Oraux ENS

Exercice 1 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS 2021

Soit A, B deux matrices non colinéaires dans $M_n(\mathbb{R})$. Étudier la diagonalisabilité de

$$f : \begin{array}{ccl} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \operatorname{Tr}(B^T M)A - \operatorname{Tr}(A^T M)B. \end{array}$$

Exercice 2 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Magistère 2025 et d'un oral ENS Ulm 2012

Soit $p \geq 3$ un nombre premier. On note $\mathbb{F}_p = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et, pour un anneau R, $\mathrm{GL}_n(R)$ le groupe des matrices inversibles à coefficients dans R dont l'inverse est également à coefficients dans R et $\mathrm{SL}_n(R)$ le sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(R)$ formé des éléments de déterminant 1.

1. Soit $B \in M_n(\mathbb{Z})$ diagonalisable dans $\mathbb{C}$ dont toutes les valeurs propres sont de module strictement inférieur à 1. Montrer que B est nulle.
2. On considère l'application de réduction modulo p.

$$\pi : \begin{array}{ccl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n\left(\mathbb{F}_p\right) \\ A = (a_{ij}) & \longmapsto & \overline{A} = (a_{ij} \mod p). \end{array}$$

   Montrer qu'il s'agit d'un morphisme de groupes dont la restriction à tout sous-groupe fini est injective *(il s'agit du Lemme de Serre)*.
3. Montrer que tout sous-groupe fini de $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ est de cardinal inférieur à 24. Le groupe $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ possède-t-il un élément d'ordre 24 ?
   Il s'agit d'une borne très large ; on peut en fait montrer que $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ *ne possède que des sous-groupes finis d'ordre* $1, 2, 3, 4$ *et* 6. *N'hésitez pas à me contacter pour que je vous communique d'exercice dans lequel on le prouve.*

Exercice 3 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS

Soit n un entier impair. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes

- $M \in M_n(\mathbb{R})$ est antisymétrique.
- Pour toute matrice A antisymétrique $\det(A + M) = 0$.

Exercice 4 (★★★★★) - Un théorème de Pòlya, inspiré d'un oral ENS Lyon 2018

Soit $k \geq 2$ un entier. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, n divise

$$\sum_{i=1}^{n} k^{\operatorname{pgcd}(i,n)}.$$

Exercice 5 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et K un compact non vide de E.

1. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant K.
2. Montrer que si $||\cdot||$ est issue d'un produit scalaire alors cette boule est unique (faire un dessin).

Exercice 6 (★★★★★) - Inspiré d'un oral ENS

Soit $n \geq 2$ un entier et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déterminer $\mathbb{P}(XY = 0)$.

Exercice 7 (★★★★☆) - Matrices de Bourdaud, inspiré d'un oral ENS 2025

Une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ est dite de Bourdaud si ses valeurs propres apparaissent sur sa diagonale comptées avec même multiplicité. Dans tout l'exercice $\mathbb{R}^n$ est muni de son produit scalaire canonique noté $\langle\ ,\ \rangle$.

1. Montrer qu'une matrice réelle est semblable à une matrice de Bourdaud si, et seulement si elle est trigonalisable.
2. Soit A symétrique réelle. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ X & \longmapsto & \langle AX, X \rangle . \end{array}$$

   Montrer que la restriction de f à la sphère unité $\mathbb{S}(0,1)$ admet un maximum. On donnera une caractérisation du lieu où les maxima sont atteints en terme du spectre de A.
3. Quelles sont les matrices réelles symétriques de Bourdaud ?

Exercice 8 (★★★★★) - Inspiré d'un oral inter-ENS 2023

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R},\mathbb{R})$ telle que $\sum_{j=0}^{k} f^{(j)}$ possède une limite finie ℓ en $+\infty$. Peut-on en déduire que f possède une limite finie en $+\infty$? On discutera selon la valeur de k.