TD 3

Séries numériques

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

Étudier la convergence des séries de terme général donné par les suites suivantes.

1. $\dfrac{2}{n^2}$
2. $\dfrac{1}{1+n^3}$
3. $\dfrac{n^2-1}{n^3+2}$
4. $\dfrac{1}{n^n}$
5. $\dfrac{\ln(n)}{n^2}$
6. $\dfrac{1}{n2^n}$
7. $\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n+1}$
8. $e^{\frac{1}{n^2}}$
9. $\dfrac{(-1)^n}{n^2}$
10. $\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$

Exercice 2 (★★☆☆☆)

Étudier la convergence des séries suivantes à l'aide de développements limités.

1. $\sin\left(\dfrac{1}{n^2}\right)$
2. $e^{\frac{1}{n}}-1$
3. $\dfrac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)-\dfrac{1}{n}.$
4. $\ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$
5. $\left(\dfrac{1}{n}\right)^{1+\frac{1}{n}}$
6. $\left(\dfrac{n}{n+1}\right)^{n^2}$

Exercice 3 (★★★★☆)

Calculer les sommes des séries de terme général suivants.

1. $u_n=\frac{1}{4^n}$ pour $n\in\mathbb{N}$.
2. $v_n=e^{-n}$ pour $n\in\mathbb{N}$.
3. $w_n=u_{n+1}-u_n$ pour $n\in\mathbb{N}$ avec u_n une suite convergent vers une limite ℓ.
4. $t_n=\dfrac{2}{n(n+1)}$ pour $n\in\mathbb{N}^*$ (on pourra décomposer la fraction en éléments simples).

Exercice 4 (★★☆☆☆)

Soit $\alpha>0$, donner la nature de la série de terme général $u_n=\ln\left(\cos\left(\dfrac{1}{n^\alpha}\right)\right)$.

Exercice 5 (★★★☆☆)

Dire à quelle condition sur $a\in\mathbb{C}$ la série de terme général $u_n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n-\dfrac{n-1}{n}e^a$ converge.
(Indication : on pourra écrire $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ *sous forme exponentielle).*

Exercice 6 (★★★☆☆)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - 1.$$

1. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq 1.$$
2. En déduire que (u_n) converge et donner la valeur de sa limite.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2}$.
(Indication : on pourra justifier l'utilisation d'un développement limité de u_{n+1}).
4. Que peut-on dire de la convergence de la série de terme général u_n ?

Exercice 7 (★★★★☆)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 > 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln 1 + \frac{u_n}{3}.$$

On pose

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \ln(1+x) \end{array} \quad \text{et} \quad g: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x - \ln(1+x) \end{array}$$

1. Montrer que $\forall x \geq 0, f(x) \geq 0$.
2. Montrer que g est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$ et en déduire que $\forall x \in \mathbb{R}^+, g(x) \geq 0$
3. (a) Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$,
$$0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq u_0.$$
   (b) En déduire que (u_n) converge et donner la valeur de sa limite.
   (c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = -\frac{1}{3}$.
   (Indication : on pourra justifier l'utilisation d'un développement limité de u_{n+1}).
   (d) Que peut-on dire de la convergence de la série de terme général u_n ?

Exercice 8 (★★★★☆)

On souhaite calculer la somme

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n^4+n^2+1}$$

1. Justifier l'existence de la somme.
2. Montrer qu'on a la factorisation $(X^2+X+1)(X^2-X+1) = X^4+X^2+1$ dans $\mathbb{R}[X]$.
3. Décomposer en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ la fraction rationnelle $\frac{X}{X^4+X^2+1}$.
4. Conclure.

Exercice 9 (★★★★☆)

On souhaite calculer la somme

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \ln\left(1 - \frac{1}{n^2}\right).$$

On pose $\forall n \geq 2, S_n = \sum_{k=2}^{n} \ln\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)$.

1. Justifier l'existence de la somme.
2. Montrer que $\forall n \geq 2$,
$$S_n = \ln\left(\prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right)\right).$$
3. Montrer que $\forall n \geq 2, \prod_{k=2}^{n}\left(1 - \frac{1}{k^2}\right) = \frac{n+1}{2n}$.
4. Conclure.

Exercice 10 (★★★☆☆) - Divergence de la série harmonique

1. On considère la suite $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n}$.
   (a) Montrer que $S_{2N} - S_N \geq \frac{1}{2}$.
   (b) En déduire que $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$ diverge.
2. On considère $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une injection. En vous inspirant de la question précédente montrer que $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 11 (★★★★☆) - Critère de Riemann

On considère la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^\alpha}$.

1. Montrer que si $\alpha \leq 0$ la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
2. On suppose $\alpha \leq 1$.
   (a) Justifier que $\forall n \geq 1, \forall t \in [n, n+1], \frac{1}{n^\alpha} \geq \frac{1}{t^\alpha}$.
   (b) Montrer que
   $$\sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \geq \int_1^N \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{dt}\,.$$
   (c) En déduire que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (on pourra distinguer les cas $\alpha < 1$ et $\alpha = 1$).
3. On suppose $\alpha > 1$.
   (a) Justifier que $\forall n \geq 2, \forall t \in [n, n+1], \frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{(t-1)^\alpha}$.
   (b) Montrer que
   $$\sum_{n=2}^{N} \frac{1}{n^\alpha} \leq \int_2^N \frac{1}{(t-1)^\alpha}\,\mathrm{dt}\,.$$
   (c) En déduire que $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ converge.