

Oraux Mines-Ponts

Exercice 1 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2021

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = g(x)v$.

Exercice 2 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts

Soit

$$u: \mathbb{K}_{n-1}[X] \longrightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P \longmapsto P(X+1).$$

1. Montrer que χ_u , le polynôme caractéristique de u vérifie $\chi_u(X) = (X-1)^n$.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Déterminer des réels a_0, \dots, a_{n-1} tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on a

$$P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

Exercice 3 (★★★☆☆) Inspiré d'un oral Mines-Pont

On considère $z \in \mathbb{C}$ et $M_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que M_z soit diagonalisable.

Exercice 4 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts

Soit p un nombre premier.

1. Déterminer $q = \text{Card}(\text{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$.
2. Montrer que $\forall A \in M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), A^{q+2} = A^2$.
3. On considère désormais $q = \text{Card}(\text{GL}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$. A-t-on

$$\forall A \in M_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), A^{q+3} = A^3?$$

Exercice 5 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in [-\alpha, \alpha], \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} \text{Tr}(F^k)\right) = \frac{1}{\det(I_n - tF)}.$$

Exercice 6 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts PSI 2025

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et a_0, \dots, a_n des réels distincts deux à deux.

1. Montrer que $\langle P, Q \rangle = \sum_{k=0}^n P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur E .
2. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels non tous nuls et $H = \left\{ P \in E \mid \sum_{k=0}^n \alpha_k P(a_k) = 0 \right\}$.
 - (a) Justifier que H est un espace vectoriel et calculer sa dimension.
 - (b) Soit $Q \in E$. Déterminer $d(Q, H)$.

Exercice 7 (★★★★★) - Inspiré d'un exemple d'oral Mines-Pont 2025

On considère la suite définie par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Déterminer un développement limité à deux termes de (u_n) .

Exercice 8 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $E = \{f \in C^1([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose $n(f) = \|f\|_\infty + \|f'\|_\infty$ et $N(f) = \|f + f'\|_\infty$.

1. Justifier que n et N sont des normes sur E .
2. Montrer que n et N sont équivalentes.

Exercice 9 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $E = \{f \in C^2([0, 1], \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$. Pour $f \in E$, on pose $N(f) = \|f + 2f' + f''\|_\infty$.

1. Justifier que N est une norme sur E .
2. Résoudre l'équation $f'' + 2f' + f = g$ en fonction de g d'inconnue $f \in E$.
3. Montrer que qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall f \in E, \|f\|_\infty \leq aN(f)$.
4. Les normes $\|\cdot\|_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 10 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On munit \mathbb{R}^n du produit scalaire canonique. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- A est antisymétrique.
- Pour toute solution X du système différentiel $X' = AX$ l'application $t \mapsto \|X(t)\|$ est constante.

Exercice 11 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $f \in C^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ telle que $f + f'' \geq 0$. Déterminer le signe de $\int_0^{2\pi} f(x)dx$.