$ et $\mathbb{V}[X_n]$.

Exercice 18 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts MP 2024

Montrer que toute fonction de classe C^2 sur un intervalle s'écrit comme différence de deux fonctions convexes.

Exercice 19 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $E = \left\{f \in C^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0\right\}$. Pour $f \in E$, on pose $n(f) = ||f||_\infty + \left|\left|f'\right|\right|_\infty$ et $N(f) = \left|\left|f + f'\right|\right|_\infty$.

1. Justifier que n et N sont des normes sur E.
2. Montrer que n et N sont équivalentes.

Exercice 20 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $E = \left\{f \in C^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\right\}$. pour $f \in E$, on pose $N(f) = \left|\left|f + 2f' + f''\right|\right|_\infty$.

1. Justifier que N est une norme sur E.
2. Résoudre l'équation $f'' + 2f' + f = g$ en fonction de g d'inconnue $f \in E$.
3. Montrer que qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall f \in E, ||f||_\infty \leq aN(f)$.
4. Les normes $||\cdot||_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 21 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- A est antisymétrique.
- Pour toute solution X du système différentiel $X' = AX$ l'application $t \mapsto ||X(t)||$ est constante.

Exercice 22 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $f \in C^2([0,2\pi],\mathbb{R})$ telle que $f + f'' \geq 0$. Déterminer le signe de $\int_0^{2\pi} f(x)dx$.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : `fabien.narbonne@posteo.net` **Site internet :** `https://fabiennarbonne.fr`