Exercices de MPSI

Fabien NARBONNE

27 juillet 2025

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ continue telle que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$. Montrer que f admet un minimum.

Exercice 2 (★☆☆☆☆)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ continue et admettant une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 3 (★☆☆☆☆)

Soit $f : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ continue. On suppose qu'il existe $x_0 \in [a, b]$ tel que $f(x_0) > 0$. Montrer que $\displaystyle\int_a^b f(x)dx > 0$.

Exercice 4 (★★★☆☆)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1, telle que $f(0) = 0$ et bornée. Montrer qu'il existe $M \in \mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq Mx$.

Exercice 5 (★★★☆☆)

Calculer

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^3}dt$$

(Indication : on pourra faire une décomposition en éléments simples).

Exercice 6 (★★★☆☆)

Soit (u_n) une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et ℓ sa limite. Montrer que

- $\ell \in \mathbb{Z}$
- (u_n) est constante égale à ℓ à partir d'un certain rang.

Exercice 7 (★★★☆☆)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 2$ par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}.$$

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$.
2. En déduire $\lim u_n$.

Exercice 8 (★☆☆☆☆)

Déterminer les limites suivantes

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{\cos(x)-1}$
2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{x+1}-\sqrt{x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^x-1}{\sin(x)}$

Exercice 9 (★★★★☆)

On définit la fonction f par

$$f: \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^x \end{array}$$

1. Montrer que f est prolongeable par continuité en 0. On continue d'appeler f le prolongement de f en 0.
2. Étudier la dérivabilité de f.
   Indication : on pourra poser $y = x\ln(x)$ pour étudier la limite du taux d'accroissement en 0.
3. Étudier f sur $\mathbb{R}^+$ (limites, variations, graphe).

Exercice 10 (★★★★☆)

On considère la suite positive (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \geq 0$,

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}.$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$v_{n+2} = \frac{1}{2}\left(v_{n+1} + v_n\right). \tag{1}$$
2. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, montrer que la suite $w_n = r^n$ vérifie la relation (1) si, et seulement si $r \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$.
3. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ la suite $a + \frac{b}{(-2)^n}$ est solution de (1).
4. Calculer a et b tels que $v_n = a + \frac{b}{(-2)^n}$ pour tout n.
5. En déduire la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

Exercice 11 (★★★★★)

On considère la fonction f définie sur $[0, 1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. On pose (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 & = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} & = f(u_n). \end{cases}$$

1. Montrer que f est strictement décroissante $[0; 1]$ et calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
3. On considère la suite définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
   (a) Calculer $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$.
   (b) Résoudre l'équation $\ell^2 = \ell + 1$. On note φ la solution positive que vous trouverez et ψ l'autre.

(c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\varphi^n - \psi^n\right).$$

4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$.
5. En déduire que $\lim u_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Exercice 12 (★★☆☆☆) - Décomposition en éléments simples ?

Soient $p_1, \dots, p_n$ des nombres premiers distincts. Montrer qu'il existe $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{Z}$ tels que

$$\frac{1}{p_1 \cdots p_n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{u_k}{p_k}.$$

Exercice 13 (★★★☆☆)

Déterminer le chiffre des unités de $2023^{2023} + 2024^{2024}$.

Exercice 14 (★☆☆☆☆)

Soient a, b deux nombres premiers entre eux.

1. Montrer a et $a + b$ sont premiers entre eux.
2. Montrer que $a + b$ et ab sont premiers entre eux.

Exercice 15 (★☆☆☆☆)

Montrer qu'une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en un point a est toujours dérivable en a.

Exercice 16 (★★☆☆☆) - Une fonction dérivable mais pas C^1

On fixe un entier $n \geq 1$ et on considère la fonction

$$\begin{array}{rrcl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x \neq 0 & \longmapsto & x^{n+1} \sin\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ & 0 & \longmapsto & 0. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.
3. Montrer que f possède un développement limité à l'ordre n en 0.
4. Pour quels $n \in \mathbb{N}$ peut-on affirmer qu'une fonction admettant un développement limité à l'ordre n en un point est nécessairement n fois dérivable en ce point ?

Exercice 17 (★☆☆☆☆)

On pose

$$f: \begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{x} \\ 0 & \longmapsto & 1. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-1,+\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-1,+\infty[$.
4. On pose

$$g: \begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-(x+1)\ln(x+1). \end{array}$$

   (a) Étudier les variations de g.
   (b) En déduire que g est négative sur son ensemble de définition.
5. Montrer que $\forall x \in]-1,+\infty[$, $f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
6. Calculer $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et déterminer les variations de f.
7. Tracer le graphe de f.

Exercice 18 (★★★☆☆)

On pose

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \longmapsto & \dfrac{x}{e^x-1} \\ 0 & \longmapsto & 1. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. On pose

$$g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x(x-1)+1 \end{array}$$

   (a) Étudier les variations de g.
   (b) En déduire que g est positive sur son ensemble de définition.
5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f'(x)$ est de signe opposé à celui de $g(x)$.
6. Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et déterminer les variations de f.
7. Tracer le graphe de f.

Exercice 19 (★★★☆☆)

On considère

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-2)e^{-\frac{1}{x}} \end{array}$$

1. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition.
   (b) Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f son prolongement en 0.
   (c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?
   (d) La fonction f est-elle de classe C^1 ?
2. Étudier les variations de f.
3. Montrer que $y = x - 3$ est une asymptote à f en $+\infty$ et donner la position de f par rapport à y au voisinage de $+\infty$.
   On pourra faire un développement limité de l'exponentielle.
4. Tracer le graphe de f.

Exercice 20 (★★★☆☆)

On considère la fonction $f(x) = x^x$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.
3. On considère $\widetilde{f}$ le prolongement par continuité de f en 0. Est-ce que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0 ?
4. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.
5. Calculer l'équation de la tangente à f en $x = 1$.
6. Tracer le graphe de f.

Exercice 21 (★★★☆☆)

On pose

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x > 0 & \longmapsto & x^{x^2} = x^{(x^2)} \\ 0 & \longmapsto & 1. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est de classe C^1 sur $\mathbb{R}^+$.
3. Déterminer la position de sa courbe par rapport à sa tangente en 0.
4. Est-ce que f est deux fois dérivable en 0 ?
5. Établir les variations de f et tracer son graphe.

Exercice 22 (★★★★☆)

Soit $f : [0, +\infty[$ une fonction convexe et croissante. Montrer que f est constante ou que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 23 (★★★★☆)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction convexe.

1. On suppose que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x) = 0$. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$.
2. Montrer que la somme d'une fonction convexe et d'une fonction affine reste convexe.
3. Montrer qu'une fonction convexe admettant une asymptote $y = ax + b$ en $+\infty$ est toujours au dessus de son asymptote.

Exercice 24 (★★☆☆☆)

En appliquant le théorème des accroissements finis montrer que la corde entre a et b d'une parabole a la même pente que la tangente en $\dfrac{a+b}{2}$.

Exercice 25 (★★★☆☆)

On considère $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : x \longmapsto x^n + ax + b$. Montrer que f a au plus trois racines.

Exercice 26 (★★★☆☆) - Rolle généralisé

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ dérivable à l'ordre n telle que f prend $n+1$ fois la même valeur sur $[a,b]$. Montrer qu'il existe $c \in]a,b[$ tel que $f^{(n)}(c) = 0$.

Exercice 27 (★★★☆☆)

On pose $g : x \mapsto x^{\frac{x+1}{x}}$. Grâce au théorème des accroissements finis calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x-1) - g(x)$.

Exercice 28 (★★★★☆)

On pose $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 telle que $f(-1) = f(1) = 0$.

1. Soit $-1 < \alpha < 1$. Montrer qu'il existe P de degré ≤ 2 tel que la fonction $g = f + P$ s'annule en $-1, \alpha$ et 1.
2. En déduire qu'il existe $c \in]-1,1[$ tel que $f(\alpha) = \dfrac{\alpha^2-1}{2} f''(c)$.
3. Montrer que
$$\sup_{x\in[-1,1]} |f(x)| \leq \frac{1}{2} \sup_{x\in[-1,1]} \left|f''(x)\right|.$$
4. En considérant $f(x) = 1 - x^2$ montrer que la constante $\dfrac{1}{2}$ de l'inégalité de la question précédente est optimale.

Exercice 29 (★★★★★)

On pose f de classe C^1 sur l'intervalle $[a,b]$ telle que $f'(a) = f'(b)$. On considère les fonctions F_a et F_b définie sur $[a,b]$ par :

$$F_a(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} & \text{si } x > a \\ f'(a) & \text{si } x = a \end{cases} \quad \text{et } F_b(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(b)}{x-b} & \text{si } x < b \\ f'(b) & \text{si } x = b \end{cases}$$

1. Montrer que F_a et F_b sont continues sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$.
2. Montrer que si $F_a(a) = F_a(b)$, il existe c dans $]a,b[$ tel que : $(*)$ $\quad f'(c) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$.
3. Dans cette question, on suppose que $F_a(a) \neq F_a(b) = F_b(a)$, et on pose : $h = F_a - F_b$.
   (a) Montrer que $h(a) \neq 0$ et que $h(a) = -h(b)$.
   (b) En déduire qu'il existe α dans $]a,b[$ tel que $\dfrac{f(\alpha)-f(a)}{\alpha-a} = \dfrac{f(\alpha)-f(b)}{\alpha-b}$.
   (c) En déduire que $F_a(\alpha) = F_b(\alpha)$ et qu'il existe c dans $]a,b[$ tel que : $(*)$ $\quad f'(c) = \dfrac{f(c)-f(a)}{c-a}$.
4. Donner une interprétation géométrique de la relation $(*)$.

Exercice 30 (★☆☆☆☆)

Calculer le déterminant

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & a & 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & a & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 & a & 0 \\ b & 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

Exercice 31 (★★☆☆☆)

Montrer qu'il n'existe pas de matrice antisymétrique inversible en dimension impaire.
Est-ce toujours le cas en dimension paire ?

Exercice 32 (★★☆☆☆)

Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension impaire. Montrer qu'il n'existe pas d'endomorphisme f de E tel que $f^2 = -\mathrm{id}_E$.
Est-ce toujours le cas en dimension paire ?

Exercice 33 (★★★☆☆)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $A \in M_n(\{-1, 1\})$. Montrer que $\det(A)$ est un entier divisible par 2^n.

Exercice 34 (★★☆☆☆)

Calculer le déterminant de l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & X^n P\left(\dfrac{1}{X}\right) \end{array}.$$

Exercice 35 (★★★☆☆)

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ montrer que $\det\left(\overline{A}\right) = \overline{\det(A)}$.
2. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ et $C = \left(\begin{array}{c|c} A & B \\ \hline -B & A \end{array}\right) \in M_{2n}(\mathbb{R})$. Montrer que $\det(C) \geq 0$.

   Indication : on pourra considérer $\left(\begin{array}{c|c} A & iB \\ \hline -iB & -A \end{array}\right)$.

Exercice 36 (★★☆☆☆)

Calculer le déterminant $n \times n$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Exercice 37 (★★★☆☆)

On considère l'endomorphisme

$$\Phi : \quad \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^T. \end{array}$$

1. Justifier qu'il s'agit d'une symétrie.
2. En écrivant la matrice de Φ dans une base bien choisie calculer $\mathrm{Tr}(\Phi)$ et $\det(\Phi)$.

Exercice 38 (★★★☆☆)

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

On veut calculer son déterminant de deux manières.

1. Calculer le déterminant avec des opérations sur les lignes et les colonnes.
2. (a) Déterminer une base de $\ker(A - I_n)$ et de $\ker(A - (n+1)I_n)$.
   (b) En considérant la matrice de A dans une base bien choisie calculer son déterminant.

Exercice 39 (★★★★★) - Déterminant de Vandermonde (classique)

Soient $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$. On définit le déterminant de Vandermonde de $(x_1, \dots, x_n)$ par

$$V_n\left(x_1, \dots, x_n\right) = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} \end{pmatrix} \tag{2}$$

On veut calculer le déterminant de $V_n(x_1, \dots, x_n)$ afin de trouver une condition nécessaire et suffisante pour l'inversibilité de $V_n(x_1, \dots, x_n)$.

1. (a) Calculer $\det(V_1(x_1))$, $\det(V_2(x_1, x_2))$ et $\det(V_3(x_1, x_2, x_3))$.
   (b) En déduire une condition nécessaire et suffisante pour que $V_3(x_1, x_2, x_3)$ soit inversible.
2. Fixons $x_0, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ deux à deux distincts.
   (a) Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}_{n+1}[X]$ tel que pour tout $x \in \mathbb{K}$,

   $$\det(V_{n+1}(x_1, \dots, x_n, x)) = P(x)$$

   où les coefficients de P ne dépendent que des x_i. On donnera le coefficient devant x^n de P.
   (b) Déterminer $P(x_i)$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.
   (c) En déduire la forme scindée de P.
   (d) Cette forme reste-t-elle vraie lorsque l'on ne suppose plus les x_i distincts deux à deux ?

3. Montrer que pour tout $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, on a :

$$\det(V_n(x_1, \dots, x_n)) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (x_j - x_i)$$

4. En déduire une condition nécessaire et suffisante sur les $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$ pour que $V_n(x_1, \dots, x_n)$ soit inversible.

Exercice 40 (★★★★★) - Inspiré de Math A ENS 2024

Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $E_n = \{1, \dots, n\}$ et on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note aussi $\nu(\sigma)$ son nombre de point fixes, i.e. $\nu(\sigma) = \text{Card}\left\{i \in E_n \mid \sigma(i) = i\right\}$. On considère

$$P(X) = \begin{vmatrix} X & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & X & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & X & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & X \end{vmatrix}.$$

1. Justifier que $P(X) \in \mathbb{R}_n[X]$ puis déterminer P sous forme scindée.
2. En déduire l'égalité

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X^{\nu(\sigma)} = (X + n - 1)(X - 1)^{n-1}.$$

3. Calculer les trois sommes suivantes :

$$\Sigma_1 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \qquad \Sigma_2 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\nu(\sigma) \qquad \Sigma_3 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma) + 1}.$$

4. On dit qu'une permutation σ n'ayant aucun point fixe est un *dérangement* et on note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que

$$\text{Card}\left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\right\} = \text{Card}\left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\right\} + (-1)^{n-1}(n-1)$$

Exercice 41 (★★★★★)

Soit E un ensemble et A et B deux parties de E. On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ X & \longmapsto & (X \cap A, X \cap B). \end{array}$$

1. Montrer que f est injective si, et seulement si $A \cup B = E$.
2. Montrer que f est surjective si, et seulement si $A \cap B = \emptyset$.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A et B pour que f soit bijective.

Exercice 42 (★★★☆☆)

Soit E un ensemble et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble de ses parties. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$. *Indication : on pourra raisonner par l'absurde en considérant $f : E \to \mathcal{P}(E)$ une surjection et introduire l'ensemble $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.*

Exercice 43 (★☆☆☆☆)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application telle que $\forall x \in \mathbb{R}, f(x + f(x)) = f(x)$. Montrer que f n'est pas injective.

Exercice 44 (★☆☆☆☆)

Montrer à l'aide d'un produit scalaire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\cos(x) + \sin(x)| \leq \sqrt{2}.$$

Que peut-on dire lorsqu'il y a égalité ?

Exercice 45 (★☆☆☆☆)

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Calculer la distance de X^2 à l'espace $F = \mathrm{Vect}(1, X)$.

Exercice 46 (★★☆☆☆)

On considère $E = \mathrm{Vect}(\cos, \sin)$ muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^{\frac{\pi}{4}} f(t)g(t)\,dt.$$

Calculer $d(\cos, \mathrm{Vect}(\sin))$.

Exercice 47 (★★★☆☆)

1. Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle$ un espace euclidien. On note $E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R})$ l'espace des formes linéaires. Montrer que l'application

$$\begin{array}{rcl} \Phi & : & E \longrightarrow E' \\ & & a \longmapsto (x \mapsto \langle a, x \rangle) \end{array}$$

   est un isomorphisme.
2. Justifier l'existence d'un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], P(0) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,dt.$$

3. Calculer explicitement le polynôme Q de la question précédente pour $n = 2$.

Exercice 48 (★★★☆☆)

Soient $f, g \in C^0([0,1], \mathbb{R})$ positives telles que $\forall x \in [0,1], f(x)g(x) \geq 1$.

1. Montrer que

$$\int_0^1 f(x)\,dx \cdot \int_0^1 g(x)\,dx \geq 1.$$

2. Que peut-on dire en cas d'égalité dans la question précédente ?

Exercice 49 (★★☆☆☆)

Soit $f \in C^1([a,b], \mathbb{R})$. Montrer qu'on a l'inégalité

$$\left(\int_a^b f(t)^2\,dt\right) \cdot \left(f'(t)^2\,dt\right) \geq \left(\frac{f(b)^2 - f(a)^2}{2}\right)^2$$

Exercice 50 (★★★☆☆)

Après avoir justifié son existence calculer

$$\min\left\{\int_0^{\pi}(e^x - a\cos(x) - b\sin(x))^2\ dx \mid a, b \in \mathbb{R}\right\}.$$

Exercice 51 (★★★★☆)

On considère $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni du produit scalaire défini par $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)dt$. On pose

$$P_0 = (X^n(X-1)^n)^{(n)} = \frac{d^n}{dX^n}\left(X^n(X-1)^n\right).$$

1. Justifier que $P_0 \in \mathbb{R}_n[X]$ puis montrer que $P_0 \in \mathbb{R}_{n-1}[X]^{\perp}$.
2. Calculer $d\left(X^n, \mathbb{R}_{n-1}[X]\right)$.

Exercice 52 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts PSI 2025

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $a_0, \dots, a_n$ des réels distincts deux à deux.

1. Montrer que $\langle P, Q\rangle = \sum\limits_{k=0}^{n} P(a_k)Q(a_k)$ définit un produit scalaire sur E.
2. Soient $\alpha_0, \dots, \alpha_n$ des réels non tous nuls et $H = \left\{P \in E \mid \sum\limits_{k=0}^{n}\alpha_k P(a_k) = 0\right\}$.
   (a) Justifier que H est un espace vectoriel et calculer sa dimension.
   (b) Soit $Q \in E$. Déterminer $d(Q, H)$.

Exercice 53 (★★★★★)

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien [1] et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. On pose $\mathrm{Gram}(\mathcal{F}) = \left(\left\langle x_i, x_j\right\rangle\right)_{1\le i,j\le p} \in M_p(\mathbb{R})$, appelé *matrice de Gram* de la famille, et $G(\mathcal{F}) = \det(\mathrm{Gram}(\mathcal{F}))$ son *déterminant de Gram*.

1. (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est libre si, et seulement si $G(\mathcal{F}) \neq 0$.
   (b) **(Application)**. Montrer que si E contient des vecteurs $(e_1, \dots, e_{n+1})$ tous à même distance les uns des autres, i.e. $\forall i \neq j, \forall k \neq \ell, \left|\left|e_i - e_j\right|\right| = \left|\left|e_k - e_\ell\right|\right| \neq 0$ alors $\dim(E) \geq n$.
2. On suppose que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
   (a) Montrer que $\forall x \in E, d(x, \mathrm{Vect}(\mathcal{F}))^2 = \frac{\mathrm{G}(x,\mathcal{F})}{\mathrm{G}(\mathcal{F})}$.
   (b) **(Application)**. On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{dt}.$$

   Calculer $d(X^2, \mathrm{Vect}(1, X))$.

1. On peut remplacer euclidien par préhilbertien si on veut.

Exercice 54 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS

Soit $n \geq 2$ un entier.

1. Montrer que l'application
$$\langle\ ,\ \rangle : \quad \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{R})^2 & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ (A, B) & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A^T B) \end{array}$$
est un produit scalaire.
2. Soit A et B deux matrices de $M_n(\mathbb{R})$. On considère l'application
$$\Phi : \quad \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A^T M)B - \mathrm{Tr}(B^T M)A. \end{array}$$
Calculer $\det(\Phi)$, $\mathrm{Tr}(\Phi)$ et $\mathrm{rg}(\Phi)$.

Exercice 55 (★★★★☆)

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $P, Q \in E, \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x} P(x)Q(x)dx$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est bien défini et qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx$ pour tout $m \geq 0$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}, E_n = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n) \subseteq E$ et $\mathcal{H}_n = \mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$. Pour tout $k \geq 1$ on pose $H_k(X) = \frac{1}{k!}(X+1)\cdots(X+k)$ et $H_0 = 1$ (appelés polynômes de Hilbert).
   (a) Montrer que $\mathcal{H}_n^\perp \cap E_n$ est un sous-espace vectoriel de E_n de dimension 1.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $(b_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que
$$(X-1)\cdots(X-n) = \sum_{k=0}^{n} b_k H_k(X). \tag{3}$$
   (c) On pose $g(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} X^k$. Montrer que $\mathcal{H}_n^\perp \cap E_n = \mathrm{Vect}(g)$.
   (d) Montrer que $\langle g, g\rangle = ||g||_2^2 = n!(n+1)!$.
   (e) Calculer $d(1, \mathcal{H}_n)$.

Exercice 56 (★☆☆☆☆)

Soient F, G, H trois sous-espaces vectoriels d'un espace E.

1. Montrer que $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$. A-t-on l'égalité ?
2. Montrer que $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$. A-t-on l'égalité ?
3. Montrer que $G \subset F \Rightarrow F \cap (G + H) = (F \cap G) + (F \cap H)$.

Exercice 57 (★☆☆☆☆)

On pose $E = \mathbb{R}^3$ et $F = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x - 2y + 3z = 0\right\}$. Montrer que F est un espace vectoriel et calculer sa dimension.

Exercice 58 (★☆☆☆☆)

On pose E de dimension finie. Montrer que

$$f \circ g \in \mathrm{GL}(E) \Leftrightarrow f \in \mathrm{GL}(E) \text{ et } g \in \mathrm{GL}(E).$$

Exercice 59 (★★☆☆☆)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier.

1. Soit $p \in \{0, \dots, n\}$. Calculer
$$\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} X^{n-k}(1-X)^k.$$
2. Montrer que la famille $(X^{n-k}(1-X)^k)_{k\in\{0,\dots,n\}}$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 60 (★★☆☆☆)

On considère $E = \mathbb{K}(X)$ l'espace des fractions rationnelles à coefficients dans $\mathbb{K}$. Montrer que la famille $\left(\dfrac{1}{X-a}\right)_{a\in\mathbb{K}}$ est libre dans E.

Exercice 61 (★★☆☆☆)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. On suppose qu'il existe $m \geq 2$ un entier tel que $u^m = u \underbrace{\circ \cdots \circ}_{m \text{ fois}} u = u$. Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{im} u^{m-1}$.

Exercice 62 (★★★☆☆)

On pose $E = \left\{P \in \mathbb{R}_5[X] \mid P(0) = P'(0) = P(i) = 0\right\}$.

1. Caractériser les polynômes $P \in \mathbb{R}_5[X]$ satisfaisant $P(i) = 0$.
2. En déduire une base de E.

Exercice 63 (★★★☆☆)

Soit $f : E \to F$ une application linéaire surjective. Montrer que f est la composée d'un isomorphisme avec une projection. *Indication : On pourra commencer par considérer un supplémentaire de* $\ker f$.

Exercice 64 (★★★★☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. On pose $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires de E. On considère $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E et on pose pour tout $1 \leq i \leq n, e_i^* \in E^*$ définie par $e_i^*(e_j) = \delta_{ij}$.

1. Justifier que la famille (e_i^*) est bien définie et qu'il s'agit d'une base de E^*.

2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a_0 < a_1 < \cdots < a_n$ des réels. Montrer que la famille (ev_i) définie par

$$\mathrm{ev}_i : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a_i) \end{array}$$

est une base de $\left(\mathbb{R}_n[X]\right)^*$.
Indication : on pourra penser à utiliser une base d'interpolation de Lagrange.

3. (Application) Montrer qu'il existe $\lambda_0, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$,

$$\int_0^1 P(x)dx = \lambda_0 P(a_0) + \cdots + \lambda_n P(a_n).$$

Exercice 65 (★★★★★)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice. On pose

$$f_A : \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ P = \sum_{k=0}^{m} a_k X^m & \longmapsto & P(A) := \sum_{k=0}^{m} a_k A^m \end{array}$$

1. Montrer que $\ker f_A \neq \{0\}$.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $\mu_A \in \mathbb{K}[X]$ unitaire tel que $\ker(f_A) = \langle \mu_A \rangle := \left\{\mu_A Q \mid Q \in \mathbb{K}[X]\right\}$.
3. On note $d = \deg \mu_A$. Montrer que $(I_n, A, \dots, A^{d-1})$ est une base de $\operatorname{im} f_A$.

Exercice 66 (★★★★★) - Inspiré d'un oral magistère 2022

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n. Soit $f_1, \dots, f_n$ des endomorphismes nilpotents de E qui commutent deux à deux. On veut montrer que $f_1 \circ \cdots \circ f_n = 0$.

1. Justifier qu'un endomorphisme nilpotent n'est jamais inversible.
2. Soit f un endomorphisme nilpotent et g un endomorphisme non nul qui commute avec f.
   (a) Montrer que $\operatorname{im} g$ est stable par f.
   (b) En déduire que $\mathrm{rg}(f \circ g) < \mathrm{rg}(g)$.
3. Conclure

Exercice 67 (★★★★★) - Inspiré d'un oral magistère 2018

Soit $N \in M_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices nilpotentes. On veut montrer que

$$\mathrm{Vect}(N) = \ker(\mathrm{Tr}).$$

1. Montrer qu'une matrice nilpotente est semblable à une matrice triangulaire stricte. En déduit que $\mathrm{Vect}(N) \subseteq \ker(\mathrm{Tr})$.
2. (a) Soit $\lambda_1 \neq \lambda_2$ déterminer $\alpha \neq 1$ tel que

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & * \\ * & * \end{pmatrix}.$$

   (b) Montrer par récurrence la propriété $H(n)$: « Toute matrice diagonale $n \times n$ de trace nulle est semblable à une matrice avec des coefficients diagonaux nuls » pour $n \geq 1$.
   (c) Conclure.

Exercice 68 (★☆☆☆☆) - Éléments nilpotent

Soit A un anneau. Un élément a est dit nilpotent s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $a^n = 0$.

1. Soient $x, y \in A$ tel que xy est nilpotent. Montrer que yx est aussi nilpotent.
2. Soient x, y deux éléments de A nilpotents qui commutent. Montrer que $x + y$ et xy sont aussi nilpotents. Est-ce toujours vrai si on enlève l'hypothèse de commutativité ?
3. Montrer que si x est nilpotent alors $1 - x$ est inversible et calculer son inverse en fonction de x.

Exercice 69 (★☆☆☆☆)

Montrer que l'application

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \\ n & \longmapsto & \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{array}$$

est un morphisme de groupes injectif.

Exercice 70 (★★☆☆☆)

Soit G un groupe. Pour $a \in G$ on définit

$$\varphi_a : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & axa^{-1}. \end{array}$$

1. Soit $a \in G$. Montrer que φ_a est un automorphisme de G, appelé *automorphisme intérieur*.
2. Montrer que $I(G) = \left\{\varphi_a \mid a \in \mathrm{G}\right\}$ est un sous-groupe de l'ensemble $\mathfrak{S}(G)$ des bijection de G dans lui-même.
3. Montrer que

$$\varphi : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & \mathfrak{S}(G) \\ a & \longmapsto & \varphi_a \end{array}$$

est un morphisme de groupes dont on précisera le noyau.

Exercice 71 (★★☆☆☆)

Soit G un groupe et $g, h \in G$ des éléments d'ordres respectifs n et m tels que $gh = hg$.

1. On suppose que $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \left\{1_G\right\}$. Montrer que gh est d'ordre $\mathrm{ppcm}(n, m)$.
2. Montrer que si $\mathrm{pgcd}(n, m) = 1$ alors gh est d'ordre mn.

Exercice 72 (★★☆☆☆)

On pose $A = \mathbb{Z}\left[i\sqrt{2}\right] = \left\{a + ib\sqrt{2} \mid a, b \in \mathbb{Z}\right\} \subset \mathbb{C}$.

1. Montrer que A est un anneau.
2. On pose, pour $\alpha = a + ib\sqrt{2} \in A$, $N(\alpha) = a^2 + 2b^2$. Montrer que $\alpha \in A^\times \Leftrightarrow N(\alpha) = 1$. En déduire $A^\times$.

Exercice 73 (★★★☆☆) - Théorème de Cauchy pour $p = 2$

Montrer qu'un groupe fini G d'ordre pair possède un élément d'ordre 2.
Indication : on pourra commencer par essayer d'écrire G comme une union d'ensemble de la forme $\left\{g, g^{-1}\right\}$.

Exercice 74 (★★★☆☆)

Soit K un corps fini de cardinal q impair.

1. Justifier que $-1 \neq 1$ puis résoudre l'équation $x^2 = 1$ dans K.
2. Calculer
$$\prod_{x \in K^\times} x.$$

Exercice 75 (★★★★☆) - Groupes d'exposant 2

On considère un groupe fini G tel que pour tout $x \in G, x^2 = e$.

1. Montrer que G est commutatif. On adopte désormais une notation additive pour la loi de G.
2. Montrer que le cardinal de G est une puissance de 2.
Indication : on pourra munir G d'une structure de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espace vectoriel.

Exercice 76 (★★★★★) - Carrés d'un corps fini

On considère K un corps fini de cardinal q. On pose $S_K = \left\{x^2 \mid x \in K^\times\right\}$ l'ensemble des carrés non-nuls de K.

1. Montrer que
$$\begin{array}{rccc} \varphi : & K^\times & \longrightarrow & K^\times \\ & x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
est un morphisme de groupes.
2. On suppose que q est pair. Montrer que φ est injectif puis que tous les éléments de K sont des carrés.
3. On suppose que q est impair.
   (a) Montrer que φ n'est pas injectif.
   (b) Justifier l'écriture $K^\times = \bigsqcup_{y \in S_K} \varphi^{-1}(\{y\})$. En déduire le cardinal de S_K.
   (c) Montrer que $x \in S_K \Leftrightarrow x^{\frac{q-1}{2}} = 1$.
   (d) Montrer que le produit de deux non carrés est un carré.

Exercice 77 (★★★★★)

Soit G un groupe fini de cardinal n. On pose $Z(G)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres et pour tout $x \in G, C(x) = \left\{yxy^{-1} \mid y \in G\right\}$ appelé classe de conjugaison de x.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G et que $x \in Z(G) \Leftrightarrow C(x) = \{x\}$.
2. Montrer que la relation $x \sim y$ définie par $y \in C(x)$ est une relation d'équivalence.
3. On pose $x_1, \dots, x_r$ des représentants des classes non-triviale, i.e. tels que $\#C(x_i) \geq 2$. Montrer que
$$\#G = \#Z(G) + \sum_{i=1}^{r} \#C(x_i).$$
4. On souhaite montrer que pour tout élément $x \in G, \#C(x) \mid \#G$. On fixe $x \in G$.
   (a) Soit A une partie quelconque de G. Montrer que A et xA ont même cardinal.

(b) On pose

$$\varphi : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & C(x) \\ y & \longmapsto & yxy^{-1}. \end{array}$$

Montrer que pour tout $y \in G, \varphi^{-1}(yxy^{-1}) = y\varphi^{-1}(x)$.

(c) En déduire que $\#C(x) \mid \#G$.

5. Montrer qu'un groupe d'ordre p^n n'a jamais un centre réduit à son élément neutre.

Exercice 78 (★★★★★) - Groupe dual - Inspiré d'un oral Centrale 2023

Soit G un groupe fini d'ordre N. On note $\widehat{G}$ le groupe des morphismes $G \to \mathbb{C}^*$ appelé *groupe dual* de G.

1. (a) Rappeler la définition de l'ordre d'un élément $g \in G$.
   (b) Que peut-on dire de l'ordre de $\phi(g)$ pour $g \in$ G et $\phi \in \widehat{G}$?
   (c) Montrer que $\widehat{G}$ est fini. On note $\widehat{N}$ son cardinal.
2. (a) Montrer que pour tout $\phi \in \widehat{G} \setminus \{1\}$, $\sum_{g \in G} \phi(g) = 0$.
   (b) Montrer que $\widehat{G}$ est une famille libre de $\mathbb{C}^G$. En déduire que $\widehat{N} \leq N$.
3. On souhaite déterminer $\widehat{\mathfrak{S}_n}$ pour $n \geq 2$. Soit $\phi \in \widehat{\mathfrak{S}_n}$.
   (a) Montrer que pour toute transposition τ, on a $\phi(\tau) \in \{-1, 1\}$.
   (b) Montrer que si $\phi((1\ 2)) = -1$ alors pour toute transposition $\tau, \phi(\tau) = -1$.
   (c) En déduire que $\widehat{\mathfrak{S}_n} = \{1, \varepsilon\}$ où ε désigne la signature de $\mathfrak{S}_n$. A-t-on $\widehat{N} = N$ en général ?

Exercice 79 (★☆☆☆☆)

On considère $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -1 & 2 & -3 \\ 2 & -4 & 6 \end{pmatrix}$. Déterminer le rang de A et une base du noyau.

Exercice 80 (★☆☆☆☆)

On considère $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que $A^2 = 5A - 4I$.
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^p par $X^2 - 5X + 4$.
3. Calculer A^p pour tout $p \geq 1$.

Exercice 81 (★☆☆☆☆)

On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} = 4I + N$ avec $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Calculer N^2 et en déduire A^p pour tout $p \geq 1$.

Exercice 82 (★★☆☆☆)

On considère $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer la dimension ainsi qu'une base de $\ker(A + I)$.
2. Même chose pour $\ker(A - 2I)$.
3. En déduire une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle A est diagonale.

Exercice 83 (★★★☆☆)

On considère

$$D : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ P & \longmapsto & XP'(X) + P(1). \end{array}.$$

1. Justifier que D est un endomorphisme.
2. Déterminer un polynôme unitaire U tel que $D(U) = 2U$.
3. Justifier que $\mathcal{B} = (U, X, 1)$ est une base de $\mathbb{R}_2[X]$ et donner la matrice A de D dans la base $\mathcal{B}$. Quel est le rang de D ?
4. Calculer A^n pour $n \geq 1$ (on pourra penser à faire les calculs par bloc).
5. Calculer $D^n(X^2 + X + 1)$.

Exercice 84 (★★★★☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ une matrice de rang 1.

1. On veut montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$ de deux façons différentes.
   (a) Montrer qu'il existe $X, Y \in M_{n,1}$ tels que $A = XY^T$. En déduire que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.
   (b) En utilisant une base de $\mathbb{R}^n$ adaptée à $\ker(A)$ montrer que $A^2 = \mathrm{Tr}(A)A$.
2. On suppose que $\mathrm{Tr}(A) = 0$. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle la matrice de A est de la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Indication : On pourra justifier l'existence d'un vecteur e_n tel que $Ae_n \neq 0$ et tel que $A^2 e_n = 0$.

Exercice 85 (★★★★☆)

On considère

$$\Phi : \begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^T. \end{array}.$$

1. Déterminer l'endomorphisme $\Phi^2 = \Phi \circ \Phi$.
2. De quel type d'endomorphisme s'agit-il ? Donner ses éléments caractéristiques.
3. Donner la matrice de Φ dans une base adaptée à la décomposition $\ker(\Phi - \mathrm{id}) \oplus \ker(\Phi + \mathrm{id})$.

Exercice 86 (★★★★★)

On considère E un espace vectoriel de dimension finie et

$$f : \begin{array}{rl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto u + \mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{id}_E \end{array}.$$

1. Montrer que $\forall u \in \mathcal{L}(E), f^2(u) = (n+2)f(u) - (n+1)u$.
2. Déterminer $\dim(\ker \mathrm{Tr})$ et montrer que $\ker \mathrm{Tr} \oplus \mathrm{Vect}(\mathrm{id}) = \mathcal{L}(E)$.
3. Donner la matrice de f dans une base adaptée à la décomposition $\ker \mathrm{Tr} \oplus \mathrm{Vect}(\mathrm{id})$.

Exercice 87 (★★★☆☆) - Inspiré de Mines-Ponts PSI 2025

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier et
$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$
Calculer les puissances successives de A.
2. Soit E un espace vectoriel de dimension n et $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $g^{n-1} \neq 0$ et $g^n = 0$. Montrer qu'il existe une base de E telle que la matrice de g dans cette base soit la matrice A de la question précédente.

Exercice 88 (★★★★☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension 8 et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\mathrm{rg}(f^2) = 4$. Déterminer les valeurs possibles de $\mathrm{rg}(f)$ et donner un exemple d'un tel f pour chacune de ces valeurs.

Exercice 89 (★★★★☆)

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ une matrice.

1. Montrer que $\mathbb{K}[A]$, l'ensemble des polynômes en A est un espace vectoriel.
2. En considérant l'application φ définie sur $\mathbb{K}[A]$ par $M \longmapsto AM$ justifier que A^{-1} est un polynôme en A.

Exercice 90 (★☆☆☆☆)

Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction polynomiale de degré impair. Montrer que f possède une racine réelle.

Exercice 91 (★☆☆☆☆)

Résoudre les systèmes suivants

1. $\begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha\beta &= -2 \end{cases}$

2. $\begin{cases} \alpha + \beta &= 1 \\ \alpha^2 + \beta^2 &= 5 \end{cases}$

Exercice 92 (★★☆☆☆)

Soit $a_0, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts. On pose

$$L_i = \prod_{j \neq i} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}$$

appelés polynômes d'interpolation de Lagrange de $(a_0, \dots, a_n)$.

1. Que vaut $L_i(a_k)$ pour $i, k \in \{0, \dots, n\}$?
2. Montrer que $(L_0, \dots, L_n)$ forme une base de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. On pose $a_0 = 0, a_1 = 1$ et $a_2 = -1$. Exprimer le polynôme $X^2 + X + 1$ dans la base (L_0, L_1, L_2).

Exercice 93 (★★☆☆☆)

Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ et dans $\mathbb{C}[X]$ les polynômes suivants :

- $(X^2 + X)^2 - (X + 1)^2$
- $X^4 + X^2 + 1$ (on pourra penser à une somme géométrique).
- $X^4 + 1$ (on pourra faire apparaître une identité remarquable).

En déduire les décompositions en éléments simples suivantes

$$\frac{X}{X^4 + X^2 + 1} \text{ dans } \mathbb{R}[X] \text{ puis dans } \mathbb{C}[X].$$

Exercice 94 (★★☆☆☆)

Soit $a \neq b \in \mathbb{K}$ et $P \in \mathbb{K}[X]$.

1. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ (cours).
2. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.
3. Déterminer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)^2$.

Exercice 95 (★★★☆☆)

Décomposer $\dfrac{1}{1 + X^3}$ en éléments simples dans $\mathbb{R}[X]$. En déduire la valeur de l'intégrale

$$\int_0^1 \frac{1}{1 + t^3} dt.$$

Exercice 96 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts 2021

- Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{C}) = \mathbb{C}$.
- Déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$.

Exercice 97 (★★★☆☆)

Soit $n \geq 1$. On considère le polynôme $P = \dfrac{d^n}{dX^n}\left((X^2-1)^n\right) = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$. Montrer que

$$\forall Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X], \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt = 0.$$

Exercice 98 (★★★★☆)

Déterminer la décomposition en éléments simples de

$$\frac{1}{(X-1)(X^2-1)(X^3-1)}.$$

Cette décomposition en éléments simples permet de déterminer le nombre de façons qu'un entier n a de s'écrire sous la forme d'une somme de trois entiers à savoir l'entier le plus proche de $\frac{1}{12}(n+3)^2$ *à l'aide des séries entières (programme L2) ou, plus simplement, des séries formelles (programme L3).*

Exercice 99 (★★★★☆) - Somme de carrés

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On veut montrer que

$$\exists A, B \in \mathbb{R}[X], P = A^2 + B^2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0.$$

1. Montrer le sens direct.
2. On suppose que $\forall x \in \mathbb{R}, P(x) \geq 0$.
   (a) Montrer que le coefficient dominant de P est positif et que toutes les racines réelles de P sont de multiplicité paire.
   (b) Montrer qu'il existe $C \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = \overline{C}C$.
   (c) Conclure.

Exercice 100 (★★★★☆)

Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{C}[X]$ qui laissent stable le cercle unité, i.e. tels que $\forall z \in \mathbb{C}, |z| = 1 \Rightarrow |P(z)| = 1$.

Exercice 101 (★★☆☆☆)

On considère $P(X) = X^3 - 8X^2 + 23X - 28$. Déterminer les racines de P sachant que la somme de deux de ses racines est égale à la troisième.

Exercice 102 (★★☆☆☆)

On considère $P(X) = X^3 - 2X^2 - 15X + 36$. Déterminer les racines de P sachant qu'il a une racine double.

Exercice 103 (★★★☆☆)

On considère $P(X) = X^4 + 5X^3 + 9X^2 + 8X + 4$. Factoriser P sachant qu'il a une racine double et une racine de module 1.

Exercice 104 (★★★☆☆)

On considère $P_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{X^k}{k!}$. Montrer que P a n racines complexes simples.

Exercice 105 (★★☆☆☆)

Donner une condition nécessaire et suffisante sur $n \in \mathbb{N}$ pour que $X^{2n} + X^n + 1$ soit divisible par $X^2 + X + 1$.

Exercice 106 (★☆☆☆☆)

On considère n variables aléatoires $B_1, \dots, B_n$ indépendantes et suivant des lois de Bernoulli de même paramètre p. On pose $X = B_1 + \cdots + B_n$. Donner la loi de X et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 107 (★☆☆☆☆)

Soient $X \sim B(n, p)$ et $Y \sim B(m, p)$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 108 (★☆☆☆☆)

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs $0 < p, q < 1$. On pose $Z = \max(X, Y)$ et $Z' = \min(X, Y)$. Donner les lois de Z et Z' puis dire si elles sont indépendantes.

Exercice 109 (★★★☆☆)

1. Soit G un groupe fini. Déterminer les variables aléatoires X à valeurs dans G telles que pour toute variable aléatoire Y indépendante de X, la loi de $X \cdot Y$ est la même que celle de X.
2. Soit $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires i.i.d. de Rademacher (i.e. $\forall i, \mathbb{P}(X_i = -1) = \mathbb{P}(X_i = 1) = \frac{1}{2}$). Pour $1 \leq k \leq n$ on pose

$$Y_k = \prod_{\ell=1}^{k} X_\ell.$$

   Montrer que $Y_1, \dots, Y_n$ sont des variables aléatoires i.i.d de Rademacher.

Exercice 110 (★★★☆☆)

Soit $n \geq 1$ un entier, E un ensemble à $2n$ éléments et A et B une partition de E en deux ensembles de $m \leq n$ et $2n - m$ éléments respectivement. On considère Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $\Omega = \{F \in \mathcal{P}(E) \mid \#F = n\}$. À l'aide de la variable $X = \#A \cap Z$ déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{2n-m}{n-k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Exercice 111 (★★★★☆)

On considère un sac contenant N cordes. On choisit successivement deux extrémités libres que l'on noue entre elles jusqu'à ce qu'elles soient toutes nouées. Donner l'espérance du nombre de boucles et un équivalent de cette espérance lorsque $N \to +\infty$.

Exercice 112 (★★★★★) - Nombre moyen de cycles

On considère $n \geq 1$ un entier et $\left(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n), \mathbb{P}\right)$ avec $\mathbb{P}$ la loi de probabilité uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. On pose $X : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire qui a une permutation σ donne son nombre de cycle dans sa décomposition en cycles à supports disjoints. On considérera que les points fixes sont des cycles de longueur 1. Par exemple $X(\mathrm{id}) = n$. On souhaite calculer l'espérance et la variance de X. Pour cela on pose $a_{n,k}$ le nombre de permutations admettant k cycles dans sa décomposition et $A_n(t) = \sum_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} t^k$. On pose $a_{0,0} = 1$ et, pour $k \geq 1$, $a_{0,k} = 0$.

1. Montrer que, pour $1 \leq k \leq n$, on a
$$a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + (n-1)a_{n-1,k}.$$
Indication : on pourra séparer les cas des permutations ayant k cycles qui fixent n et les autres.
2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, A_n(t) = (t+n-1)(t+n-2)\cdots(t+1)t$.
3. En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$ et donner un équivalent simple de ces quantités lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 113 (★☆☆☆☆)

Étudier la convergence des séries de terme général suivant

- $u_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) - \frac{1}{n}$.
- $v_n = \ln\left(1 + \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
- $w_n = \dfrac{1}{\mathrm{ppcm}(1, 2, \ldots, n)}$

Exercice 114 (★★☆☆☆)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$ avec $\alpha > 0$ (on discutera du résultat en fonction de la valeur de α si c'est nécessaire).

Exercice 115 (★★☆☆☆)

Pour quels $a \in \mathbb{C}$ a-t-on la convergence de la série de terme général $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n - \frac{n-1}{n} e^a$?

Exercice 116 (★★☆☆☆)

Étudier la série de terme général $u_n = \alpha^{\sqrt{n}}$ pour $\alpha > 0$ (on discutera en fonction de la valeur de α si c'est nécessaire).

Exercice 117 (★★★☆☆)

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $0 < u_0 < 1$ et $u_{n+1} = u_n \cdot (1 - u_n)$.

1. Montrer que (u_n) tend vers 0.
2. Donner un équivalent simple de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
3. La série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 118 (★★★★☆)

On considère $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une injection. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 119 (★★★★☆)

1. On considère une suite (u_n) à valeurs complexes. Montrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.
2. On considère la suite u_n définie par $u_1 = \sqrt{1}, u_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ et pour tout $n \geq 1, u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 120 (★★★★★)

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes sans racine entière. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geq 0} \ln\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|.$$

Exercice 121 (★★★★★)

On pose $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \ln\left(1+u_n\right)$. Étudier la convergence de la série de terme général (u_n).

Exercice 122 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral MP Mines-Télécom 2023

Étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geq 1} \cos\left(\pi\sqrt{n^2+n+1}\right)$.

Exercice 123 (★★★★★) - Inspiré d'un exemple d'oral MP Mines-Ponts 2025

On considère la suite définie par $u_0 \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right]$ et

$$u_{n+1} = \sin(u_n).$$

Déterminer un équivalent de (u_n).

Exercice 124 (★★★★★) - Inspiré d'un oral X-ENS

Déterminer la nature de la série $\sum_{n\geq 0} \sin\left(\pi(2+\sqrt{3})^n\right)$.

Indication : on pourra faire intervenir la quantité $a_n = \left(2+\sqrt{3}\right)^n + \left(2-\sqrt{3}\right)^n$.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur ce cours n'hésitez pas à me le faire savoir

Contact professeur

Téléphone/WhatApp : +33 7 82 86 97 71

Mail : `fabien.narbonne@posteo.net`

Site internet : `https://fabiennarbonne.fr`