Oraux CCINP

Exercice 1 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral CCINP PSI 2022 (RMS 133-2 1347)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $p, q \in \mathcal{L}(E)$ tels que $p + q = \mathrm{id}_E$ et $\mathrm{rg}(p) + \mathrm{rg}(q) \leq n$.

1. Montrer que $E = \mathrm{im}(p) \oplus \mathrm{im}(q)$.
2. Montrer que p et q sont des projecteurs.

Exercice 2 (★☆☆☆☆) - Inspiré d'un oral CCP

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\Phi(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$. Montrer que Φ est diagonalisable.

Exercice 3 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un exemple d'oral CCP 2025

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque espace propre.
2. On considère le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x' &= x + 2z \\ y' &= y \\ z' &= 2x + z \end{cases}$$

avec x, y, z qui désigne trois fonctions d'une variable t. Résoudre le système en utilisant la question 1.

Exercice 4 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral CCINP PSI 2025

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que A commute avec sa transposée.

1. Montrer que $\ker(A) = \ker(A^T)$.
2. Montrer que $\ker(A)$ et $\mathrm{im}(A)$ sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice 5 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un exemple d'oral CCINP 2025

On considère la série $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

1. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a $\pi\sqrt{n^2 + n + 1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$ converge.
3. Converge-t-elle absolument ?

Exercice 6 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un exemple d'oral CCINP 2025

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, $f(x, y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ et $f(0, 0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : `fabien.narbonne@posteo.net` **Site internet :** `https://fabiennarbonne.fr`