TD 2

Fonctions

Énoncé des exercices

Trigonométrie

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

Comment couper un gâteau circulaire en 6 parts égales ?

Exercice 2 (★☆☆☆☆)

Pour chacune des valeurs suivantes placer l'angle correspondant sur le cercle trigonométrique et déterminer la valeur demandée.

1. $\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)$
2. $\cos(3\pi)$
3. $\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)$.
4. $\sin\left(\frac{7\pi}{4}\right)$
5. $\cos\left(\frac{8\pi}{3}\right)$.
6. $\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)$.

Exercice 3 (★★★☆☆)

Montrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

de deux façons différentes :

- Avec le théorème de Pythagore.
- Grâce aux coordonnées du point $(\cos(x), \sin(x))$ du cercle trigonométrique.
- En dérivant la fonction $f(x) = \cos^2(x) + \sin^2(x)$.

Continuité et dérivabilité

Exercice 4 (★☆☆☆☆)

Pour chacune des fonctions ci-dessous déterminer leur ensemble de définition, leur ensemble de dérivabilité et les dériver.

1. $x^2 + 2x$
2. $x\ln(x)$
3. $x + \sqrt{x}e^x$
4. $\frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$
5. $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$
6. $\sqrt{x^2+1}$
7. $e^{\sqrt{x}}$
8. $\sqrt{e^x}$
9. $\cos(x^2e^x)$
10. $(x^x)^2$
11. $x^{(x^2)}$
12. $x^{\cos x}$

Exercice 5 (★★☆☆☆)

Montrer qu'une fonction admettant un développement limité à l'ordre $n \geq 1$ en un point a est toujours dérivable en a.

Exercice 6 (★★★☆☆) **Une fonction dérivable de dérivée non continue**

On fixe un entier $n \geq 1$ et on considère la fonction

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \longmapsto & x^{n+1}\sin\left(\frac{1}{x^n}\right) \\ 0 & \longmapsto & 0. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ mais que f' n'est pas continue en 0.
3. Montrer que f possède un développement limité à l'ordre n en 0.

Exercice 7 (★★☆☆☆)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction continue admettant une limite $\ell \in \mathbb{R}$ en $+\infty$. Montrer que f est bornée.

Exercice 8 (★★★☆☆)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ bornée telle que $f(0) = 0$. Montrer qu'il existe $L \geq 0$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $|f(x)| \leq Lx$.

Exercice 9 (★★★☆☆)

On pose

$$f: \begin{array}{rcl}]-2\pi, 2\pi[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \longmapsto & \dfrac{x^2}{1-\cos(x)} \\ 0 & \longmapsto & 2. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-2\pi, 2\pi[$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-2\pi, 2\pi[$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-2\pi, 2\pi[$.
4. Déterminer $\lim\limits_{x\to-2\pi} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to 2\pi} f(x)$.
5. On admet que f est décroissante sur $]-2\pi, 0]$ et croissante sur $]0, -2\pi]$. Tracer le graphe de f.

Développements limités

Exercice 10 (★★☆☆☆)

Calculer les développements limités suivants en 0 à l'ordre indiqué. Puis, dans chacun des cas, si cela est possible, donner la position relative de la fonction par rapport à la tangente au voisinage de 0.

1. $e^x - \sin(x)$ à l'ordre 5.
2. $x\sin(x)$ à l'ordre 4.
3. $\cos(x^2)$ à l'ordre 4.
4. $\ln(\cos(x))$ à l'ordre 4.
5. $\ln(1+x)e^x$ à l'ordre 3.
6. $\frac{\sin(x)}{\cos(x)}$ à l'ordre 4.
7. $\ln(2+x)$ à l'ordre 3.
8. $\sqrt{\cos(x)}$ à l'ordre 4.

Exercice type bac revisités

Exercice 11 (★★☆☆☆) **-Inspiré de Bac de math 2021 candidat libre métropole Sujet 2**

On pose

$$h: \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & 1+\frac{\ln(x)}{x^2}. \end{array}$$

1. Déterminer les limites de h en 0 et en $+\infty$.
2. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}^{+*}, h'(x) = \frac{1-2\ln(x)}{x^3}$.
3. En déduire les variations de f sur $]0,+\infty[$.
4. Déterminer une équation de la tangente à h en $x = 1$.
5. Montrer que h admet une unique solution α à l'équation $h(x) = 0$ et que $e^{-1} < \alpha < 1$.
6. Tracer l'allure du graphe de h.

Exercice 12 (★★☆☆☆)

On pose

$$f: \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2-6x+4\ln(x). \end{array}$$

1. (a) Déterminer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$.
   (b) Donner un équivalent simple de f en $+\infty$ et en déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.
2. Étudier les variations de f sur $]0,+\infty[$.
3. Déterminer la pente de la tangente à la courbe représentative de f en $x = 4$.
4. Tracer le graphe de f (on donne $\ln(2) \simeq 0.7$).

Études de fonction

Exercice 13 (★★★☆☆)

On pose

$$f: \begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \longmapsto & \dfrac{\ln(1+x)}{x} \\ 0 & \longmapsto & 1. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $]-1,+\infty[$.
2. Montrer que f est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
3. Montrer que f est de classe C^1 sur $]-1,+\infty[$.
4. On pose

$$g: \begin{array}{rcl}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x-(x+1)\ln(x+1). \end{array}$$

(a) Étudier les variations de g.

(b) En déduire que g est négative sur son ensemble de définition.

5. Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[\, , f'(x)$ est du signe de $g(x)$.
6. Calculer $\lim\limits_{x\to -1} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et déterminer les variations de f.
7. Tracer le graphe de f.

Exercice 14 (★★★☆☆)

On pose

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x \neq 0 & \longmapsto & \dfrac{x}{e^x - 1} \\ 0 & \longmapsto & 1. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. On pose

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & e^x(x-1)+1 \end{array}$$

(a) Étudier les variations de g.

(b) En déduire que g est positive sur son ensemble de définition.

5. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x)$ est de signe opposé à celui de $g(x)$.
6. Calculer $\lim\limits_{x\to -\infty} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$ et déterminer les variations de f.
7. Tracer le graphe de f.

Exercice 15 (★★★☆☆)

On considère

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & (x-2)e^{-\frac{1}{x}} \end{array}$$

1. (a) Déterminer les limites de f aux bornes de l'intervalle de définition.

   (b) Justifier que f est prolongeable par continuité en 0. On note toujours f son prolongement en 0.

   (c) La fonction f est-elle dérivable en 0 ?

   (d) La fonction f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$?
2. Étudier les variations de f.
3. Montrer que $y = x - 3$ est une asymptote à f en $+\infty$ et donner la position de f par rapport à y au voisinage de $+\infty$.

   On pourra faire un développement limité de l'exponentielle.
4. Tracer le graphe de f.

Forme exponentielle

Exercice 16 (★★★☆☆)

On considère la fonction $f(x) = x^x$.

1. Donner l'ensemble de définition de f.
2. Calculer $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ et $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)$.

3. On considère $\widetilde{f}$ le prolongement par continuité de f en 0. Est-ce que $\widetilde{f}$ est dérivable en 0 ?
4. Étudier les variations de f sur son ensemble de définition.
5. Calculer l'équation de la tangente à f en $x = 1$.
6. Tracer le graphe de f.

Exercice 17 (★★★★☆)

On pose

$$f : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x > 0 & \longmapsto x^{x^2} = x^{(x^2)} \\ 0 & \longmapsto 1. \end{array}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^+$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^+$.
3. Déterminer la position de sa courbe par rapport à sa tangente en 0.
4. Est-ce que f est deux fois dérivable en 0 ?
5. Établir les variations de f et tracer son graphe.