TD 3

Théorie des ensembles

Ensembles et applications

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

On considère $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $A = \{0, 2, 4, 6, 8\}$ et $B = \{0, 1, 2, 3, 4\}$.

1. Déterminer $A \cap B, A \cup B, A \setminus B$ et $B \setminus A$.
2. Déterminer une bijection entre A et B.

Exercice 2 (★☆☆☆☆)

On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2. \end{array}$$

1. Déterminer $f(\mathbb{R})$, l'image de f.
2. Déterminer $f^{-1}(\{1\})$ et $f^{-1}(\{-1\})$.
3. Déterminer $f^{-1}([0, 1])$.

Exercice 3 (★☆☆☆☆)

Soit $f : E \to F$ une application bijective et $B \subseteq F$. Montrer que l'image réciproque de B par f est égale à l'image par f^{-1} de B.

Exercice 4 (★★☆☆☆)

Soit $f : E \to F$ une application quelconque et $F = \bigsqcup_{i \in I} B_i$ une partition de F.

1. Montrer que $\left(f^{-1}(B_i)\right)_{i \in I}$ forme une partition de E.
2. En déduire que si E et F sont finis et que f est injective alors $\#E \leq \#F$, que si f est surjective alors $\#E \geq \#F$ et enfin, que si f est bijective alors $\#E = \#F$.

Exercice 5 (★★☆☆☆)

Montrer qu'il existe une bijection entre $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$.

Exercice 6 (★★★☆☆)

Montrer qu'il existe une injection de $\mathbb{N}^2$ dans $\mathbb{N}$.
Indication : on pourra s'appuyer sur l'unicité de la décomposition en facteurs premiers des entiers.

Exercice 7 (★★★★☆)

Soit E un ensemble quelconque. Montrer qu'il n'existe pas de surjection de E dans $\mathcal{P}(E)$.
Indication : on pourra supposer par l'absurde qu'il existe une surjection $f : E \to \mathcal{P}(E)$ et considérer la partie $A = \{x \in E \mid x \notin f(x)\}$.

Relations binaires

Exercice 8 (★☆☆☆☆)

Soit E un ensemble et R une relation d'ordre sur E. On pose $\widetilde{R}$ la relation binaire définie par $x\widetilde{R}y$ si yRx. Montrer que $\widetilde{R}$ définit une relation d'ordre sur E.

Exercice 9 (★★☆☆☆)

Soit E un ensemble quelconque et $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des parties de E.

1. Montrer que pour $E = \{a, b\}$ on a
$$\mathcal{P}(E) = \left\{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\right\}.$$
2. Montrer que $(E, \subseteq)$ est un ensemble ordonné.
3. Montrer que $(E, \subseteq)$ est un totalement ordonné si et seulement si E ne contient qu'un seul élément.
4. $(E, \subseteq)$ possède-t-il un maximum ? Un minimum ?

Exercice 10 (★★★☆☆)

On munit $\mathbb{N}$ de la relation $x \lhd y$ si $x \mid y$.

1. Montrer que $\lhd$ est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$. Est-elle totale ?
2. Montrer que 0 est le maximum de $\mathbb{N}$ pour $\lhd$.
3. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{N}$ tels que $(a, b) \neq (0, 0)$ on a
$$\mathrm{pgcd}_{\lhd}(a, b) = \mathrm{pgcd}_{\leq}(a, b)$$
où le pgcd est pris comme l'élément maximal des diviseurs communs à a et à b pour les relations d'ordre $\lhd$ et $\leq$ respectivement.
4. Montrer que $\mathrm{pgcd}_{\lhd}(0, 0) = 0$ tandis que $\mathrm{pgcd}_{\leq}(a, b)$ n'existe pas.

Exercice 11 (★★☆☆☆)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On munit $\mathbb{Z}$ de la relation $x \sim y$ si $x \equiv y \mod n$.

1. Montrer qu'il s'agit d'une relation d'équivalence.
2. On note pour $m \in \mathbb{Z}, \overline{m} = \{k \in \mathbb{Z} \mid k \sim m\}$, la classe d'équivalence de m et on note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} = \left\{\overline{m} \mid m \in \mathbb{Z}\right\}$ l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation d'équivalence.

   Enfin, on pose
$$\begin{array}{rccl} \varphi : & \{0, \dots, n-1\} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \\ & m & \longmapsto & \overline{m}. \end{array}$$

   Montrer que φ est une bijection.