

Oraux Mines-Télécom

Exercice 1 (★★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom

Soit $n \geq 2$. Calculer le déterminant et la trace de l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array}$$

où A^T désigne la transposée de la matrice A .

Exercice 2 (★★★★☆☆) - Inspiré d'un d'oral Mines-Télécom 2024

Soit $n \geq 2$, un entier. Déterminer toutes les matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} M^5 = M^2 \\ \text{Tr}(M) = n. \end{cases}$$

Exercice 3 (★★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom 2025

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de A pour que la suite (A^n) converge vers une matrice $L \neq 0$.

Exercice 4 (★★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom MP 2023

Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2 + n + 1}\right)$.

Exercice 5 (★★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom 2024

On considère l'équation

$$(E) : \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1.$$

1. Résoudre (E) sur $]0, 1[$ et sur $]1, +\infty[$.
2. Soit

$$g : \begin{array}{ccc}]-1, +\infty[\setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \frac{\ln(1+x)}{x} \end{array}.$$

Montrer que g est prolongeable en une fonction de classe C^∞ sur $] -1, +\infty[$.

3. Montrer que (E) possède une unique solution de classe C^∞ sur $]0, +\infty[$.