

Oraux Magistères

Exercice 1 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral magistère 2022

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n . Soit $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux. Montrer que $f_1 \circ \dots \circ f_n = 0$.

Exercice 2 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral magistère 2018

Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes. Montrer que

$$\text{Vect}(N) = \ker(\text{Tr}).$$

Exercice 3 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Magistère 2018

1. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ et p un nombre premier. On pose $\pi(A) = (a_{ij} \bmod p) \in M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Montrer que $\text{rg}(A) \geq \text{rg}(\pi(A))$.
2. On dispose de $2n + 1$ cailloux tels que quel que soit celui que l'on retire on peut diviser les $2n$ restants en deux paquets de n cailloux qui ont le même poids. Montrer que tous les cailloux ont le même poids.

Exercice 4 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Magistère 2025 et d'un oral ENS Ulm 2012

Soit $p \geq 3$ un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et, pour un anneau R , $\text{GL}_n(R)$ le groupe des matrices à coefficients dans R inversibles et dont l'inverse est également à coefficients dans R . On note aussi $\text{SL}_n(R)$ le sous-groupe de $\text{GL}_n(R)$ formé des éléments de déterminant 1.

1. Soit $B \in M_n(\mathbb{Z})$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$ dont toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Montrer que B est nulle.
2. On considère l'application de réduction modulo p .

$$\begin{aligned} \pi : \quad \text{GL}_n(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{F}_p) \\ A = (a_{ij}) &\longmapsto \bar{A} = (a_{ij} \bmod p). \end{aligned}$$

Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes dont la restriction à tout sous-groupe fini est injective.

3. Montrer que tout sous-groupe fini de $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ est de cardinal inférieur à 24. Le groupe $\text{SL}_2(\mathbb{Z})$ possède-t-il un élément d'ordre 24 ?

Exercice 5 (★☆☆☆☆) - Inspiré d'un oral Magistère 2022

Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $S^3 = I_n$. Que vaut S ?

Exercice 6 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Magistère 2022

Déterminer des réels α, β, γ tels que la quantité

$$\int_0^1 (\ln(t) - \alpha - \beta t - \gamma t^2)^2 dt$$

soit minimale.

Exercice 7 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Magistère 2023

Soit $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n . Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. On pose $u = s^* \circ s$.

1. Montrer que u est autoadjoint défini positif et que $\det(u) = 1$.
2. Pour $\lambda \in \text{Sp}(u) \setminus \{1\}$, montrer que s réalise un isomorphisme entre $E_\lambda(u) := \ker(u - \lambda \text{id}_E)$ et $E_{\frac{1}{\lambda}}(u)$.
3. En déduire que le polynôme $P_u(X) = \det(u + X \text{id}_E)$ vérifie $P_u(1) \geq 2^n$. Caractériser le cas d'égalité.

Exercice 8 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Magistère Rennes 2023

Soit $a \in]-1, 1[$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que la série $\sum \sin(a^n x)$ converge. On définit alors

$$f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin(a^n x).$$

2. Déterminer un développement en série entière de f au voisinage de 0 et préciser son rayon de convergence.

Exercice 9 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Magistère 2018

On considère la suite (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 = 1 \\ a_{n+1} = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq a_n \leq n^2$.
2. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$. On note f la fonction associée.
3. Donner une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f . Donner l'expression de f .

Exercice 10 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Magistère 2021

On considère pour $x \geq 0$ la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} du \right) e^{-xt} dt.$$

Montrer que F est bien définie puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 11 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Magistère Rennes

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 \frac{1}{t^t} dt.$$

Exercice 12 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Magistère 2025

1. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telles que

$$\forall x > 0, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

2. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ continues telles que $f|_{\mathbb{R}^*}$ est de classe C^1 et telles que

$$\forall x \neq 0, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ de classe C^1 telles que

$$\forall x \neq 0, f'(x) = f\left(\frac{1}{x}\right).$$

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : fabien.narbonne@posteo.net

Site internet : <https://fabiennarbonne.fr>