# Oraux Centrale

## Exercice 1 (★★★☆☆) Inspiré d'un oral Centrale MP

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1 avec $n \geq 2$.

1. Montrer que $X(X - \mathrm{Tr}(A))$ est un polynôme annulateur de $A$.
2. En déduire que $A$ est diagonalisable si, et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ et que si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ alors $A$ est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Donner une base de vecteurs propres de $A = \left(\frac{i}{j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

## Exercice 2 (★★★☆☆) - Inspiré d'un d'oral Centrale-Supélec

On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. On note $g$ et $d$ les endomorphismes de $M_n(\mathbb{K})$ définis par $g(M) = AM$ et $d(M) = MA$. Enfin on note $\varphi = g + d$, i.e. $\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = AM + MA$.

1. (a) Montrer que le spectre de $g$ dans $\mathbb{K}$ est celui de $A$.
   (b) Montrer que le spectre de $d$ est également celui de $A$.
2. Vérifier que $g$ et $d$ commutent. On admet que cela implique qu'il existe une base dans laquelle $g$ et $d$ sont simultanément triangulaires supérieures. En déduire que
$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{\lambda + \mu \mid \lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$
3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre de $A$ pour que $\varphi$ soit un automorphisme.

## Exercice 3 (★★★★★) - Inspiré d'un d'oral Centrale-Supélec 2022

L'objectif de cet exercice est de montrer que toute matrice réelle de trace nulle est orthogonalement semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit à coefficients diagonaux nuls.
2. Soit $E$ un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$ et $u$ un endomorphisme de $E$. On suppose que $u$ admet deux valeurs propres $\lambda, \mu$ telles que $\lambda\mu < 0$. On considère deux vecteurs propres de $u$, $x$ et $y$, unitaires associés respectivement à $\lambda$ et $\mu$. Montrer qu'il existe $z \in \mathrm{Vect}(x, y)$ unitaire tel que $\langle u(z), z\rangle = 0$.
3. Montrer le résultat souhaité pour les matrices symétriques réelles.
4. Montrer le résultat souhaité pour toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

## Exercice 4 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Centrale PC 2015

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$. On pose $g = f - \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{im}\, g = (\ker g)^{\perp}$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère
$$p_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{id}_E + f + \cdots + f^n\right).$$
Montrer que pour tout $x \in E$, $p_n(x)$ converge vers $p(x)$, le projeté orthogonal de $x$ sur $\ker g$.

## Exercice 5 (★★★★★) - Groupe dual - Inspiré d'un oral Centrale 2023

Soit $G$ un groupe fini d'ordre $N$. On note $\widehat{G}$ le groupe des morphismes $G \to \mathbb{C}^*$ appelé *groupe dual* de $G$.

1. (a) Rappeler la définition de l'ordre d'un élément $g \in G$.
   (b) Que peut-on dire de l'ordre de $\phi(g)$ pour $g \in$ G et $\phi \in \widehat{G}$ ?
   (c) Montrer que $\widehat{G}$ est fini. On note $\widehat{N}$ son cardinal.
2. (a) Montrer que pour tout $\phi \in \widehat{G} \setminus \{1\}$, $\sum_{g \in G} \phi(g) = 0$.
   (b) Montrer que $\widehat{G}$ est une famille libre de $\mathbb{C}^G$. En déduire que $\widehat{N} \leq N$.
3. On souhaite déterminer $\widehat{\mathfrak{S}_n}$. Soit $\phi \in \widehat{\mathfrak{S}_n}$.
   (a) Montrer que pour toute transposition $\tau$, on a $\phi(\tau) \in \{-1, 1\}$.
   (b) Montrer que si $\phi((1\ 2)) = -1$ alors pour toute transposition $\tau, \phi(\tau) = -1$.
   (c) En déduire que $\widehat{\mathfrak{S}_n} = \{1, \varepsilon\}$ où $\varepsilon$ désigne la signature de $\mathfrak{S}_n$. A-t-on $\widehat{N} = N$ en général ?

*Remarque : l'étudiant ayant rapporté cet exercice mentionne le fait qu'il y avait une autre question après la question 2.b mais ne se rappelait plus de l'énoncé de celle-ci. La question 3 a donc été ajoutée par moi, elle ne figurait pas dans l'énoncé original.*