EXERCICES DE COLLE

2025 - 2026

Fabien NARBONNE

27 juillet 2025

Réduction des endomorphismes

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 (★☆☆☆☆)

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $M^{-1} = P(M)$.

Exercice 3 (★☆☆☆☆)

Soient f, g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que si f et g commutent alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $E_\lambda = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) \subseteq E$ est stable par g.

Exercice 4 (★☆☆☆☆)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Quelles sont ses valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ? Quel est son polynôme minimal ?
L'exercice peut être fait sans aucun calcul de déterminant et ni de résolution de système.

Exercice 5 (★☆☆☆☆)

Décrire les espaces propres associés à l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ & (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

Exercice 6 (★☆☆☆☆)

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'elle soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 7 (★☆☆☆☆)

On considère $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique ainsi qu'une base de chaque espace propre sans calcul de déterminant et sans résolution de système.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ? En déduire son polynôme minimal sans calcul.

Exercice 8 (★☆☆☆☆)

On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique ainsi qu'une base de chaque espace propre sans calcul de déterminant et sans résolution de système.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ? En déduire son polynôme minimal sans calcul.

Exercice 9 (★☆☆☆☆) - Inspiré d'un oral CCP

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\Phi(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$. Montrer que Φ est diagonalisable.

Exercice 10 (★★☆☆☆)

Discuter la diagonalisabilité de l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & (1+X^2)\cdot P'' \end{array}$$

Exercice 11 (★★☆☆☆)

Déterminer les espaces propres de l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & XP'. \end{array}$$

Exercice 12 (★★☆☆☆)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. On suppose qu'il existe $m \geq 2$ un entier tel que $u^m = u \underbrace{\circ \cdots \circ}_{m \text{ fois}} u = u$.

1. Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{im} u^{m-1}$.
2. On suppose E de dimension finie. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Exercice 13 (★★☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer qu'on a équivalence entre

1. $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$
2. $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2$
3. $\ker f = \ker f^2$
4. $\operatorname{im} f \oplus \ker f = E$

Exercice 14 (★★☆☆☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme tel que $P(A) = 0$. Montrer que pour toute valeur propre λ de A on a $P(\lambda) = 0$.

Exercice 15 (★★☆☆☆)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A. Que peut-on en déduire en termes d'espaces propres ?
2. Montrer que -1 est une valeur propre de A.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A sans calcul de déterminant.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Quel est son polynôme minimal ?

Exercice 16 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2021

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = g(x)v$.

Exercice 17 (★★☆☆☆)

On considère la matrice

$$A = \left(\begin{array}{ccc:ccc} 1 & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ \mathbf{0} & & 1 & 1 & & \mathbf{0} \\ \hdashline \mathbf{0} & & 1 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & 1 \end{array}\right) \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

1. Quel est le rang de A ?
2. Calculer A^2 en fonction de A.
3. Déterminer sans calcul de déterminant les valeurs propres de A et les espaces propres associés.

Exercice 18 (★★☆☆☆)

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. On suppose que A^n converge vers une matrice B. Montrer que B est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres possibles.

Exercice 19 (★★☆☆☆)

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ est connexe par arc. Est-il convexe ?

Exercice 20 (★★☆☆☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice. Montrer que $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.

Exercice 21 (★★☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $u \in \mathcal{L}(E)$ et

$$\begin{array}{rccc} f_u : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & v & \longmapsto & uv := u \circ v \end{array}$$

Montrer que $\mu_u = \mu_{f_u}$ où μ_u et μ_{f_u} désignent les polynômes minimaux respectifs de u et de f_u.

Exercice 22 (★★☆☆☆)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.

Exercice 23 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un exemple d'oral CCP 2025

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque espace propre.
2. On considère le système différentiel

$$(S): \begin{cases} x' &= x + 2z \\ y' &= y \\ z' &= 2x + z \end{cases}$$

avec x, y, z qui désigne trois fonctions d'une variable t. Résoudre le système en utilisant la question 1.

Exercice 24 (★★★☆☆) - Inspiré de Mines-Télécom PSI Mathématiques II 2022

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice admettant une valeur propre dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

1. Montrer que A possède deux valeurs propres complexes distinctes conjuguées.
2. Montrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et des réels a, b tels que

$$A = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

(Indication : On pourra considérer V un vecteur propre de A et l'écrire $V = W_1 + iW_2$ avec $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^2$).

Exercice 25 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts

Soit

$$\begin{aligned} u: \quad \mathbb{K}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P &\longmapsto P(X+1). \end{aligned}$$

1. Montrer que χ_u, le polynôme caractéristique de u vérifie $\chi_u(X) = (X-1)^n$.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Déterminer des réels $a_0, \dots, a_{n-1}$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on a

$$P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

Exercice 26 (★★★☆☆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On pose C_f l'ensemble des endomorphismes $g \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent avec f. On suppose que f est diagonalisable et on note $\mathrm{Spec}(f)$ l'ensemble de ses valeurs propres et E_λ ses espaces propres associés.

1. Montrer que C_f est un espace vectoriel de dimension finie.
2. Montrer que $g \in C_f \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Spec}(f)$, E_λ stable par g.
3. En déduire un isomorphisme entre C_f et $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \mathcal{L}(E_\lambda)$ puis qu'on a $\dim C_f = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \alpha_\lambda^2$ où α_λ est la multiplicité de λ.
4. On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $\left(\mathrm{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1}\right)$ est une base de C_f.

Exercice 27 (★★★☆☆)

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ & P & \longmapsto & P(X^2+1)^{(n)}. \end{array}$$

Après avoir justifié que f est bien définie discuter sa diagonalisabilité.

Exercice 28 (★★★☆☆)

On pose

$$\begin{array}{rccc} S: & M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ & M & \longmapsto & JMJ \end{array}$$

avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $S^2 = S \circ S = \mathrm{id}$.
2. On pose $F = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) / JMJ = M \right\}$ et $G = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) / JMJ = -M \right\}$. Montrer que $F \oplus G = M_2(\mathbb{R})$.
3. Que peut-on en déduire sur la diagonalisabilité de S ?
4. Quelles sont les dimensions de F et de G ?

Exercice 29 (★★★☆☆)

Soit $k \in \mathbb{C}$, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ? En déduire que le polynôme caractéristique de A s'écrit $\chi_A(X) = X^2(X-\lambda)(X-\mu)$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que λ et μ satisfont
$$\begin{cases} \lambda + \mu &= k \\ \lambda^2 + \mu^2 &= k^2 + 6 \end{cases}$$
En déduire les valeurs de λ et μ.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que A soit diagonalisable.

Exercice 30 (★★★☆☆)

On considère une urne contenant 2 boules blanches et une boule rouge. On tire successivement des boules dans l'urne. Si on tire une boule blanche on la retire définitivement. Si on tire la boule rouge on la replace dans l'urne. On pose X_n le nombre de boules blanches au n-ème tirage. On pose $x_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $y_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $z_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. On pose $M = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Étude de M.
   (a) Montrer que M est diagonalisable et déterminer une base de chacun de ses espaces propres.
   (b) Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (a) Déterminer une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $U_{n+1} = AU_n$.
   (b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
   (c) Que peut-on dire du comportement asymptotique de x_n, y_n et z_n ? Est-ce surprenant ?

Exercice 31 (★★★☆☆) Inspiré de CCINP PSI 2023

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et

$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & b & a \\ a & \cdots & a & a & b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

que l'on pourra écrire $M(a,b) = bI_n + aM(1,0)$. On notera $P_{a,b}$ son polynôme caractéristique.

1. Montrer que $P_{1,0} = (X-(n-1))(X+1)^n$ (indication : question faisable sans calcul).
2. On suppose dans cette question que $a \neq 0$. Montrer que $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right)$. En déduire l'ensemble des valeurs propres de $M_{a,b}$ ainsi que leur multiplicité.
3. On pose $Q_{a,b}(X) = (X-(b-a))(X-(b+(n-1)a)$. Montrer qu'il s'agit d'un polynôme annulateur de $M(a,b)$.
4. En déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable pour tout $a, b \in \mathbb{C}$.
5. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^k par $Q_{a,b}$. En déduire l'expression de $M(a,b)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 32 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom

Soit $n \geq 2$. Calculer le déterminant et la trace de l'application

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ & A & \longmapsto & A^T \end{array}$$

où A^T désigne la transposée de la matrice A.

Exercice 33 (★★★☆☆)

1. Soient A, B deux matrices dont l'une des deux est inversibles. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ où χ_C désigne le polynôme caractéristique d'une matrice C.
2. Montrer que le résultat reste vrai si on ne suppose plus que A ou B est inversible.

Exercice 34 (★★★☆☆)

On considère E le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ engendré par cos et sin . On pose

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}dt. \end{array}$$

1. Justifier que Φ est bien définie et qu'il s'agit d'un endomorphisme.
2. Donner la matrice de Φ dans la base $(\sin, \cos)$.
3. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Exercice 35 (★★★☆☆)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & z & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C}$ pour que M_z soit diagonalisable.

Exercice 36 (★★★☆☆) Inspiré d'un oral Mines-Pont

On considère $z \in \mathbb{C}$ et $M_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que M_z soit diagonalisable.

Exercice 37 (★★★☆☆) Inspiré d'un oral Centrale MP

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1 avec $n \geq 2$.

1. Montrer que $X(X - \mathrm{Tr}(A))$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A est diagonalisable si, et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ et que si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ alors A est semblable à
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Donner une base de vecteurs propres de $A = \left(\frac{i}{j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Exercice 38 (★★★☆☆)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u)$ est inversible si, et seulement si P est premier avec μ_u, le polynôme minimal de u.
Indication : on pourra commencer par justifier que si $P(u)$ est inversible alors son inverse est aussi dans $\mathbb{K}[u]$.

Exercice 39 (★★★☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et
$$\begin{aligned} \Phi : \quad \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u &\longmapsto u + \mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{id} \end{aligned}$$

1. Montrer que $\forall u \in \mathcal{L}(E), \Phi^2(u) = (n+2)\Phi(u) - (n+1)u$.
2. Montrer que Φ est diagonalisable et décrire ses espaces propres.
3. Que vaut $\det(\Phi)$?

Exercice 40 (★★★☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 41 (★★★☆☆)

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Étudier la diagonalisabilité de
$$\begin{aligned} f : \quad M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto \mathrm{Tr}(A^T M)B + \mathrm{Tr}(B^T M)A. \end{aligned}$$

Indication : on pourra justifier que l'application $\langle M, N \rangle = \mathrm{Tr}(M^T N)$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 42 (★★★☆☆) - Inspiré d'un d'oral Centrale-Supélec

On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. On note g et d les endomorphismes de $M_n(\mathbb{K})$ définis par $g(M) = AM$ et $d(M) = MA$. Enfin on note $\varphi = g + d$, i.e. $\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = AM + MA$.

1. (a) Montrer que le spectre de g dans $\mathbb{K}$ est celui de A.
   (b) Montrer que le spectre de d est également celui de A.
2. Vérifier que g et d commutent. On admet que cela implique qu'il existe une base dans laquelle g et d sont simultanément triangulaires supérieures. En déduire que
$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{\lambda + \mu \mid \lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$
3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre de A pour que φ soit un automorphisme.

Exercice 43 (★★★☆☆) - Inspiré d'un d'oral Mines-Télécom 2024

Soit $n \geq 2$, un entier. Déterminer toutes les matrices $M \in M_n(\mathbb{R})$ telles que

$$\begin{cases} M^5 &= M^2 \\ \mathrm{Tr}(M) &= n. \end{cases}$$

Exercice 44 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom 2025

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ à coefficients strictement positifs.

1. Montrer que A est diagonalisable.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les coefficients de A pour que la suite (A^n) converge vers une matrice $L \neq 0$.

Exercice 45 (★★★★☆) Inspiré de X-ENS MP-MPI math A 2024

Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $E_n = \{1, \dots, n\}$ et on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note aussi $\nu(\sigma)$ son nombre de point fixes, i.e. $\nu(\sigma) = \mathrm{Card}\left\{i \in E_n \mid \sigma(i) = i\right\}$. On considère

$$M = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que M est diagonalisable. Calculer ses valeurs propres ainsi que leur multiplicité (*Indication : observez bien la matrice avant de vous lancer dans un calcul de déterminant, il n'est pas nécessaire de le calculer*).
2. En déduire l'égalité
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X^{\nu(\sigma)} = (X + n - 1)(X - 1)^{n-1}.$$
3. Calculer les trois sommes suivantes :
$$\Sigma_1 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \qquad \Sigma_2 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\nu(\sigma) \qquad \Sigma_3 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma) + 1}.$$
4. On dit qu'une permutation σ n'ayant aucun point fixe est un *dérangement* et on note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que
$$\mathrm{Card}\left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\right\} = \mathrm{Card}\left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\right\} + (-1)^{n-1}(n-1)$$

Exercice 46 (★★★★☆) Suites barypolygonales régulières

On considère un triangle T_0 du plan représenté par 3 points complexes a_0, b_0, c_0. On fixe $t \in]0, 1[$ et on construit un triangle T_1 représenté par les 3 points a_1, b_1 et c_1 qui sont les t-barycentres respectifs de (a_0, b_0), (b_0, c_0) et (c_0, a_0). Plus généralement on construit une suite de triangles a_n, b_n, c_n tels que

$$\begin{cases} a_n &= ta_{n-1} + (1-t)b_{n-1} \\ b_n &= tb_{n-1} + (1-t)c_{n-1} \\ c_n &= tc_{n-1} + (1-t)a_{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ avec $M = \begin{pmatrix} t & 1-t & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 1-t & 0 & t \end{pmatrix}$.

2. On considère χ_M le polynôme caractéristique de M. Montrer que $\chi_M = (X-t)^3 - (1-t)^3$. En déduire que M a trois valeurs propres $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = t + j(1-t), \lambda_3 = t + j^2(1-t)$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
3. Montrer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\j\\j^2\end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix}1\\j^2\\j\end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.
4. On pose P la matrice de changement de base de la base canonique vers (v_1, v_2, v_3) et $D = P^{-1}MP$. Montrer que $M^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\1&1&1\\1&1&1\end{pmatrix}$.
5. Conclure : vers quoi tend la suite de triangle T_n ? Cette limite dépend-elle de t ?

Exercice 47 (★★★★☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice. On pose $C(A) = \left\{P^{-1}AP \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}$ sa classe de conjugaison. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si $C(A)$ est fermée.

Exercice 48 (★★★★☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et

$$\begin{aligned}\Phi : \quad \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E)\\ u &\longmapsto u + \mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{id}\end{aligned}$$

Étudier la diagonalisabilité de Φ et calculer $\det(\Phi)$ et $\mathrm{Tr}(\Phi)$.
Indication : on pourra remarquer que 1 *est une valeur propre évidente de* Φ.

Exercice 49 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS 2021

Soit A, B deux matrices non colinéaires dans $M_n(\mathbb{R})$. Étudier la diagonalisabilité de

$$\begin{aligned}f : \quad M_n(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_n(\mathbb{R})\\ M &\longmapsto \mathrm{Tr}(B^TM)A - \mathrm{Tr}(A^TM)B.\end{aligned}$$

Exercice 50 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Magistère 2018

1. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{Z})$ et p un nombre premier. On pose $\pi(A) = \left(a_{ij} \mod p\right) \in M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) \geq \mathrm{rg}(\pi(A))$
2. On dispose de $2n+1$ cailloux tels que quel que soit celui que l'on retire on peut diviser les $2n$ restants en deux paquets de n cailloux qui ont le même poids. Montrer que tous les cailloux ont le même poids.

Exercice 51 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral magistère 2022

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux. Montrer que $f_1 \circ \cdots \circ f_n = 0$.

Exercice 52 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral magistère 2018

Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes. Montrer que

$$\mathrm{Vect}(N) = \ker(\mathrm{Tr}).$$

Exercice 53 (★★★★★)

On considère un groupe G fini d'ordre n et $\rho : G \longrightarrow \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que tout élément de l'image de ρ est diagonalisable.
   Indication : on pourra essayer de trouver un polynôme annulateur des éléments de l'image.
2. Montrer que si G est commutatif alors les éléments de $\mathrm{im}\,\rho$ sont diagonalisables dans une base commune.

Exercice 54 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts

Soit p un nombre premier.

1. Déterminer $q = \mathrm{Card}\left(\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\right)$.
2. Montrer que $\forall A \in M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),\, A^{q+2} = A^2$.
3. On considère désormais $q = \mathrm{Card}\left(\mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\right)$. A-t-on

$$\forall A \in M_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}),\, A^{q+3} = A^3 ?$$

Exercice 55 (★★★★★) - Opérateur de Voltera

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et V l'endomorphisme de E défini par $V(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\,\mathrm{dt}$. On munit E du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

1. Montrer que V est continu et qu'il ne possède pas de valeur propre.
2. Déterminer l'adjoint V^* de V et calculer $V^*(f)'$.
3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $V \circ V^*$.

Exercice 56 (★★★★★)

On considère $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

On définit l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccc} u : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & \left[(1-X^2)P'\right]' = \frac{d}{dX}\left[(1-X^2)\frac{d}{dX}P\right]. \end{array}$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \coloneqq u_{|\mathbb{R}_n[X]}$ définit un endomorphisme.
2. Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint pour le produit scalaire $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$.
3. Justifier que u_n est diagonalisable et que ses valeurs propres sont $-k(k+1)$ pour $0 \leq k \leq n$.
4. On pose $P_n(X) = \frac{d^n}{dX^n}\left[(X^2-1)^n\right] = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.
   (a) Montrer que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (b) En déduire que $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de vecteurs propres de u_n.

Exercice 57 (★★★★★)

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice. On pose $C(A) = \left\{P^{-1}AP \mid P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\right\}$ sa classe de conjugaison. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si $C(A)$ est connexe par arcs.

Exercice 58 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Magistère 2018

On dispose de $2n+1$ cailloux tels que quel que soit celui que l'on retire on peut diviser les $2n$ restants en deux paquets de n cailloux qui ont le même poids. Montrer que tous les cailloux ont le même poids.

Exercice 59 (★★★★★) - Inspiré d'un d'oral Centrale-Supélec 2022

L'objectif de cet exercice est de montrer que toute matrice réelle de trace nulle est orthogonalement semblable à une matrice dont les éléments diagonaux sont nuls.

1. Soit $M = \begin{pmatrix} 3 & 6 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Déterminer $P \in O_3(\mathbb{R})$ telle que $P^{-1}MP$ soit à coefficients diagonaux nuls.
2. Soit E un espace euclidien muni d'un produit scalaire noté $\langle\ ,\ \rangle$ et u un endomorphisme de E. On suppose que u admet deux valeurs propres λ, μ telles que $\lambda\mu < 0$. On considère deux vecteurs propres de u, x et y, unitaires associés respectivement à λ et μ. Montrer qu'il existe $z \in \mathrm{Vect}(x, y)$ unitaire tel que $\langle u(z), z\rangle = 0$.
3. Montrer le résultat souhaité pour les matrices symétriques réelles.
4. Montrer le résultat souhaité pour toute matrice de $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 60 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Magistère 2025 et d'un oral ENS Ulm 2012

Soit $p \geq 3$ un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et, pour un anneau R, $\mathrm{GL}_n(R)$ le groupe des matrices inversibles à coefficients dans R dont l'inverse est également à coefficients dans R et $\mathrm{SL}_n(R)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(R)$ formé des éléments de déterminant 1.

1. Soit $B \in M_n(\mathbb{Z})$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$ dont toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Montrer que B est nulle.
2. On considère l'application de réduction modulo p.

$$\begin{array}{rccc} \pi : & \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}_p\right) \\ & A = (a_{ij}) & \longmapsto & \overline{A} = (a_{ij} \mod p). \end{array}$$

   Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes dont la restriction à tout sous-groupe fini est injective *(il s'agit du Lemme de Serre)*.
3. Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est de cardinal inférieur à 24. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ possède-t-il un élément d'ordre 24 ?
   Il s'agit d'une borne très large ; on peut en fait montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *ne possède que des sous-groupes finis d'ordre* $1, 2, 3, 4$ *et* 6. *N'hésitez pas à me contacter pour que je vous communique d'exercice dans lequel on le prouve.*

Espaces préhilbertiens réels

Exercice 61 (★☆☆☆☆)

Montrer à l'aide d'un produit scalaire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\cos(x) + \sin(x)| \leq \sqrt{2}.$$

Que peut-on dire lorsqu'il y a égalité ?

Exercice 62 (★☆☆☆☆) - Inspiré d'un oral Magistère 2022

Soit $S \in M_n(\mathbb{R})$ symétrique telle que $S^3 = I_n$. Que vaut S ?

Exercice 63 (★☆☆☆☆)

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & z & \longmapsto & i\,\overline{z} \end{array}$$

Montrer que f est une isométrie vectorielle du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et la décrire.

Exercice 64 (★★☆☆☆)

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que M est la matrice d'une isométrie directe de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
2. Calculer M^3 et en déduire ses valeurs propres possibles.
3. Quel est son polynôme minimal ? La matrice M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
4. Déterminer les éléments caractéristiques de l'isométrie M (axe de rotation, plan stable et angle de rotation).

Exercice 65 (★★☆☆☆)

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Calculer la distance de X^2 à l'espace $F = \mathrm{Vect}(1, X)$.

Exercice 66 (★★☆☆☆)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme $||\cdot||_2$ issue du produit scalaire canonique (celui pour lequel la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ forme une base orthonormée), i.e. $\left|\left|\sum_{k=0}^{n} c_k X^k\right|\right|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} c_k^2}$. On pose pour tout $f \in E^*$,

$$|||f||| = \sup_{P \in E\setminus\{0\}} \frac{|f(P)|}{||x||_2}$$

la norme subordonnée induite par $||\cdot||_2$ .On considère $a \in \mathbb{R}$ et

$$\begin{array}{rccc} f_a: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & P(a) \end{array}$$

Montrer que $|||f_a||| = \sqrt{\frac{1-a^{2(n+1)}}{1-a^2}}$ pour $|a| \neq 1$ et $|||f_a||| = \sqrt{n+1}$ sinon.

Exercice 67 (★★☆☆☆)

On munit $\mathbb{R}^{2n}$ de son produit scalaire canonique. On considère $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice $2n \times 2n$ composée de 1 sur l'antidiagonale.

1. Justifier que J est la matrice d'une symétrie orthogonale dont on précisera les éléments caractéristiques et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de J.
2. Déterminer la projection de $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $\ker(J - I_n)$.

Exercice 68 (★★★☆☆)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.

1. Montrer que $f : E \to E$ est autoadjoint de rang 1 si et seulement si $\exists a \in E \setminus \{0\}$, $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda \langle a, x \rangle a$.
2. On pose $a \in E \setminus \{0\}$ et f l'endomorphisme défini par

$$f(x) = x + \langle x, a \rangle a.$$

Déterminer les espaces propres de f.

Exercice 69 (★★★☆☆)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, H, K deux hyperplans de E et s_H et s_K les deux réflexions orthogonales associées à ces deux hyperplans. Montrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$.

Exercice 70 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Centrale PC 2015

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme orthogonal de E. On pose $g = f - \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{im}\, g = (\ker g)^\perp$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère

$$p_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{id}_E + f + \cdots + f^n\right).$$

Montrer que pour tout $x \in E$, $p_n(x)$ converge vers $p(x)$, le projeté orthogonal de x sur $\ker g$.

Exercice 71 (★★★☆☆)

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on considère $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives, i.e. l'ensemble des matrices symétriques S vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Sx, x \rangle \geq 0$.

1. Montrer que $A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $(Ae_1, \ldots, Ae_n)$ est une famille orthogonale.
3. On suppose désormais que A est inversible. Montrer qu'il existe deux matrices $U, V \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à diagonale strictement positive telles que $A = UDV$.

Exercice 72 (★★★☆☆) - Décomposition QR

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On pose Montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire à diagonale strictement positive telles que $A = QR$.
Indication : on pourra penser à l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 73 (★★★☆☆)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $u \in O(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \langle u(x), x \rangle = 0.$$

1. Montrer que $\forall x, y \in E, \langle u(x), y \rangle + \langle u(y), x \rangle = 0$.
2. En déduire que $u^2 = -\mathrm{id}$ puis que E est de dimension paire $n = 2m$.
3. Montrer qu'il existe une décomposition orthogonale $P_1 \oplus \cdots \oplus P_m$ de E en somme d'espaces P_i de dimension 2 telle que $\forall i, u_{|P_i}$ est une rotation d'angle $\pm\frac{\pi}{2}$.

Exercice 74 (★★★☆☆)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme quelconque et on munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée $|||\cdot|||$ induite par la norme euclidienne de E. Montrer que

$$|||f|||^2 = \max\left\{\lambda \in \mathrm{Spec}(f^* f)\right\}.$$

Exercice 75 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Magistère 2022

Déterminer des réels α, β, γ tels que la quantité

$$\int_0^1 \left(\ln(t) - \alpha - \beta t - \gamma t^2\right)^2 \, dt$$

soit minimale.

Exercice 76 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2025

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F \in S_n(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe $\alpha > 0$ tel que

$$\forall t \in [-\alpha, \alpha], \exp\left(\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{t^k}{k} \mathrm{Tr}\left(F^k\right)\right) = \frac{1}{\det\left(I_n - tF\right)}.$$

Exercice 77 (★★★★☆)

On considère 3 droites vectorielles distinctes D_1, D_2 et D_3 du plan $\mathbb{R}^2$. Décrire les triangles ayant pour médiatrices ces trois droites.

Expliquer comment en construire un.

Exercice 78 (★★★★☆)

Montrer qu'une isométrie f d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ de dimension finie n est la composée d'au plus n réflexions.

(Indication : On pourra procéder par récurrence. Pour l'hérédité on pourra fixer un point quelconque $x \in E \setminus \{0\}$ et traiter séparément d'abord le cas $f(x) = x$ et puis se ramener au premier cas lorsque $f(x) \neq x$).

Exercice 79 (★★★★☆)

On munit $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on pose $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une isométrie. On veut montrer par récurrence sur la dimension n qu'il existe des espaces $V, W, P_1, \ldots, P_r \subseteq E$ en somme directe orthogonale avec $\dim(P_i) = 2$ tels que $f_{|V} = \mathrm{id}_V$, $f_{|W} = -\mathrm{id}_W$ et $f_{|P_i}$ rotation.

1. Traiter les cas $n = 1$ et $n = 2$.
2. Soit $n \geq 3$. On suppose que le résultat qu'on souhaite montrer est vrai pour toute isométrie de $\mathbb{R}^k$ pour $k \leq n-1$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une isométrie.
   (a) Justifier qu'il suffit de trouver un espace $F \subseteq \mathbb{R}^n$ non trivial et stable par f pour conclure.
   (b) Traiter le cas où f a une valeur propre réelle.
   (c) On suppose que toutes les valeurs propres de f sont complexes et on en fixe une $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ainsi qu'un vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n$ associé à λ.
      i. Montrer que $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de f et que $\overline{x}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.
      ii. On pose $F = \mathrm{Vect}\left(\frac{x+\overline{x}}{2}, \frac{x-\overline{x}}{2i}\right)$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par f.

Exercice 80 (★★★★☆) - Polynômes de Hilbert

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $P, Q \in E, \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} P(x)Q(x)dx$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est bien défini et qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx$ pour tout $m \geq 0$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, E_n = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n) \subseteq E$ et $\mathcal{H}_n = \mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$. Pour tout $k \geq 1$ on pose $H_k(X) = \frac{1}{k!}(X+1)\cdots(X+k)$ et $H_0 = 1$ (appelés polynômes de Hilbert).
   (a) Montrer que $\mathcal{H}_n^{\perp} \cap E_n$ est un sous-espace vectoriel de E_n de dimension 1.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $(b_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que

$$(X-1)\cdots(X-n) = \sum_{k=0}^{n} b_k H_k(X). \tag{1}$$

   (c) On pose $g(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} X^k$. Montrer que $\mathcal{H}_n^{\perp} \cap E_n = \mathrm{Vect}(g)$.
   (d) Montrer que $\langle g, g\rangle = ||g||_2^2 = n!(n+1)!$.
   (e) Calculer $d(1, \mathcal{H}_n)$.

Exercice 81 (★★★★☆) Matrice de Gram

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien [1] et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. On pose $\mathrm{Gram}(\mathcal{F}) = \left(\left\langle x_i, x_j\right\rangle\right)_{1\leq i,j\leq p} \in M_p(\mathbb{R})$, appelé *matrice de Gram* de la famille, et $G(\mathcal{F}) = \det(\mathrm{Gram}(\mathcal{F}))$ son *déterminant de Gram*.

1. (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est libre si, et seulement si $G(\mathcal{F}) \neq 0$.
   (b) **(Application)**. Montrer que si E contient des vecteurs $(e_1, \dots, e_{n+1})$ tous à même distance les uns des autres, i.e. $\forall i \neq j, \forall k \neq \ell, \left|\left|e_i - e_j\right|\right| = \left|\left|e_k - e_\ell\right|\right| \neq 0$ alors $\dim(E) \geq n$.
2. On suppose que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
   (a) Montrer que $\forall x \in E, d(x, \mathrm{Vect}(\mathcal{F}))^2 = \frac{\mathrm{G}(x,\mathcal{F})}{\mathrm{G}(\mathcal{F})}$.
   (b) **(Application)**. On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

   Calculer $d(X^2, \mathrm{Vect}(1, X))$.

Exercice 82 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Magistère 2023

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. On pose $u = s^* \circ s$.

1. Montrer que u est autoadjoint défini positif et que $\det(u) = 1$.
2. Pour $\lambda \in \mathrm{Sp}(u) \setminus \{1\}$, montrer que s réalise un isomorphisme entre $E_\lambda(u) \coloneqq \ker(u - \lambda\,\mathrm{id}_E)$ et $E_{\frac{1}{\lambda}}(u)$.
3. En déduire que le polynôme $P_u(X) = \det(u + X\,\mathrm{id}_E)$ vérifie $P_u(1) \geq 2^n$. Caractériser le cas d'égalité.

Exercice 83 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS

Soit n un entier impair. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- $M \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique.
- Pour toute matrice A antisymétrique $\det(A + M) = 0$.

1. On peut remplacer euclidien par préhilbertien si on veut.

Exercice 84 (★★★★★) - Groupe des isométries du tétraèdre

On considère $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit T un tétraèdre régulier, i.e. l'enveloppe convexe de 4 points A_1, A_2, A_3, A_4 tous à même distance deux à deux, on les appelle *sommets* du tétraèdre. On suppose que l'isobarycentre des A_i est $0 \in \mathbb{R}^3$. On considère $\mathrm{Isom}(T)$ l'ensemble des isométries préservant T, i.e.

$$\mathrm{Isom}(T) = \left\{ f \in O_3(\mathbb{R}) \mid f(T) = T \right\}.$$

On admet que 3 sommets quelconques forment toujours une base de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $A, B \in E$ distincts. Montrer que $\{M \in E, ||A-M|| = ||B-M||\} = \mathrm{Vect}(B-A)^\perp + \frac{1}{2}(A+B)$.
   (b) Montrer que les 4 sommets sont de même norme et qu'il s'agit des points de T de norme maximale.
2. Montrer que $\mathrm{Isom}(T)$ est un groupe.
3. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{Isom}(T)$ l'isométrie f induit une bijection de l'ensemble de S vers S avec $S = \left\{A_1, A_2, A_3, A_4\right\}$ l'ensemble des sommets.
4. On pose l'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & \mathrm{Isom}(T) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(S) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ & f & \longmapsto & f_{|S} \end{array}$$
   (a) Montrer que φ est un isomorphisme de groupes.
   (b) Montrer que $\forall f \in \mathrm{Isom}(T), \varepsilon(\varphi(f)) = \det(f)$ où ε est la signature d'une permutation.

Exercice 85 (★★★★★)

On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$. On pose

$$P_0 = (X^n(X-1)^n)^{(n)} = \frac{d^n}{dX^n}\left(X^n(X-1)^n\right).$$

1. Justifier que $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ puis montrer que $P_0 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^\perp$.
2. Calculer $d(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X])$.

Exercice 86 (★★★★★) - Sous-groupes finis de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$

On souhaite déterminer tous les sous-groupes finis de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ à isomorphisme près.

1. On considère $\mathbb{R}^n$ muni d'un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$. Soit G un sous-groupe fini de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. Montrer que l'application
$$\langle x, y\rangle_G := \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\langle gx, gy\rangle$$
   définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^n$. En déduire qu'il existe un morphisme de groupes injectif $\varphi : G \longrightarrow O_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que tous les sous-groupes finis de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ sont cycliques de cardinal $1, 2, 3, 4$ ou 6.

Exercice 87 (★★★★★)

L'exposant d'un groupe G est l'entier $\sup\left\{ \mathrm{ord}(g) \mid g \in G \right\} \in \mathbb{N}^* \cup \left\{\infty\right\}$. Soit G un sous-groupe de $O_n(\mathbb{R})$. Montrer que les trois propriétés suivantes sont équivalentes

- G est fini.
- G est d'exposant fini.
- $\left\{ \mathrm{Tr}(g) \mid g \in G \right\}$ est fini.

Indication : pour l'implication $\boxed{(3) \Rightarrow (1)}$ *on pourra poser une base* $(g_1, \ldots, g_r)$ *de* $\mathrm{Vect}(G)$ *et considérer le produit scalaire* $(A, B) \mapsto \mathrm{Tr}(A^T B)$ *sur cet espace.*

Groupes, anneaux et arithmétique

Exercice 88 (★☆☆☆☆)

Soit G un groupe et $g \in G$ d'ordre n.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ tel que $\varphi(1) = g$. Montrer alors que φ induit un isomorphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \langle g \rangle$.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe G d'ordre p est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 89 (★☆☆☆☆)

Soit A un anneau ayant pour seuls idéaux $\{0\}$ et A. Montrer que A est un corps.

Exercice 90 (★★☆☆☆)

Montrer qu'un anneau A fini intègre et commutatif est un corps.

Exercice 91 (★★☆☆☆)

Soit G un groupe et $g, h \in G$ des éléments d'ordres respectifs n et m tels que $gh = hg$.

1. On suppose que $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \left\{1_G\right\}$. Montrer que gh est d'ordre $\text{ppcm}(n, m)$.
2. Montrer que si $\text{pgcd}(n, m) = 1$ alors gh est d'ordre mn.

Exercice 92 (★★☆☆☆) Un corps à 9 éléments

On considère le groupe $K = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. On notera ses éléments $(a, b) = a + ib$ et on définit un produit sur K par

$$(a + ib) \times (c + id) = ac - bd + i(ad + bc).$$

On admet que $(K, +, \times)$ est un anneau.

1. Donner toutes les solutions $(a, b) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ de l'équation
$$a^2 + b^2 = 0.$$
2. Montrer que $(K, +, \times)$ est un corps.
Indication : On pourra calculer $(a + ib) \times \left(\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}\right)$ *pour* $a + ib \neq 0$.
3. Montrer que le groupe $(K^\times, \times)$ est cyclique.

Exercice 93 (★★☆☆☆)

Quel est le chiffre des unités de $2024^{2024} + 2023^{2023}$?

Exercice 94 (★★☆☆☆)

Soit A un sous-anneau d'un corps K tel que

$$\forall x \in K \setminus \{0\}, x \in A \text{ ou } x^{-1} \in A.$$

1. Montrer que $A = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \right\}$ vérifie cette propriété.
2. On pose I l'ensemble des éléments non inversibles de A. Montrer que I est un idéal de A.
3. Montrer que I est maximal pour l'inclusion parmi tous les idéaux.

Exercice 95 (★★☆☆☆)

Soit A un anneau intègre ayant un nombre fini d'idéaux. Montrer que A est un corps.

Exercice 96 (★★☆☆☆)

Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Montrer que A est principal.

Exercice 97 (★★★☆☆) - Théorème de Cauchy pour $p = 2$

Montrer qu'un groupe fini G d'ordre pair possède un élément d'ordre 2.

Exercice 98 (★★★☆☆)

Soit G un groupe tel que pour tout $x \in G$, $x^2 = e$ où e est l'élément neutre de G.

1. Montrer que G est commutatif. On adoptera désormais une notation additive pour la loi de G.
2. On suppose que G est fini. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\#G = 2^n$ (on pourra essayer de munir G d'une structure d'espace vectoriel bien choisie).
3. Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 4.

Exercice 99 (★★★☆☆)

Soit $n \geq 3$ un entier. On considère l'ensemble $\mu_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\}$ des racines n-ème de l'unité dans $\mathbb{C}$ que l'on identifie avec $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. On considère G l'ensemble des isométries f du plan telles que $f(\mu_n) \subseteq \mu_n$. On pose r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s la symétrie orthogonale d'axe (Ox).

1. Rappeler la classification des isométries du plan en fonction de leur déterminant.
2. Montrer que r et s sont des éléments de G et déterminer leur ordre.
3. Décrire srs en fonction de r. Le groupe G est-il commutatif ?
4. Montrer que toute rotation $r' \in G$ est un élément de $\langle r \rangle$, le sous-groupe de G engendré par r.
5. Montrer que G est engendré par s et r.
6. Montrer que tout élément $f \in G$ admet une unique écriture $f = s^\varepsilon r^k$ avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et $k \in \{0, \dots, n-1\}$.
7. En déduire que G est de cardinal $2n$.

(Le groupe G est un groupe très important dans l'étude des groupes finis, il s'appelle le groupe diédral d'ordre $2n$).

Exercice 100 (★★★☆☆) - Corps fini

Soit K un corps fini. On veut montrer que son cardinal est de la forme p^n avec p premier.

1. Montrer que pour tout anneau A il existe un unique morphisme d'anneaux
$$\gamma_A : \mathbb{Z} \longrightarrow A.$$
Son noyau est alors de la forme $\ker \gamma_A = m\mathbb{Z}$ pour $m \in \mathbb{N}$ et cet entier m est appelé *caractéristique* de A.
2. Justifier qu'un corps fini K est de caractéristique p un nombre premier.
3. Montrer qu'alors γ_K induit un morphisme d'anneaux injectif
$$\begin{array}{rccc} \widetilde{\gamma}_K : & \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & K \\ & \overline{k} & \longmapsto & \gamma_K(k). \end{array}$$
4. Conclure.

Exercice 101 (★★★☆☆)

1. Soit n, m deux entiers premiers entre eux et φ l'isomorphisme du théorème des restes défini par

$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ x &\longmapsto (x \mod n, x \mod m). \end{aligned}$$

   On considère $un + vm = 1$ une relation de Bézout. Montrer que

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} &\longrightarrow \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \\ (a, b) &\longmapsto vma + unb. \end{aligned}$$

   est bien définie et est l'inverse de φ.

2. Résoudre l'équation $x^2 + x + 5 = 0$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$.

Exercice 102 (★★★☆☆) - Radical de Jacobson

Soit A un anneau. On dit qu'un idéal $\mathfrak{m} \subseteq A$ est maximal s'il s'agit d'un idéal propre, i.e. $\mathfrak{m} \neq A$ et $\mathfrak{m}$ est maximal pour l'inclusion, i.e. pour tout idéal I tel que $\mathfrak{m} \subseteq I \subseteq A$ alors $I = \mathfrak{m}$ ou $I = A$.

On pose $J = \left\{x \in A \mid \forall a \in A, 1 + ax \in A^\times\right\}$. Montrer qu'il s'agit d'un idéal puis qu'il est égal à l'intersection de tous les idéaux maximaux de A.

On admettra le Lemme de Krull qui affirme que tout idéal $I \neq A$ est inclus dans un idéal maximal.

Exercice 103 (★★★☆☆)

Calculer $21^{19} \mod 25$.

Exercice 104 (★★★☆☆)

Expliciter les n derniers chiffres de l'écriture décimale de 9^{10^n} pour $n \geq 1$.

Exercice 105 (★★★★☆)

Soit G un groupe fini de cardinal n. On pose $Z(G)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres que l'on appelle le *centre* de G. Pour tout $x \in G, C(x) = \left\{yxy^{-1} \mid y \in G\right\}$ appelé *classe de conjugaison* de x dans G.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G et que $x \in Z(G) \Leftrightarrow C(x) = \{x\}$.
2. Montrer que la relation $x \sim y$ définie par $y \in C(x)$ est une relation d'équivalence.
3. On pose $x_1, \ldots, x_r$ des représentants des classes non-triviale, i.e. tels que $\#C(x_i) \geq 2$. Montrer que

$$\#G = \#Z(G) + \sum_{i=1}^{r} \#C(x_i).$$

4. On souhaite montrer que pour tout élément $x \in G, \#C(x) \mid \#G$. On fixe $x \in G$.
   (a) Soit A une partie quelconque de G. Montrer que A et xA ont même cardinal.
   (b) On pose

$$\begin{aligned} \varphi : \quad G &\longrightarrow C(x) \\ y &\longmapsto yxy^{-1}. \end{aligned}$$

   Montrer que pour tout $y \in G, \varphi^{-1}(yxy^{-1}) = y\varphi^{-1}(x)$.
   (c) En déduire que $\#C(x) \mid \#G$.
5. Montrer qu'un groupe d'ordre p^n n'a jamais un centre réduit à son élément neutre.

Exercice 106 (★★★★★) - Carré dans les corps finis

On considère K un corps qu'on suppose fini de cardinal q. On dit qu'un élément $y \in K$ est un carré lorsqu'il existe $x \in K$ tel que $y = x^2$. On pose $S_K = \left\{x^2 \mid x \in K^\times\right\}$ l'ensemble des carrés non nuls de K.

1. Montrer que l'application
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & K^\times & \longrightarrow & K^\times \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
est un morphisme de groupes.
2. On suppose que q est pair. Montrer que φ est injectif. En déduire que tous les éléments de K sont des carrés.
3. On suppose que q est impair.
   (a) Montrer que φ n'est pas injectif.
   (b) Justifier l'écriture $K^\times = \bigsqcup_{y \in S_K} \varphi^{-1}(\{y\})$. En déduire le cardinal de S_K.
   (c) Montrer que $x \in S_K \Leftrightarrow x^{\frac{q-1}{2}} = 1$.
   (d) Montrer que le produit de deux non carrés est un carré.

Exercice 107 (★★★★★) - Une réciprocité quadratique modulo p^2

Soit p un nombre premier impair.

1. Montrer que l'équation $x^2 - 1 = 0$ a pour seules solutions -1 et 1 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et que le polynôme $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$ a au plus $\dfrac{p-1}{2}$ racines dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. En déduire que l'équation $x^2 - 1 = 0$ a pour seules solutions -1 et 1 dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
3. Montrer que -1 est le carré d'un élément dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1 \mod 4$.

Exercice 108 (★★★★★) - Groupe dual - Inspiré d'un oral Centrale 2023

Soit G un groupe fini d'ordre N. On note $\widehat{G}$ le groupe des morphismes $G \to \mathbb{C}^*$ appelé *groupe dual* de G.

1. (a) Rappeler la définition de l'ordre d'un élément $g \in G$.
   (b) Que peut-on dire de l'ordre de $\phi(g)$ pour $g \in \mathrm{G}$ et $\phi \in \widehat{G}$?
   (c) Montrer que $\widehat{G}$ est fini. On note $\widehat{N}$ son cardinal.
2. (a) Montrer que pour tout $\phi \in \widehat{G} \setminus \{1\}$, $\sum_{g \in G} \phi(g) = 0$.
   (b) Montrer que $\widehat{G}$ est une famille libre de $\mathbb{C}^G$. En déduire que $\widehat{N} \leq N$.
3. On souhaite déterminer $\widehat{\mathfrak{S}_n}$. Soit $\phi \in \widehat{\mathfrak{S}_n}$.
   (a) Montrer que pour toute transposition τ, on a $\phi(\tau) \in \{-1, 1\}$.
   (b) Montrer que si $\phi((1\ 2)) = -1$ alors pour toute transposition τ, $\phi(\tau) = -1$.
   (c) En déduire que $\widehat{\mathfrak{S}_n} = \{1, \varepsilon\}$ où ε désigne la signature de $\mathfrak{S}_n$. A-t-on $\widehat{N} = N$ en général ?

Remarque : l'étudiant ayant rapporté cet exercice mentionne le fait qu'il y avait une autre question après la question 2.b mais ne se rappelait plus de l'énoncé de celle-ci. La question 3 a donc été ajoutée par moi, elle ne figurait pas dans l'énoncé original.

Exercice 109 (★★★★★) - Un théorème de Pòlya, inspiré d'un oral ENS Lyon 2018

Soit $k \geq 2$ un entier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n divise

$$\sum_{i=1}^{n} k^{\mathrm{pgcd}(i,n)}.$$

Dénombrabilité

Exercice 110 (★☆☆☆☆)

Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux sous-ensembles dénombrables. On pose

$$C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que C est dénombrable.

Exercice 111 (★★★★☆)

Soit G un groupe commutatif ayant un nombre au plus dénombrable de générateurs.

1. Montrer que G est dénombrable.
2. Est-ce toujours vrai si on enlève l'hypothèse de commutativité ?

Exercice 112 (★★☆☆☆)

Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$ en fonction du paramètre α.

Exercice 113 (★★☆☆☆)

Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux sous-ensembles dénombrables. On pose

$$C = \{P(a, b) \mid a \in A, b \in B, P \in \mathbb{Q}[X, Y]\}.$$

Montrer que C est dénombrable.

Exercice 114 (★★★☆☆)

Les espaces vectoriels suivants admettent-ils une base dénombrable ?

- $\mathbb{R}[X]$
- $\mathbb{R}(X)$

Exercice 115 (★★★★☆)

On considère $M_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme $||\cdot||$. On considère une famille $\left(B(M_j, r_j)\right)_{j\in J}$ de boules ouvertes de rayon strictement positif et toutes disjointes deux à deux.
Montrer que J est dénombrable.

Exercice 116 (★★★★☆)

Soit G un groupe commutatif ayant un nombre au plus dénombrable de générateurs.

1. Montrer que G est dénombrable.
2. Est-ce toujours vrai si on enlève l'hypothèse de commutativité ?

Exercice 117 (★★★★☆)

Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, n'est pas dénombrable.

Exercice 118 (★★★★★)

Soit F un ensemble, $E \subseteq F$ un sous-ensemble infini et $D \subseteq F$ un sous-ensemble dénombrable. Montrer qu'il existe une bijection

$$E \cup D \simeq E.$$

Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 119 (★☆☆☆☆)

Comparer les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ sur $C([0;1],\mathbb{R})$.

Exercice 120 (★☆☆☆☆)

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E,||\cdot||)$. Montrer que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Exercice 121 (★☆☆☆☆)

On considère $A=\begin{pmatrix}3 & 1\\ -1 & 5\end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

Indication : on pourra se servir de la décomposition $A=4I+N$ avec $N=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}$.

Exercice 122 (★☆☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f\in\mathcal{L}(E)$ une symétrie. Calculer $\exp(f)$ en fonction de f.

Exercice 123 (★☆☆☆☆)

Montrer que l'image d'une partie connexe par arcs par une application continue est connexe par arcs.

Exercice 124 (★☆☆☆☆)

1. Donner un exemple de partie étoilée non convexe.
2. Donner un exemple de partie connexe par arcs non étoilée.

Exercice 125 (★☆☆☆☆)

Soit X une partie d'un espace vectoriel normé. Montrer que la relation $\sim$ définie sur X par $x\sim y$ si et seulement s'il existe un chemin de X reliant x et y définit une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence de X pour cette relation sont appelées les *composantes connexes par arcs*.

Exercice 126 (★★☆☆☆)

On considère $E=\left\{(u_n)\in\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ \sum_{n\geq 0}u_n \text{ converge}\right\}$, i.e. l'ensemble des séries convergentes à valeurs réelles.

1. Soit $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$. Justifier que $||u||_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|u_n\right|$ et $||u||=\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k\leq n}u_k\right|$ définissent des normes sur E.
2. Comparer les deux normes définies dans la question précédente.

Exercice 127 (★★☆☆☆)

Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une application continue telle que $\forall x,y\in\mathbb{R}, f(x+y)=f(x)+f(y)$. Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire. Est-ce toujours vrai si on enlève l'hypothèse f continue ?

Exercice 128 (★★☆☆☆)

Soit $E=C^0([0;1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$. On considère $E'=\left\{f\in E, f(0)=f(1)=0 \text{ et } \int_0^1 f(t)dt=1\right\}$.

1. Montrer que E' est fermé dans E.
2. Montrer que $d(0_E,E')$ n'est pas atteinte.

Exercice 129 (★★☆☆☆)

Soient X, Y des parties d'espaces vectoriels normés de dimensions finies. On rappelle qu'un *homéomorphisme* $f : X \to Y$ est une application continue bijective et d'inverse continue.

Soit $f : X \to Y$ continue et bijective. On suppose que X est compact. Montrer que f est un homéomorphisme.

Exercice 130 (★★☆☆☆)

On dit qu'un point x d'une partie A de $\mathbb{R}^2$ est isolé s'il existe $r > 0$ tel que $B_f(x, r) \cap A = \{x\}$.

Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ dont tous les points sont isolés. Montrer que A est compact si et seulement si A est fini.

Exercice 131 (★★☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit $(K_i)_{i\in I}$ des parties compactes de E. Montrer que $\bigcap_{i\in I} K_i$ est une partie compacte de E.
2. On suppose que $I = \mathbb{N}$, que $K_{n+1} \subseteq K_n$ et que $\forall n, \exists r_n > 0, x_n \in E$ tel que $K_n \subseteq B_f(x_n, r_n)$ avec $r_n \longrightarrow 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n = \{x\}$.

Exercice 132 (★★☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie de dimension n et K une partie compacte de E. On pose

$$\mathrm{Conv}(K) = \left\{\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1}, (x_i) \in K^{n+1}, (\lambda_i) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1} \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1\right\}$$

appelé *enveloppe convexe* de K.

1. On pose $H = \left\{(\lambda_i) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1} \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1\right\}$. Montrer que H est un compact.
2. En déduire que $\mathrm{Conv}(K)$ est un convexe de E.

Exercice 133 (★★☆☆☆)

Soit A une algèbre unitaire sur $\mathbb{C}$. On suppose que A est munie d'une norme d'algèbre $||\ ||$, i.e. $\forall x, y \in A, ||xy|| \leq ||x||\,||y||$. On suppose qu'il existe $x \in A$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, x - \lambda \cdot 1_A$ inversible.

1. Justifier que l'application
$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{C} & \longrightarrow & A \\ & \lambda & \longmapsto & \frac{1}{x-\lambda 1_A} \end{array}$$
est continue.
2. Montrer que $||f(\mathbb{C})||$ est un compact.

Exercice 134 (★★☆☆☆)

Soit $(A, ||\cdot||)$ une algèbre normée de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Montrer que $A^\times$ est une partie ouverte de A.

Exercice 135 (★★☆☆☆)

Soit $E = C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel tel que $||f|| = \sup_{t\in[0;1]} |f(t)|$ est une norme sur F.

1. Donner un exemple de tel espace F de dimension infinie.
2. Montrer qu'alors l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & C([0,1],\mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f_{|_{[0,1]}} \end{array}$ est injective.
3. Donner un exemple de F tel que φ est surjective.

Exercice 136 (★★☆☆☆)

On dit qu'un point x d'une partie A de $\mathbb{R}^2$ est isolé s'il existe $r > 0$ tel que $B_f(x, r) \cap A = \{x\}$. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ dont tous les points sont isolés. Montrer que A est compact si et seulement si A est fini.

Exercice 137 (★★☆☆☆)

Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et H un hyperplan de E. Donner le nombre de composantes connexes par arcs de $E \setminus H$. On distinguera les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Exercice 138 (★★☆☆☆)

Soit $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ et

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & f(1). \end{array}$$

1. Déterminer si Φ est continue lorsque E est muni de $||\cdot||_\infty$. Si c'est le cas déterminer sa norme subordonnée.
2. Déterminer si Φ est continue lorsque E est muni de $||\cdot||_1$. Si c'est le cas déterminer sa norme subordonnée.

Exercice 139 (★★☆☆☆)

On considère la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & P'. \end{array}$$

1. Déterminer si Φ est continue lorsque $\mathbb{R}[X]$ est muni de $||\cdot||_\infty$ (le sup des valeurs absolues des coefficients). Même question pour $||\cdot||_1$ (la somme des valeurs absolues des coefficients). Si oui calculer sa norme subordonnée.
2. Montrer que l'application définie par

$$||P|| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right|.$$

est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. Est-ce que Φ est continue pour cette norme ? Si oui calculer sa norme subordonnée.

Exercice 140 (★★★☆☆)

Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$. Montrer que H est soit fermé soit dense dans E.

Exercice 141 (★★★☆☆)

Soit E un espace vectoriel normé et A et B deux parties de E. On dit que A et B sont homéomorphes si, et seulement s'il existe $f : A \to B$ continue bijective d'inverse continue.

1. Montrer que si $f : A \to B$ est un homéomorphisme alors pour tout $x \in A$, $f : A \setminus \{x\} \to B \setminus \{f(x)\}$ est bien définie et, est un homéomorphisme.
2. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
3. Montrer que S^1, le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $[0; 1]$.

On peut généraliser la question 2 à toute dimension : $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ si, et seulement si $n = m$. Il s'agit du théorème d'invariance du domaine (très difficile).

Exercice 142 (★★★☆☆)

On considère $E = \mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$, $\Phi \in E$ et

$$\begin{array}{rccc} T_\Phi : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \Phi(t) f(t)\, \mathrm{d}t\,. \end{array}$$

1. L'application T_Φ est-elle continue pour la norme $||\cdot||_\infty$? Pour $||\cdot||_1$? Pour $||\cdot||_2$?
2. Déterminer la norme subordonnée de T_Φ pour la norme $||\cdot||_1$.

Exercice 143 (★★★☆☆)

On dit qu'une partie X d'un espace vectoriel normé est *connexe* si les seules parties de X à la fois ouvertes et fermées dans X sont $\emptyset$ et X lui-même.

Montrer que si X est connexe par arcs alors X est connexe.

La réciproque est fausse. Par exemple l'adhérence de $\left\{ \sin\left(\frac{1}{x}\right) \mid x > 0 \right\}$ *est connexe par pas connexe par arcs.*

Exercice 144 (★★★☆☆)

Soit $n \geq 1$.

1. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs.
2. Montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ possède exactement deux composantes connexes par arcs.
   Cela reste vrai pour $n \geq 3$ mais c'est plus pénible à montrer.
3. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ est connexe par arcs.

Exercice 145 (★★★★☆) Inégalité de Hardy

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable. On pose $||f||_2 = \sqrt{\int_0^\infty f^2(t)dt}$. On pose F, la moyenne de f, définie par $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$. On veut montrer l'inégalité de Hardy :

$$||F||_2 \leq 2\,||f||_2\,.$$

1. Justifier qu'on a alors l'équation fonctionnelle
$$\forall x \in \mathbb{R}^+, xF'(x) = -F(x) + f(x).$$
2. On suppose dans un premier temps que f est positive.
   (a) Montrer que pour tout $X \geq 0$ on a
   $$\int_0^X F^2(x)dx = \int_0^X f(x)F(x)dx - \int_0^X xF'(x)F(x)dx.$$
   (b) Justifier que $\int_0^X f(x)F(x)dx \leq \sqrt{\int_0^X f(x)^2dx}\sqrt{\int_0^X F(x)^2dx}$.
   (c) Majorer $-\int_0^X xF'(x)F(x)dx$ en fonction de $\int_0^X F(x)^2dx$ à l'aide d'une intégration par partie.
   (d) Conclure que F est aussi de carré intégrable et en déduire l'inégalité de Hardy dans le cas f positive.
3. Traiter le cas général.

Exercice 146 (★★★★☆)

On considère $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et $||\cdot||_\infty$ la norme infinie sur E. Soit $g \in E$ fixée. On pose $N_g(f) = ||gf||_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme.
2. On suppose cette condition vérifiée. Donner alors une condition nécessaire et suffisante pour que N et $||\cdot||_\infty$ soient équivalentes.

Exercice 147 (★★★★☆)

Soit $(s_n) \in [0;1]^{\mathbb{N}}$ une suite injective et $\sum a_n$ une série convergente à termes > 0. On pose $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et $\forall f \in E, N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \left|f(s_n)\right| a_n$.

1. Montrer que N est bien définie et qu'il s'agit d'une semie-norme (i.e. l'application est homogène et sous-additive (inégalité triangulaire) mais l'axiome de séparation n'est pas forcément vérifié).
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (s_n) pour que N soit une norme.
3. On suppose cette condition vérifiée. Comparer alors N avec $||\cdot||_\infty$.

Exercice 148 (★★★★☆)

On pose $E = C^1([-1;1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$ et $n \geq 1$ un entier. On pose

- $A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_{-1}^{1} P(t)dt = 1 \right\}$
- $B = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_{-1}^{1} P(t)dt = 1 \text{ et } \forall t \in [-1;1], \left|P'(t)\right| \leq 1 \right\}$

1. Les parties A et B sont-elles fermées dans E ?
2. Les parties A et B sont-elles compactes dans E ?
3. Reprendre les deux questions précédentes en remplaçant $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$ dans les définitions de A et B.

Exercice 149 (★★★★☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On définit $\mathbb{C}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{C}[X]\}$ et $\mathbb{C}[A]^\times = \left\{P(A) \in C[A] \mid P(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\} = C[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $C[A]$ est un espace vectoriel de dimension finie d où d est le degré du polynôme minimal de A.
2. Montrer que l'exponentielle définit un morphisme de groupes

$$\begin{array}{rccc} \exp : & \mathbb{C}[A] & \longrightarrow & \mathbb{C}[A]^\times \\ & P(A) & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P(A)^n. \end{array}$$

Exercice 150 (★★★★☆)

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ et les applications définies pour tout $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ par

$$||P||_\infty = \sup_{x \in \left[0,\frac{1}{2}\right]} |P(x)| \text{ et } ||P|| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

1. Montrer qu'il s'agit de normes sur E.
2. Comparez-les.

Exercice 151 (★★★★☆)

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\left|\left|(x_1,\dots,x_n)\right|\right|_1 = \sum_{i=1}^{n} \left|x_i\right|$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée $|||A|||$ en identifiant une matrice A à l'endomorphisme induit par A

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

1. Soit $A = \left(a_{ij}\right) \in M_n(\mathbb{R})$. Exprimer $|||A|||$ en fonction des a_{ij} et donner une interprétation du résultat en terme des lignes ou des colonnes de A.
2. On pose

$$\begin{array}{rccc} T : & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & A & \longmapsto & {}^tA. \end{array}$$

   (a) Montrer que la norme subordonnée de T est inférieure ou égale à n.
   (b) Calculer la norme subordonnée de T.

Exercice 152 (★★★★☆)

Soit $n \geq 1$. On considère $N_n \subseteq \mathbb{R}_n[X]$ l'ensemble des polynômes n'ayant aucune racine réelle.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, N_{2n+1} est d'intérieur vide.
2. Déterminer l'intérieur de N_{2n} pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 153 (★★★★☆) - Théorème de l'application ouverte

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie. On dit qu'une application $f : E \to F$ est *ouverte* lorsqu'elle envoie des ouverts de E sur des ouverts de F. On veut démontrer le théorème de l'application ouverte qui s'énonce ainsi [2]

Théorème : Soit $f : E \longrightarrow F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Alors f est surjective si, et seulement si elle est ouverte.

1. Dans cette question on considère le cas particulier où $F \subseteq E$ et $\pi : E \to F$ est une projection.
   (a) Soit U un ouvert de E. Montrer que $\pi(U) = (U + \ker \pi) \cap F$.
   (b) En déduire que π est ouverte.
2. Prouver le sens direct du théorème de l'application ouverte.
3. Montrer le sens réciproque.

Exercice 154 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et K un compact non vide de E.

1. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant K.
2. Montrer que si $||\cdot||$ est issue d'un produit scalaire alors cette boule est unique (faire un dessin).

Exercice 155 (★★★★☆)

Soit $f : (E, ||\cdot||_E) \longrightarrow (F, ||\cdot||_F)$ une application linéaire entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

1. Montrer que f est continue en 0 si et seulement si
$$\exists C > 0, \forall x \in E, ||f(x)||_F \leq C\, ||x||_E$$
(i.e. f est lipschitzienne en 0).
2. Montrer que f est continue en 0 si et seulement si elle est continue en tout point de E.
3. On suppose que $E = F$ et on définit $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes continus de E et
$$|||f||| = \sup_{x \in E \setminus \{0\}} \frac{||f(x)||_E}{||x||_E}.$$
Montrer que $|||\cdot|||$ définit une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{L}_c(E)$.
4. Montrer que si E est de dimension finie toute application linéaire $f : E \to F$ est continue.

Exercice 156 (★★★★★) - Réciproque à l'équivalence des normes

Vous avez vu en cours qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes. L'objectif de cet exercice est de prouver la réciproque, i.e. si toutes les normes d'un espace vectoriel sont équivalentes alors ce dernier est de dimension finie.

Soit E un espace vectoriel dont toutes les normes sont équivalentes. On pose E^* son dual, i.e. l'ensemble des formes linéaires sur E. Soit $||\cdot||$ une norme définie sur E.

1. Soit $\ell \in E^*$, montrer que l'application définie par $||x||_\ell = ||x|| + |\ell(x)|$ est une norme sur E.
2. En déduire que toutes les formes linéaires sur E sont continues.
3. Conclure.
   Indication : On « admettra »que tout espace vectoriel admet une base.

2. Il existe une version de ce théorème pour les espaces dits *de Banach* qui sont potentiellement de dimension infinie mais l'étude de ces espace n'est plus au programme.

Exercice 157 (★★★★★)

On considère deux convexes compacts C et C' dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il contiennent chacun une boule ouverte centrée en 0. On veut montrer que leurs frontières ∂C et $\partial C'$ sont homéomorphes, i.e. qu'il existe une bijection continue d'inverse continue allant de l'une vers l'autre.
Il est vivement recommandé d'accompagner son raisonnement de dessins dans $\mathbb{R}^2$ pour y voir plus clair.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et on pose $[0x) = \{\lambda x \mid \lambda \geq 0\}$ la demie-droite vectorielle passant par x.
   (a) Montrer qu'il existe $y \in C$ tel que $[0x) \cap C = [0y]$.
   (b) Montrer que $[0x) \cap \overset{\circ}{C} \subseteq [0y[$. En déduire que $y \in \partial C$.
   (c) On veut montrer que $[0x) \cap \partial C = \{y\}$.
      i. Soit $r > 0$ tel que $\overset{\circ}{\mathbb{B}}(0, r) \subseteq C$ et $z \in [0y[$. Soit $b \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}\left(z, r\frac{||y-z||}{||y||}\right)$. Montrer que $a = y + \frac{||y||}{||y-z||}(b-y) \in \overset{\circ}{\mathbb{B}}(0, r)$.
      ii. En déduire que $\overset{\circ}{\mathbb{B}}\left(z, r\frac{||y-z||}{||y||}\right) \subseteq C$ puis que $[0x) \cap \partial C = \{y\}$. On note alors $y = \partial_C(x)$.
2. Montrer que l'application
$$\begin{aligned} f : \quad \partial C &\longrightarrow \partial C' \\ x &\longmapsto \partial_{C'}(x) \end{aligned}$$
est une bijection.
3. On suppose que $C' = \mathbb{B}^n(0, 1)$. Montrer que f est continue.
4. Montrer que f^{-1} est continue (on pourra montrer que la préimage par f^{-1} d'un fermé de ∂C est un fermé).
5. Conclure.

(On pourrait sans plus de difficulté montrer qu'en fait C et C' sont homéomorphes, i.e. que tous les compacts convexes contenant une boule ouverte d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont homéomorphes. Cela dit l'exercice est déjà bien assez long comme ça).

Exercice 158 (★★★★★) - Théorème de représentation de Riesz

On définit $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles (a_n) telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$. On munit alors $\ell^2(\mathbb{N})$ de la norme définie par $||a|| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2}$. Enfin, on pose $\ell^2(\mathbb{N})'$ l'ensemble des formes linéaires continues de $\ell^2(\mathbb{N})$ que l'on munit de la norme subordonnée.

1. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz
$$\forall a, b \in \ell^2(\mathbb{N}), \sum_{n\geq 0} a_n b_n \text{ converge et } \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n\right| \leq ||a||\,||b||\,.$$
2. Soit
$$\begin{aligned} \Phi : \quad \ell^2(\mathbb{N}) &\longrightarrow \ell^2(\mathbb{N})' \\ a &\longmapsto \left(\gamma_a : b \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n\right). \end{aligned}$$
Démontrer que Φ est un isomorphisme continu (il s'agit théorème de représentation de Riesz qui est souvent formulé uniquement en affirmant que l'application est surjective).

Suites et séries de fonctions

Exercice 159 (★☆☆☆☆)

La suite de fonctions (f_n) définie par $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + \frac{x^2}{n^2}}$ converge-t-elle simplement ? Uniformément ? Uniformément sur tout segment ?

Exercice 160 (★☆☆☆☆)

La suite de fonction

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{nx}{1+n^2x} \end{array}$$

converge-t-elle simplement ? Uniformément ?

Exercice 161 (★☆☆☆☆)

La suite de fonction

$$\begin{array}{rccc} f_n : &]1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{1}{\ln(nx)} \end{array}$$

converge-t-elle simplement ? Uniformément ?

Exercice 162 (★☆☆☆☆)

La suite de fonction

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{nx}{1+n^2x} \end{array}$$

converge-t-elle simplement ? Uniformément ?

Exercice 163 (★★☆☆☆)

La suite de fonction

$$\begin{array}{rccc} f_n : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sqrt{\dfrac{1}{n}+x^2} \end{array}$$

converge-t-elle simplement ? Uniformément ? La suite de ses dérivées converge-t-elle uniformément (sans calcul) ?

Exercice 164 (★★★☆☆)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(nx)dx.$$

Exercice 165 (★★★☆☆)

On considère la fonction

$$\begin{array}{rccc} f : &]1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie sur son ensemble de définition.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to1^+} f(x)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 et donner les variations de f. Étudier sa convexité.
4. Esquissez le graphe de f.

Exercice 166 (★★★☆☆)

Soit (a_n) une suite réelle croissante, à valeurs strictement positive et telle que $a_n \to +\infty$.
On considère

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-a_n t}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est intégrable et que
$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{a_n}.$$
3. Calculer $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Exercice 167 (★★★☆☆)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite de fonctions

$$\begin{array}{rccc} f_n: & \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & n^\alpha \cos(x)^n \sin(x) \end{array}$$

définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que (f_n) converge uniformément.

Exercice 168 (★★★☆☆)

On pose

$$\begin{array}{rccc} f: &]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right). \end{array}$$

Montrer que f est bien définie et donner un équivalent simple de f lorsque $x \to +\infty$.
On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

Exercice 169 (★★★★☆)

On pose

$$\begin{array}{rccc} f: &]-1, 1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe C^1.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire que
$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x\sin(x)}{1 - x\cos(x)}\right).$$

Exercice 170 (★★★★☆) - Méthode de Cavalieri

On considère $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente à termes positifs. On pose

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^{+} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \operatorname{Card}\left\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > t\right\}. \end{array}$$

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

Exercice 171 (★★★★☆)

Soit $b > 0$ et f_0 une fonction définie sur le segment $[0, b]$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, b], f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$.

1. Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} f_n$.
2. Montrer que la somme $S(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est solution d'un problème de Cauchy.
3. Calculer la somme lorsque $b = 1$ et f_0 est le prolongement par continuité de $x \mapsto x\ln(x)e^x$.

Exercice 172 (★★★★☆)

On pose

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et continue.
2. Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[\,, f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x}dt$. En déduire la valeur de la somme

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n+1}.$$

Exercice 173 (★★★★★)

On pose

$$\begin{array}{rccc} f: &]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right). \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer que $\forall x \in]-1,+\infty[\,, f'(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.
3. Trouver un équivalent simple de f en -1 et montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln(x)}{2}$.
   Indication : Pour l'équivalent en $+\infty$ on pourra commencer par faire une intégration par partie de l'expression de $f'(x)$ trouvée dans la question précédente.

Exercice 174 (★★★★★)

On pose

$$\begin{array}{rccc} f: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et continue.
2. Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[\,, f(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{1}{1+t^x}dt$. Montrer que

$$f(x) = 1 - \frac{\ln(2)}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. En déduire les valeurs des sommes
$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n+1} \text{ et } S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Exercice 175 (★☆☆☆☆)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \left(a_n + b_n\right) x^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min\left(R_1, R_2\right)$ avec égalité si $R_1 \neq R_2$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n b_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq R_1 R_2$.

Exercice 176 (★★☆☆☆)

Montrer à l'aide de la définition $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

Exercice 177 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un oral Magistère Rennes 2023

Soit $a \in]-1, 1[$.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$, montrer que la série $\sum \sin\left(a^n x\right)$ converge. On définit alors
$$f : x \longmapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \sin\left(a^n x\right).$$
2. Déterminer un développement en série entière de f au voisinage de 0 et préciser son rayon de convergence.

Exercice 178 (★★☆☆☆)

Déterminer les rayons de convergence des séries entières ci-dessous.

- $\sum_{n\geq 1} n^{(-1)^n} x^n$
- $\sum_{n\geq 1} \text{ppcm}(1, \ldots, n) x^n$
- $\sum_{n\geq 0} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n x^n$, on discutera en fonction de $a \in \mathbb{C}$.

Exercice 179 (★★★☆☆)

Soit $n \geq 1$ et $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$.

1. Après avoir justifié que I_n existe pour tout $n \geq 1$ montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.
2. À l'aide du changement de variable $u = t^n$ donner un équivalent de I_n en $+\infty$ (on ne cherchera pas à calculer $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$).
3. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} I_n z^n$.

Exercice 180 (★★★☆☆)

On considère la suite définie[3] par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1, u_{n+1} = 2u_n + 2^n$. On souhaite déterminer l'expression de u_n en fonction de n pour tout n. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0, u_n \leq 3^n$. En déduire que f est bien définie sur un intervalle non trivial $]-R; R[$.

3. Il s'agit d'une suite qui intervient dans des problèmes de répartition des carrés dans les corps finis.

2. À l'aide de la relation de récurrence montrer que

$$\forall -R < x < R, f(x) = \frac{x}{(1-2x)^2}.$$

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \geq 0$.

Exercice 181 (★★★☆☆)

On pose

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x > 0 & \longmapsto & \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \\ & x \leq 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe C^∞.
2. La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

Exercice 182 (★★★☆☆)

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = 2\ln(2) - 1.$$

Exercice 183 (★★★☆☆)

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

Exercice 184 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Magistère 2018

On considère la suite (a_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par

$$\begin{cases} a_0 = a_1 & = 1 \\ a_{n+1} & = a_n + \frac{2}{n+1} a_{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, 1 \leq a_n \leq n^2$.
2. Donner le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$. On note f la fonction associée.
3. Donner une équation différentielle d'ordre 1 vérifiée par f. Donner l'expression de f.

Exercice 185 (★★★★☆)

On pose $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de n éléments. Une involution de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation telle que $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$. On pose u_n le nombre d'involutions de $\mathfrak{S}_n$. On souhaite calculer u_n pour tout n. On pose $u_0 = 1$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1, u_{n+1} = u_n + n u_{n-1}$.
3. On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.
   (a) Montrer que le rayon de convergence R de f vérifie $R \geq 1$.

(b) Montrer que

$$\forall x \in]-R;R[, f'(x) = (1+x)f(x).$$

(c) En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.

(d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k!(n-2k)!2^k}$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

Exercice 186 (★★★★☆)

On pose $c_n = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$ et $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n x^n$.

Montrer que $f(x) = \frac{1}{2x}\left(1 - \sqrt{1-4x}\right)$ pour tout $x \in]-R, R[$ pour un R que l'on déterminera.

Exercice 187 (★★★★★) - Permutations et tangente

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est alternée lorsque $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \dots$. On note α_n le nombre de permutations alternées et, dans cet exercice, on s'intéresse à (T_n) définie par $\forall p \in \mathbb{N}, T_{2p} = 0$ et $T_{2p+1} = \alpha_{2p+1}$. On pose

$$T(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} T_{2p+1} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

1. Justifier que le rayon de convergence R de T satisfait $R \geq 1$.
2. Montrer que si σ est une permutation alternée de $\mathfrak{S}_{2p+1}$ alors $\sigma^{-1}(2p+1)$ est pair. Calculer T_1 et T_3.
3. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$,

$$T_{2p+1} = \sum_{q=0}^{p-1} \binom{2p}{2q+1} T_{2q+1} T_{2p-2q-1}.$$

   En déduire la valeur de T_5.
4. Montrer que T est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle

$$y' = y^2 + 1. \tag{2}$$

5. Résoudre l'équation (2) et en déduire l'expression de T sur $]-R, R[$.

Exercice 188 (★★★★★) - Nombres de Bell

On définit B_n, appelé *nombre de Bell*, le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Par convention, on pose $B_0 = 1$.

1. Calculer B_1, B_2 et B_3.
2. Montrer la *formule d'Aitken* :

$$\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

3. On pose $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$.
   (a) Montrer que B est bien définie sur $]-1, 1[$.
   (b) Montrer que $\forall x \in]-1, 1[, B(x) = e^{e^x - 1}$.
   (c) Montrer que pour $K \geq n, \forall k \in \mathbb{N}, \frac{(K+k)^n}{(K+k)!} \leq \frac{K^n}{j!K!}$.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $K \geq 2$ tel que $\frac{K^n}{K!} \leq 1$. Montrer la *formule de Dobiǹski* : $B_n = \left\lfloor \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{K} \frac{k^n}{k!} \right\rfloor + 1$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

Exercice 189 (★★★★★) - Partitions d'entiers à sommants bornés

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Une écriture $n = s_1 + \cdots + s_m$ avec $s_i \in \mathbb{N}^*$ s'appelle une *partition* de n et les entiers s_i des sommants. On définit $p_{n,m}$ le nombre de façon de partitionner n en au plus m sommants. Par convention on prendra $p_{0,m} = 1$. On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,m} x^n.$$

1. Montrer que le rayon de convergence de S est 1.
2. Montrer que $p_{n,m} = \#\left\{(\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m \mid \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + m\alpha_m = n\right\}$.
3. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[, S(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$.
4. On s'intéresse désormais au cas $m = 3$.
   (a) Compléter les coefficients manquants a, b, c et d dans la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ suivante
   $$\frac{1}{(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)} = \frac{a}{(1-x)^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{17}{72}\frac{1}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{cx+d}{1+x+x^2}.$$
   (b) En déduire que $p_{n,3}$ est l'entier le plus proche de $\dfrac{1}{12}(n+3)^2$ *(on distinguera les quatre cas n pair ou non et n multiple de* 3 *ou non).*

Exercice 190 (★★★★★) - Théorème de Molien

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $A = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et pour $k \in \mathbb{N}$, A_k le sous-espace de A constitué des polynômes homogènes de degré k. Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe fini. On définit les morphismes de groupes

$$\rho : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(A) \\ g & \longmapsto & (P \mapsto P(g^{-1}(X_1, \dots, X_n))) \end{array} \quad \text{et} \quad \rho^{(k)} : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(A_k) \\ g & \longmapsto & (P \mapsto P(g^{-1}(X_1, \dots, X_n))) \end{array}$$

où $g^{-1}(X_1, \dots, X_n) = g^{-1}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$. Enfin, on définit $A_k^G = \left\{P \in A_k \mid \forall g \in G, \rho(P) = P\right\}$ et $a_k = \dim(A_k^G)$. On veut montrer le théorème de Molien : pour tout x suffisamment petit on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(I_n - xg)}.$$

1. On pose $p = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho^{(k)}(g)$.
   (a) Montrer que p est un projecteur sur A_k^G.
   (b) En déduire la formule de Burnside :
   $$a_k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}\left(\rho^{(k)}(g)\right).$$
2. Soit $g \in G$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
   (a) Justifier qu'il existe un intervalle $]-r, r[$ que l'on précisera sur lequel
   $$\frac{1}{\det(I_n - xg)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n} \right) x^k.$$
   (b) Justifier que tout élément $g \in G$ est diagonalisable. En déduire que $\mathrm{Tr}(\rho^{(k)}(g^{-1})) = \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n}$.
3. Conclure.

Séries numériques

Exercice 191 (★☆☆☆☆)

Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{n}$.

Exercice 192 (★★☆☆☆)

Pour quels $a \in \mathbb{C}$ a-t-on la convergence de la série de terme général $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n - \frac{n-1}{n} e^a$?

Exercice 193 (★★☆☆☆)

Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\text{ppcm}(1,2,\ldots,n)}$

Exercice 194 (★★☆☆☆)

Étudier la série de terme général $u_n = \alpha^{\sqrt{n}}$ pour $\alpha > 0$ (on discutera en fonction de la valeur de α si c'est nécessaire).

Exercice 195 (★★☆☆☆)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$ avec $\alpha > 0$ (on discutera du résultat en fonction de la valeur de α si c'est nécessaire).

Exercice 196 (★★☆☆☆)

On pose $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - 1$. Après avoir justifié que $\lim u_n = 0$ étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 197 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un exemple d'oral CCINP 2025

On considère la série $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

1. Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a $\pi\sqrt{n^2+n+1} = n\pi + \frac{\pi}{2} + \alpha\frac{\pi}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ où α est un réel que l'on déterminera.
2. En déduire que $\sum_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$ converge.
3. Converge-t-elle absolument ?

Exercice 198 (★★★☆☆)

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $0 < u_0 < 1$ et $u_{n+1} = u_n \cdot (1 - u_n)$.

1. Montrer que (u_n) tend vers 0.
2. Donner un équivalent simple de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
3. La série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 199 (★★★★☆)

On considère $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une injection. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 200 (★★★★☆)

1. On considère une suite (u_n) à valeurs complexes. Montrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si la série $\sum u_{n+1}-u_n$ converge.
2. On considère la suite u_n définie par $u_1 = \sqrt{1}, u_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ et pour tout $n \geq 1, u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 201 (★★★★☆)

Justifier l'existence puis calculer

$$\int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{dx}\,.$$

(On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$*).*

Exercice 202 (★★★★★) - Inspiré d'un exemple d'oral Mines-Pont 2025

On considère la suite définie par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Déterminer un développement limité à deux termes de (u_n).

Exercice 203 (★★★★★)

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes sans racine entière. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geq 0} \ln\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|.$$

Exercice 204 (★★★★★)

On pose $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \ln\left(1+u_n\right)$. Étudier la convergence de la série de terme général (u_n).

Intégrales impropres et intégrales à paramètre

Exercice 205 (★☆☆☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$.

Exercice 206 (★☆☆☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\cos\left(t^\alpha\right)-1} dt$ en fonction du paramètre $\alpha > 0$.

Exercice 207 (★☆☆☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+t)} dt$

Exercice 208 (★★☆☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ puis la calculer.

Exercice 209 (★★☆☆☆)

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ bornée. Déterminer $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx$.

Exercice 210 (★★★☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) dt$.

Exercice 211 (★★★☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sin\left(t^2\right) dt$.

Exercice 212 (★★★☆☆)

Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}$$

puis la calculer (on admettra que $\displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Exercice 213 (★★★☆☆)

On considère

$$\begin{array}{rccc} f: & \left]0; \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & t & \longmapsto & \ln(\sin t). \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie et qu'elle est intégrable.
2. On pose $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ et $J = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$.
   (a) Montrer que $I = J$.
   (b) Calculer I (on pourra considérer $I + J$).

Exercice 214 (★★★☆☆)

Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2} e^{-t} \, \mathrm{dt}$$

1. Donner l'ensemble de définition de f et montrer qu'elle est paire.
2. Montrer que f est de classe C^2. Calculer f'' et en déduire l'expression de $f(x)$ pour tout x dans son ensemble de définition.

Exercice 215 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Magistère 2021

On considère pour $x \geq 0$ la fonction

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \left(\int_t^{+\infty} \frac{\cos(u)}{u} \, du \right) e^{-xt} \, dt.$$

Montrer que F est bien définie puis qu'elle est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

Exercice 216 (★★★★☆)

Justifier l'existence de $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t + 1} dt$ puis la calculer.

Exercice 217 (★★★★☆)

On pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt.$$

1. Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a
$$I_n = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}.$$
3. On pose $J_n = nI_n$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1}.
4. Calculer J_1. En déduire la valeur de J_n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
6. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.

Exercice 218 (★★★★☆) - Inspiré de CCINP 2023 (PSI)

On souhaite calculer $W_n = \displaystyle\int_0^{\pi} \sin^{2n}(t) \, \mathrm{dt}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{\pi} \cos(x\sin(t)) \, \mathrm{dt}\,. \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe C^2 et calculer f' et f''.
3. On pose $h(x,t) = \cos(t)\sin(x\sin(t))$. Justifier que pour tout x la fonction $h(x,\cdot)$ est dérivable et calculer $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$.
4. En déduire que f est solution de l'équation différentielle
$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{E}$$
5. On suppose qu'il existe une solution de E développable en série entière sur un voisinage de 0 qu'on écrit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrer qu'alors $a_1 = 0$ et que $\forall n \geq 2, a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2}$.
6. Montrer que f est développable en série entière sur un voisinage de 0 et exprimer ses coefficients en fonction de W_n.
7. En déduire que f est l'unique solution de E vérifiant $f(0) = \pi$.
8. En déduire l'expression de W_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 219 (★★★★☆)

On souhaite calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(t)}{t\left(1+t^2\right)} dt.$$

Pour cela on pose la fonction

$$\begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t\left(1+t^2\right)} dt. \end{array}$$

1. Vérifier que g est bien définie et montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) = \dfrac{\pi}{2} \cdot \dfrac{1}{x+1}$.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 220 (★★★★☆)

Étudier la fonction définie par

$$f : x \longmapsto \int_0^1 t^{tx} \,\mathrm{dt}$$

(domaine de définition, continuité, variations, allure du graphe).

Exercice 221 (★★★★☆)

On considère le sous-espace vectoriel[4] $E = \operatorname{Vect}(\sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \ldots, \sin(nx), \cos(nx))$ de l'espace des fonctions continues 2π-périodiques.

1. Calculer la dimension de E.
   Indication : on pourra montrer que la famille est orthogonale pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.
2. On pose

$$\begin{array}{rccc} \Phi: & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \left(x \mapsto e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}dt\right). \end{array}$$

   (a) Montrer que Φ est bien définie et qu'il s'agit d'un endomorphisme.
   (b) Étudier la diagonalisabilité de Φ.

Exercice 222 (★★★★☆)

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt, J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt, I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

1. Montrer que ces trois intégrales existent.
2. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n - I_n = 0$.
4. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} J_n = I$. En déduire la valeur de I.

4. Pour ne pas alourdir les notations on s'est permis d'omettre les $x \mapsto$ dans la définition des fonctions.

Exercice 223 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Magistère Rennes

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 \frac{1}{t^t} dt.$$

Exercice 224 (★★★★☆)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge et soient $a, b > 0$. Pour $x > 0$ on définit $F(x) = \int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ et $G(x) = \int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt$.

1. Montrer que $F = G$.
2. Montrer que pour tout fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et nulle en 0 on a $\lim_{x \to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t} dt = 0$.
3. En déduire que

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Exercice 225 (★★★★☆)

On souhaite calculer l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t^2+1} dt.$$

On pose $I(x) = \int_0^1 \frac{\ln(xt+1)}{t^2+1} dt$.

1. Montrer que $x \mapsto I(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'elle est de classe C^1.
2. Calculer $I(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Exercice 226 (★★★★☆)

Soit $a \geq 1$. Calculer l'intégrale $\int_0^{\pi} \ln(a^2 - 2a\cos(t) + 1) dt$.

Exercice 227 (★★★★★)

On veut déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (t+x) f(x-t) \, \mathrm{dt} \, .$$

Supposons qu'une telle solution f existe.

1. On pose $F(x) = \int_0^x f(u) \, \mathrm{du}$. Montrer que f est de classe C^1 et que F est solution du problème de Cauchy suivant

$$(S) : \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y'' - xy' - 2y = 0. \end{cases}$$

2. Déterminer la solution de ce système (on pourra la chercher sous la forme d'une série entière).
3. Conclure.

Exercice 228 (★★★★★)

On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt$.

1. Montrer que I est bien définie (que l'intégrale existe).
2. On pose $v_n = \displaystyle\int_0^n \ln(t)\left(1-\frac{t}{n}\right)^n dt$. Montrer que $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$.
3. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,(1-x)^n\,dx$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} = \dfrac{n+1}{n+2}u_n - \dfrac{1}{(n+2)^2}$.
   (b) En déduire que $u_n = \dfrac{-1}{n+1}\cdot\left(1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n+1}\right)$.
4. Montrer que $I = -\gamma$ où γ désigne la constante d'Euler, i.e.

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

Exercice 229 (★★★★★)

On souhaite calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t^2}dt.$$

On pose

$$\begin{aligned} f: \quad \mathbb{R}^+ &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)}dt. \end{aligned}$$

1. Montrer que f est bien définie et est de classe C^2.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 et en déduire l'expression de l'intégrale cherchée.
   (On admettra que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}dt = \frac{\pi}{2}$*).*

Probabilités

Exercice 230 (★☆☆☆☆)

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs $0 < p, q < 1$. On pose $Z = \max(X,Y)$ et $Z' = \min(X,Y)$. Donner les lois de Z et Z' puis dire si elles sont indépendantes.

Exercice 231 (★☆☆☆☆)

On considère un corps K ayant un nombre fini d'éléments q et X une variable de loi uniforme sur $K \setminus \{0\}$. On note $S_K = \left\{x^2 \in K \mid x \in K \setminus \{0\}\right\}$ l'ensemble des carrés non nuls.

Montrer que X^2 suit une loi uniforme sur S_K. En déduire que si $2 = 1_K + 1_K$ est non nul dans K on a $\#S_K = \frac{q-1}{2}$ et que si $2 = 0_K$ alors $S_K = K \setminus \{0\}$.

Exercice 232 (★☆☆☆☆)

On considère n variables aléatoires $B_1, \ldots, B_n$ indépendantes et suivant des lois de Bernoulli de même paramètre p. On pose $X = B_1 + \cdots + B_n$. Donner la loi de X et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 233 (★☆☆☆☆)

On appelle tribu des boréliens notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles ouverts. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est aussi engendrée par les intervalles fermés.

Exercice 234 (★☆☆☆☆)

Soient $X \sim B(n,p)$ et $Y \sim B(m,p)$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales. Déterminer la loi de $X+Y$.

Exercice 235 (★★☆☆☆)

Soit p un nombre premier. On munit $M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de la probabilité uniforme. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\right) = p^{\frac{-n(n+1)}{2}}\left(p^n-1\right)\left(p^{n-1}-1\right)\cdots(p-1).$$

Exercice 236 (★★☆☆☆)

On considère pour tout entier $n \geq 2$ des variables indépendantes $B_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n+1}\right)$ de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n+1}$. On considère X la variable aléatoire représentant le rang de la première réussite.

La variable X a-t-elle une espérance ? Si oui la calculer.

Exercice 237 (★★☆☆☆)

Soit $n \geq 1$ un entier, E un ensemble à $2n$ éléments et A et B une partition de E en deux ensembles de $m \leq n$ et $2n-m$ éléments respectivement. On considère Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $\Omega = \{F \in \mathcal{P}(E) \mid \#F = n\}$. À l'aide de la variable $X = \#A \cap Z$ déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{2n-m}{n-k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2.$$

Exercice 238 (★★☆☆☆) - Approximation d'une loi de Poisson par des binomiales

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) telle que X_n suit une loi binomiale de paramètre $B(n,p_n)$ avec $np_n \to \lambda \in \mathbb{R}$ et Y qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow \mathbb{P}(Y = k)$.

Exercice 239 (★★★☆☆)

On a n feuilles originales et n photocopies que l'on souhaite agrafer à leur originale. Malheureusement, on a tout mélangé et, puisqu'on a un travail terriblement ennuyeux, on décide de mettre le tout dans une boite et à chaque étape on tire deux feuilles au hasard dans la boite. Si ces deux feuilles sont une originale et sa copie on les agrafe et on continue. Sinon on replace les deux feuilles dans la boite et on recommence. On note T_n le nombre d'étape nécessaires pour vider la boite. Lorsqu'on remet des feuilles dans la boite on suppose le prochain tirage indépendant du précédent. On pose

— A_n :« les deux premières feuilles piochées ne sont pas agrafées ».

— $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Calculer a_n
2. On souhaite traiter le cas $n = 2$.
   (a) Comment appelle-t-on la loi de $T_2 - 1$?
   (b) Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a $\mathbb{P}(T_2 = k) = (1-a_2)a_2^{k-2}$.
3. Cas $n = 3$.

(a) Calculer $\mathbb{P}(T_3 = 2)$ et $\mathbb{P}(T_3 = 3)$.

(b) Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a

$$\mathbb{P}(T_3 = k+1) = (1-a_3)\mathbb{P}(T_2 = k) + a_3\mathbb{P}(T_3 = k).$$

(c) En déduire que pour tout

$$k \geq 2, \mathbb{P}(T_3 = k) = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_2^{k-2} - a_3^{k-2}\right).$$

4. Cas général.

(a) Montrer que $T_n = t_n + T_{n-1}$ où t_n suit une loi géométrique de paramètre $1 - a_n$.

(b) Calculer $\mathbb{E}[T_n]$ *(ne pas faire cette question si l'espérance d'une variable de loi géométrique n'a pas encore été vue en cours).*

Exercice 240 (★★★☆☆)

On considère N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuée, indépendantes entre elles, indépendante de N et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on notera $G_X(t)$ la fonction génératrice commune des variables X_i.

Théorème de la composition : On veut montrer qu'avec les notation ci-dessus les fonctions génératrices G_{S_N}, G_N et G_X vérifient

$$G_{S_N}(t) = G_N(G_X(t)).$$

1. Soit A un évènement d'un univers Ω. Montrer que l'indicatrice de A définie par

$$\begin{array}{rccl} \mathbb{1}_A : & \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$

suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

2. Justifier que $t^{S_N} = \sum_{n\geq 1} t^{S_n}\mathbb{1}_{\{N=n\}}$.

3. Conclure.

Applications : On vous propose un jeu. Vous disposez de deux pièces déséquilibrées de probabilités respectives de faire pile $0 < q < p < 1$. Le jeu se déroule ainsi :

- Choisissez une pièce et lancez-la jusqu'à tomber sur face. Notez alors le rang de l'obtention de la première face que vous appelez N.
- Vous effectuez ensuite N lancers avec l'autre pièce.
- Votre score final est le nombre de piles obtenus avec la seconde pièce.

Vous avez le choix de la pièce. Expliquez, en fonction de p et q comment choisir la première pièce pour maximiser votre score.

Exercice 241 (★★★☆☆)

1. Soit $a \geq 0$ et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante. Montrer que pour une variable aléatoire positive Z on a

$$\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[\varphi(Z)]}{\varphi(a)}.$$

2. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente telle que $\forall n \geq 0, u_n \geq 0$ et $\sum_{n\geq 0} n^2 u_n$ converge aussi. Montrer que

$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Exercice 242 (★★★☆☆)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère X_n une variable de loi géométrique de paramètre p_n avec $1 - p_n = \frac{1}{n}$. On pose $Y_n = \max(X_n, n)$.

1. Déterminer la fonction génératrice $G_{Y_n}(t)$ de Y_n.
2. Donner un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$ de $\mathbb{E}\left[Y_n\right]$.

Exercice 243 (★★★☆☆)

Soit $n \geq 1$ un entier, E un ensemble à $2n$ éléments et A et B une partition de E en deux ensembles de n éléments. On considère Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $\Omega = \{F \in \mathcal{P}(E) \mid \#F = n\}$. Déterminer la loi le $X = \max\{\#A \cap Z, \#B \cap Z\}$.

Exercice 244 (★★★☆☆) - Loi binomiale négative

On considère une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $0 < p < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. On pose X la variable aléatoire correspondant au rang à partir duquel on obtient n succès.

1. Déterminer la loi de X et l'expression de G_X, sa série génératrice. On note $X \sim \text{Bin}^-(n, p)$.
   Indication : on pourra commencer par rappeler le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^n}$
2. Déterminer l'espérance de X si elle existe.
3. On considère $Y \sim \text{Bin}^-(m, p)$ indépendante de X. Déterminer la loi de $X + Y$. Expliquer comment obtenir une loi binomiale négative à partir lois géométriques.

Exercice 245 (★★★☆☆)

1. Soit G un groupe fini. Déterminer les variables aléatoires X à valeurs dans G telles que pour toute variable aléatoire Y indépendante de X, la loi de $X \cdot Y$ est la même que celle de X.
2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de Rademacher (i.e. $\forall i, \mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \dfrac{1}{2}$). Pour $1 \leq k \leq n$ on pose
$$Y_k = \prod_{\ell=1}^{k} X_\ell.$$
   Montrer que $Y_1, \dots, Y_n$ sont des variables aléatoires i.i.d de Rademacher.

Exercice 246 (★★★★☆)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier et $p \in]0; 1[\setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$. Une particule se déplace sur un axe $[0, N]$ en partant d'un entier $n \in \{0, \dots, N\}$. À chaque instant elle saute d'une unité à droite avec probabilité p ou à gauche avec probabilité $q = 1 - p$. Lorsque la particule atteint 0 ou N elle y reste à jamais. On pose q_n (resp. p_n) la probabilité que la particule atteigne 0 (resp. N) en partant de n. Tous les déplacements sont supposés indépendants des précédents.

1. Donner q_0 et q_N puis montrer que pour tout $1 \leq n \leq N - 1$ on a
$$q_n = pq_{n+1} + qq_{n-1}.$$
2. En déduire l'expression de q_n en fonction de n.
3. Que vaut $p_n + q_n$?
4. Quelle est la probabilité pour que la particule ne s'arrête jamais lorsqu'elle part de n ?
5. On suppose que $p > \frac{1}{2}$ et N pair montrer qu'alors $q_{N/2} \to 0$ lorsque N devient grand.

Exercice 247 (★★★★☆) Dés truqués I

Une menuisière souhaite tailler deux dés à 6 faces numérotés de 1 à 6. Elle aimerait piper les dés de telle sorte que le résultat de la somme suive une loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$ (on ne demande pas que les dés soient pipés de la même façon). Dans cet exercice on veut déterminer si le projet de la menuisière est réalisable et, si c'est le cas, quelles sont les lois possibles pour chacun des dés. On notera X et Y les variables aléatoires représentant le résultat de chacun des dés.

1. Montrer qu'un polynôme de degré impair admet toujours une racine réelle.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $P_X \in \mathbb{R}_5[X]$ (resp. $P_Y \in \mathbb{R}_5[X]$) tels que le série génératrice de X (resp. de Y) vérifie
$$G_X(t) = tP_X(t) \text{ (resp. } G_Y(t) = tP_Y(t)).$$
3. On considère une variable aléatoire U qui suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{2, \dots, 12\}$. Montrer que la série génératrice de U vérifie
$$G_U(t) = \frac{t^2}{11} \cdot \frac{t^{11} - 1}{t - 1}.$$
4. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + t + t^2 + \cdots + t^{10} > 0$ (on pourra décrire les racines complexes du polynôme).
5. En déduire que le projet de la menuisière est irréalisable.
6. On suppose désormais que X représente un dé à 7 faces numéroté de 1 à 7 et que le dé Y est un dés standard à 6 faces non truqué.
   (a) Montrer qu'il est possible de truquer X de telle sorte que $X + Y$ suive une loi uniforme. Donner alors la loi de X.
   (b) Quelle forme aurait un tel « dé »?

Exercice 248 (★★★★☆)

On considère $m + 1$ personnes, numérotées de 0 à m, assises côte à côte. À l'instant 0 la personne numéro 0 commence à propager une rumeur. À chaque instant chaque personne au courant de la rumeur a une probabilité $0 < p < 1$ d'en informer son voisin. On note T le temps nécessaire pour que les m personnes soient au courant de la rumeur. Calculer l'espérance de T.

On pourra introduire les variables

$$t_i = \text{ Temps nécessaire pour que } i \text{ personnes soient au courant sachant que } i - 1 \text{ personnes sont au courant.}$$

On suppose ensuite que chaque personne au courant de la rumeur a une probabilité $0 < q < 1$ d'oublier la rumeur. Que vaut alors l'espérance de T ?

Exercice 249 (★★★★☆)

On considère un sac contenant N cordes. On choisit successivement deux extrémités libres que l'on noue entre elles jusqu'à ce qu'elles soient toutes nouées. Donner l'espérance du nombre de boucles et un équivalent de cette espérance lorsque $N \to +\infty$.

Exercice 250 (★★★★☆)

Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $\Omega = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que l'on considère comme un espace probabilisé avec la probabilité uniforme. Pour tout $d \in \mathbb{Z}$, $D_d = d\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, l'ensemble des classes des multiples de d modulo n.

1. Calculer $\mathbb{P}(D_d)$ pour tout $d \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que si $d_1, \dots, d_r$ sont premiers entre eux deux à deux alors $D_{d_1}, \dots, D_{d_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. On pose $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs premiers de n. Montrer que
$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$
où $\varphi(n)$ désigne l'indicatrice d'Euler de n.

Exercice 251 (★★★★☆)

Une espèce de petits mammifères nocturnes fait des petits jusqu'à la ménopause de la mère. Cette dernière a une probabilité q de ne plus pouvoir avoir de petits après un accouchement indépendamment de portées précédentes. La mère accouche systématiquement d'un seul petit qui est alors soit une femelle avec probabilité p ou un bien mâle. On suppose que toutes les fratries considérées sont complètes, i.e. la mère est ménopausée.

Montrer que le nombre moyen de sœur d'un mâle est égal au nombre moyen de sœur d'une femelle si, et seulement si

$$p^2(1-q) - p(q+2) + q + 1 = 0.$$

Quelle doit être alors la probabilité p de mettre au monde une femelle pour que les mâles et les femelles aient en moyenne le même nombre de sœur lorsque $q = \dfrac{1}{5}$?

Exercice 252 (★★★★★) Dés truqués II

Une menuisière souhaite réaliser deux dés équilibrés à 6 faces numérotés par des réels. Elle aimerait que le résultat de la somme de ces dés renumérotés suive la même loi que le résultat de la somme de deux dés équilibrés classiques. Dans cet exercice on veut déterminer si le projet de la menuisière est réalisable et, si c'est le cas, toutes les solutions possibles. On notera X et Y les variables aléatoires représentant le résultat de chacun des dés et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$ et $\beta_1 < \cdots < \beta_s$ avec $1 \leq s, r \leq 6$ les valeurs distinctes prises respectivement par X et Y.

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et $1 = n_1 < \cdots < n_r$ et $1 = m_1 < \cdots < m_s$ des entiers tels que
$$\forall i, \alpha_i = n_i + \gamma \text{ et } \forall j, \beta_j = m_j - \gamma.$$
En déduire qu'on peut se ramener au cas où les α_i et les β_j sont des entiers positifs.
2. Montrer que les séries génératrices G_X et G_Y de X et de Y vérifient
$$G_X(t)G_Y(t) = \frac{t^2}{36} \cdot \left(\frac{t^6-1}{t-1}\right)^2.$$
3. En déduire toutes les possibilités pour numéroter chacun des dés.
4. Y a-t-il d'autres possibilités si on n'impose plus que X et Y soient équilibrés ?

Exercice 253 (★★★★★) - Inspiré du Sujet A X-ENS 2024

On pose $n \geq 2$ et $\mathfrak{S}_n$, le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on pose $\varepsilon(\sigma)$ sa signature et $\nu(\sigma)$ son nombre de points fixes. Enfin, on appelle dérangement une permutation sans point fixe, on note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$ et on admet que $\#\mathfrak{D}_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$. On pose

$$M = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M. *Il est possible de le déterminer sans aucun calcul de déterminant. Observez bien la matrice avant de vous lancer dans des calculs laborieux.*
2. En déduire que
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X^{\nu(\sigma)} = (X-1)^{n-1}(X+n-1).$$
3. On pose $K_1 = \left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\right\}$ et $K_{-1} = \left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\right\}$. Montrer que
$$\#K_1 = \#K_{-1} + (-1)^n(n-1).$$
4. On considère $\left(\mathfrak{D}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{D}_n)\right)$ muni de la probabilité uniforme et Y_n définie sur cet espace probabilisé par $Y_n(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$. Montrer que
$$\left|\mathbb{P}(Y_n = 1) - \frac{1}{2}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2(n-1)!}.$$

Exercice 254 (★★★★★) - Nombre moyen de cycles

On considère $n \geq 1$ un entier et $\left(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n), \mathbb{P}\right)$ avec $\mathbb{P}$ la loi de probabilité uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. On pose $X : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire qui a une permutation σ donne son nombre de cycle dans sa décomposition en cycles à supports disjoints. On considérera que les points fixes sont des cycles de longueur 1. Par exemple $X(\mathrm{id}) = n$. On souhaite calculer l'espérance et la variance de X. Pour cela on pose $a_{n,k}$ le nombre de permutations admettant k cycles dans sa décomposition et $A_n(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} t^k$. On pose $a_{0,0} = 1$ et, pour $k \geq 1$, $a_{0,k} = 0$.

1. Montrer que, pour $1 \leq k \leq n$, on a
$$a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + (n-1)a_{n-1,k}.$$
Indication : on pourra séparer les cas des permutations ayant k cycles qui fixent n et les autres.
2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}$, $A_n(t) = (t+n-1)(t+n-2)\cdots(t+1)t$.
3. En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$ et donner un équivalent simple de ces quantités lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 255 (★★★★★) - Inspiré d'un oral ENS

Soit $n \geq 2$ un entier et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déterminer $\mathbb{P}(XY = 0)$.

Calcul différentiel et équations différentielles

Exercice 256 (★☆☆☆☆)

Calculer les dérivées partielles de
$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) \neq (0,0) & \longmapsto & \dfrac{\sin(xy)}{x^2+y^2} \\ & (0,0) & \longmapsto & 0 \end{array}$$
là où elles existent et déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ où elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 257 (★☆☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application différentiable. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Montrer qu'on a pour tout a de E on a $d(f \circ u)(a) = (df(u(a)) \circ u$

Exercice 258 (★☆☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application différentiable. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Montrer qu'on a pour tout a de E on a $d(u \circ f)(a) = u \circ df(a)$.

Exercice 259 (★☆☆☆☆)

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x,y) = xy + 1$. Déterminer les extrema de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.

Exercice 260 (★★☆☆☆)

On pose $\Delta = \left\{(0,y) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Calculer les dérivées partielles de
$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (0,y) & \longmapsto & 0 \\ & (x,y) \notin \Delta & \longmapsto & x \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right). \end{array}$$
là où elles existent et déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ où elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 261 (★★☆☆☆)

On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ & f & \longmapsto & f^2 \end{array}$$

Calculer la différentielle de Φ en un point $f \in \mathcal{L}(E)$ et étudier la continuité de sa différentielle.

Exercice 262 (★★☆☆☆)

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' &= y + z \\ y' &= x + z \\ z' &= x + y \end{cases}$$

Exercice 263 (★★☆☆☆)

Déterminer l'espace tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n.

Exercice 264 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un exemple d'oral CCINP 2025

On pose $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, $f(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f(0,0) = 0$.

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. La fonction f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 265 (★★★☆☆)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application différentiable entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie telle que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 266 (★★★☆☆)

On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}_{p-1}[X] \times \mathbb{R}_{q-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{p+q}[X] \\ & (P, Q) & \longmapsto & (X^p + P)(X^q + Q). \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa différentielle.
2. Montrer que $df(P,Q)$ est inversible si, et seulement si $X^p + P$ et $X^q + Q$ sont premiers entre eux.

Exercice 267 (★★★☆☆)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Étudier la différentiabilité de

$$\begin{array}{rccc} f : & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & p & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \sin(p(t))\,\mathrm{d}t\,. \end{array}$$

Est-elle de classe C^1 ?

Exercice 268 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \right\}$. Pour $f \in E$, on pose $n(f) = ||f||_\infty + \left|\left|f'\right|\right|_\infty$ et $N(f) = \left|\left|f + f'\right|\right|_\infty$.

1. Justifier que n et N sont des normes sur E.
2. Montrer que n et N sont équivalentes.

Exercice 269 (★★★☆☆) - Triangle d'aire maximale

On rappelle qu'un triangle de côtés de longueurs a, b et c et de demi-périmètre p est d'aire

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(il s'agit de la formule de Héron). Déterminer l'aire maximale d'un triangle de périmètre donné.

Exercice 270 (★★★☆☆)

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $\mathcal{C} : \ x^4 + y^4 = 1$.

1. Déterminer les points de la courbe $\mathcal{C}$ les plus éloignés et les plus proches de l'origine.
2. Déterminer le diamètre $\sup \{||X - Y|| \mid X, Y \in C\}$ de C.

Exercice 271 (★★★☆☆)

Déterminer l'espace tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \left\{ M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1 \right\}$ en I_n.

Exercice 272 (★★★☆☆)

Déterminer, s'ils existent, le minimum et le maximum de la fonction

$$\begin{array}{rccc} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & (x,y) & \longmapsto & (x-y)e^{-x^2-y^2}. \end{array}$$

Exercice 273 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Télécom 2024

On considère l'équation

$$(E) : \ \ln(x)y' + \frac{y}{x} = 1.$$

1. Résoudre (E) sur $]0,1[$ et sur $]1,+\infty[$.
2. Soit
$$\begin{array}{rccc} g : &]-1,+\infty[\setminus \{0\} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{x} \end{array}.$$
Montrer que g est prolongeable en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-1,+\infty[$.
3. Montrer que (E) possède une unique solution de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0,+\infty[$.

Exercice 274 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0 \right\}$. pour $f \in E$, on pose $N(f) = \left|\left|f + 2f' + f''\right|\right|_\infty$.

1. Justifier que N est une norme sur E.
2. Résoudre l'équation $f'' + 2f' + f = g$ en fonction de g d'inconnue $f \in E$.
3. Montrer que qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall f \in E, ||f||_\infty \leq aN(f)$.
4. Les normes $||\cdot||_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Exercice 275 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- A est antisymétrique.
- Pour toute solution X du système différentiel $X' = AX$ l'application $t \mapsto ||X(t)||$ est constante.

Exercice 276 (★★★★☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On considère l'application de changement de base

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & P & \longmapsto & P^{-1}AP. \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa différentielle.
2. On suppose que A est diagonalisable et on considère $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale et $X = f^{-1}(\{D\})$ la ligne de niveau correspondante. Calculer $\dim(T_P X)$.

Exercice 277 (★★★★☆) - Matrices de Bourdaud, inspiré d'un oral ENS 2025

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite de Bourdaud si ses valeurs propres apparaissent sur sa diagonale comptées avec même multiplicité. Dans tout l'exercice $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$.

1. Montrer qu'une matrice réelle est semblable à une matrice de Bourdaud si, et seulement si elle est trigonalisable.
2. Soit A symétrique réelle. On considère l'application

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & X & \longmapsto & \langle AX, X\rangle. \end{array}$$

   Montrer que la restriction de f à la sphère unité $\mathbb{S}(0,1)$ admet un maximum. On donnera une caractérisation du lieu où les maxima sont atteints en terme du spectre de A.
3. Quelles sont les matrices réelles symétriques de Bourdaud ?

Exercice 278 (★★★★☆)

On considère l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ on note A^+ sa comatrice.

1. Montrer que det est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles en $A \in M_n(\mathbb{R})$ en fonction de la comatrice de A. En déduire que
$$d\det(A) : H \longmapsto \mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{t}}(A^+)H\right).$$
2. Montrer que $\det(\exp H) = \exp(\mathrm{Tr}(H))$
3. Retrouver le résultat de la question 1 pour $A = I$, la matrice identité.
On pourra justifier la différentiabilité de exp *et utiliser la relation* $I + H = \exp(H)(I + o(H))$.
4. Retrouver le résultat de la question 1 dans le cas général.

Exercice 279 (★★★★★)

Soit E un espace euclidien. On considère ϕ et ψ des endomorphismes autoadjoints de E. On suppose que ϕ et ψ commutent entre eux. On pose

$$\begin{array}{rccc} f: & E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \langle \phi(x), x\rangle - \langle \psi(x), x\rangle. \end{array}$$

1. Montrer que ϕ et ψ sont diagonalisables dans une même base orthonormée.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f admette un extremum local. Lorsqu'il y a un extremum est-il toujours global ?

Exercice 280 (★★★★★)

On considère l'application f :

$$\begin{array}{rccc} f: & M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ & X & \longmapsto & {}^tXX \end{array}$$

1. Justifier que f est différentiable.
2. Calculer le rang de $df(A)$ en fonction du rang de A.

Exercice 281 (★★★★★) - Équations de Mathieu

On considère l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0 \tag{E}$$

avec $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, π-périodique et paire.

1. Expliquer pourquoi l'espace S des solutions de E définies sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2. On note dans la suite y_1, y_2 la base canonique de S définie par $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. On pose

$$\begin{array}{rccc} A: & S & \longrightarrow & S \\ & y & \longmapsto & (x \mapsto y(x+\pi)). \end{array}$$

   (a) Montrer que A définit un endomorphisme de S puis montrer que sa matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$

   (on identifiera A à sa matrice dans la base canonique).

   (b) Montrer que y_1 est paire, que y_2 est impaire et que $\det A = 1$ (on pourra utiliser le wronskien pour le calcul de $\det(A)$).

   (c) Montrer que $a = d$ (on pourra calculer A^{-1} puis au choix utiliser le théorème de Cayley-Hamilton ou utiliser l'expression de A^{-1} à l'aide de la comatrice de A).
3. On pose $T = 2a$ la trace de A et $\chi_A = X^2 - TX + 1$ son polynôme caractéristique. Montrer que
   - Si $|T| < 2$ alors toutes les solutions sont bornées.
   - Si $|T| = 2$ alors il existe des solutions bornées non-nulles.
   - Si $|T| > 2$ alors toutes les solutions non nulles ne sont pas bornées.

Exercice 282 (★★★★★) - Inspiré d'un oral inter-ENS 2023

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in C^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\sum_{j=0}^{k} f^{(j)}$ possède une limite finie ℓ en $+\infty$. Peut-on en déduire que f possède une limite finie en $+\infty$? On discutera selon la valeur de k.

Exercice 283 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $f \in C^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ telle que $f + f'' \geq 0$. Déterminer le signe de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$.

Exercice 284 (★★★★★)

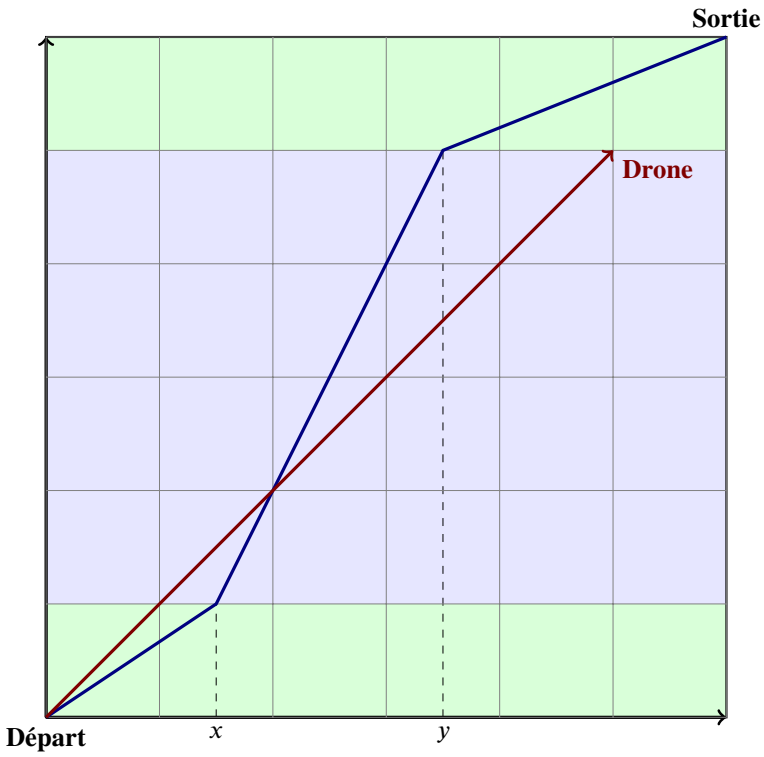
Quelle est l'aire maximale d'un triangle inscrit dans l'ellipse

$$\mathcal{E}: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

Indication : on pourra dans un premier temps se ramener au cas d'un cercle de rayon 1 *centré en l'origine avec un sommet du triangle en* $(1, 0)$.

Exercice 285 (★★★★★)

Une prisonnière prépare une évasion spectaculaire. Pour réussir à s'échapper de la prison de haute sécurité où elle est captive elle s'est procuré les codes de la porte de la cour. Lorsque l'occasion s'y prêtera elle devra traverser une cour carré de côté 6 en allant d'un sommet du carré à celui qui lui est opposé. La cour est traversée d'un court d'eau représenté par une bande de largeur 4, où sa vitesse v sera divisée par 2. Elle se déplacera en ligne droite dans chacun des milieux : terre ferme ou eau. Enfin, lorsqu'au point de départ elle débloquera la porte de sortie un drone partira du même point qu'elle, à 62% de sa vitesse v, et verrouillera la porte de sortie s'il y parvient avant elle.



1. Si la prisonnière se déplace en ligne droite en suivant la diagonale de la cour arrivera-t-elle avant le drone ?
2. On représente part une grille $[0,6]\times[0,6]$ avec le départ au point $(0,0)$. La prisonnière va en ligne droite jusqu'au point du court d'eau d'abscisse x puis sort du ruisseau au point d'abscisse y avant de courir jusqu'à la sortie. Déterminer $f(x,y)$ son temps de parcours en fonction de x, y et v.
3. Décrire la trajectoire optimale. Notre prisonnière a-t-elle une chance de s'évader ?
   Indication : si par le plus grand des hasard vous arriviez à un moment à une équation polynomiale de degré 4 *on pourra chercher une racine évidente pour des petites valeurs entières.*

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : `fabien.narbonne@posteo.net` **Site internet :** `https://fabiennarbonne.fr`