

# Logique booléenne

## Exercices ludiques de logique

### Exercice 1 (★★☆☆☆)

Trois logiciennes entrent dans un bar. Le serveur arrive et leur demande « Est-ce que vous voulez toutes une bière ? »

- La première répond « Je ne sais pas ».
- La deuxième répond « Je ne sais pas ».
- La troisième répond « Oui ! ».

Expliquez leurs réponses.

### Exercice 2 (★★★★☆)

Vous vous trouvez face à deux portes. Derrière l'une d'elle se trouve 1 million d'euros et derrière l'autre se trouve un grille-pain. Il y a aussi deux statues qui peuvent répondre à une seule de vos questions. L'une d'entre elles dira systématiquement la vérité et l'autre mentira systématiquement. Vous n'avez aucun moyen de savoir quelle statue ment et laquelle dit la vérité.

Quelle question posez-vous à quelle statue pour savoir derrière quelle porte se trouve le million ?

### Exercice 3 (★☆☆☆☆)

Un cycliste part en ligne droite d'une ville  $A$  vers une ville  $B$  située à  $90\text{km}$  de  $A$  et s'y arrête lorsqu'il l'atteint. Au même moment un oiseau part de la ville  $A$  et va faire la ville  $B$ . Lorsqu'il l'atteint il fait demi tour et retourne jusqu'au cycliste puis retourne vers la ville  $B$  puis retourne jusqu'au cycliste etc. Sachant que

- Le cycliste se déplace à  $30\text{km/h}$ ,
- L'oiseau se déplace à  $50\text{km/h}$ ,

Quelle distance parcourt l'oiseau au total ?

## Propositions et tautologies

### Exercice 4 (★★★★☆)

Pour chacune des propositions suivantes donner sa négation et dire si la proposition est vraie.

1.  $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y$
2.  $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq -1$ .
3.  $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \Rightarrow (x^2 \leq y^2)$ .

4.  $\forall x \in ]-\infty, 0], \forall y \in ]-\infty, 0], xy \geq 0$ .
5.  $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, 1 \in D_{a,b}$  (On rappelle que  $D_{a,b}$  désigne l'ensemble des diviseurs communs à  $a$  et à  $b$ ).
6. Pour toutes fonctions décroissantes  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $f \circ g$  est croissante.
7.  $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 2$  tel que  $\forall p$  premier,  $p \nmid n$ .

### Exercice 5 (★★☆☆☆)

Déterminer si les expressions suivantes sont des tautologies par la méthode de votre choix (calcul propositionnel, table de vérité etc).

1.  $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$
2.  $(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
3.  $(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$
4.  $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
5.  $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$
6.  $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$
7.  $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$ .

### Exercice 6 (★★☆☆☆)

Donner la formulation contraposée des propositions suivantes :

1. S'il pleut alors le sol est mouillé.
2. Si c'est un chat alors il est mortel.
3. Qui parle ne sait pas.
4. Pierre qui roule n'amasse pas mousse.
5. Jamais deux sans trois
6. Si un entier est divisible par 5 alors il est pair.
7. Si deux entiers n'ont qu'un diviseur positif en commun alors ils sont premiers entre eux.
8.  $a \mid bc$  et  $\text{pgcd}(a, b) = 1 \Rightarrow a \mid c$ .

### Exercice 7 (★★☆☆☆)

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Déterminer parmi les propositions lesquelles sont vraies. Justifier à chaque fois.

1.  $f$  est à valeur positive.
2.  $f$  est croissante.
3.  $f$  est paire.
4.  $f$  est à valeurs strictement positives.

### Exercice 8 (★★★☆☆)

Montrer par la contraposée les propositions suivantes :

1. Un entier dont le carré est pair est lui-même pair.
2. Soit  $n, m \in \mathbb{Z}$ . Si  $m$  ne possède pas d'inverse modulaire modulo  $n$  alors  $\text{pgcd}(n, m) \geq 2$ .  
On pourra utiliser le théorème d'Euler.

# Calcul propositionnel

## Exercice 9 (★★★★☆)

Démontrer à l'aide de calcul propositionnel les formules suivantes puis retrouver le résultat trouvé à l'aide d'une table de Karnaugh.

1.  $a + ab = a$

3.  $a + \bar{a}b = a + b$

5.  $a + b + \bar{a}\bar{b} = 1$

2.  $a(a + b) = a$

4.  $(a + b)(a + \bar{b}) = a$

6.  $(a + b)\bar{a}\bar{b} = 0$

## Exercice 10 (★★☆☆☆)

Simplifier les expressions suivantes à l'aide de tables de Karnaugh.

$$F_1 = ab\bar{c} + \bar{a}bc + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c$$

$$F_2 = abc + \bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}c + ab\bar{c}$$

$$F_3 = \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}bc\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + ab\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}c\bar{d}$$

$$F_4 = \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}d + \bar{a}b\bar{c}d + ab\bar{c}d + abcd + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}d$$

$$F_5 = \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + ab\bar{c}d + abcd + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd$$

$$F_6 = \bar{a}b\bar{c}d + ab\bar{d} + \bar{a}bc + bc\bar{d} + b\bar{c}d + \bar{a}bc$$

$$F_7 = \bar{b}c\bar{d} + abc + \bar{b}c + ac\bar{d}$$

## Exercice 11 (★★★★☆)

On souhaite programmer l'autorisation de dépassement d'un véhicule en fonction des paramètres suivants :

**a** : Le véhicule d'en face est petit et lent. (*Un vélo par exemple*)

**b** : La visibilité est bonne.

**c** : La voie de gauche est dégagée.

**d** : La signalisation autorise le dépassement.

Le véhicule est autorisé à dépasser lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

- Le véhicule d'en face est petit et lent et la voie de gauche est dégagée.
- ou si la voie de gauche est dégagée et la signalisation autorise le dépassement.
- Par ailleurs, on ne peut savoir que la voie de gauche est dégagée que si la visibilité est bonne.
- De même, on ne peut savoir que la signalisation autorise le dépassement que si la visibilité est bonne.

1. Écrire une formule logique traduisant l'autorisation de dépasser en fonction des paramètres  $a, b, c$  et  $d$  en n'utilisant que des  $+$ ,  $\times$  et  $\bar{\phantom{x}}$  (« ou », « et » et « négation »).
2. Faire une table de vérité de cette formule.
3. En déduire une expression simplifiée de la formule de dépassement. Traduire cette identité par une phrase en français et donner une condition suffisante pour dépasser.
4. Retrouver le résultat par le calcul.
5. Donner une forme normale disjonctive de la fonction booléenne et donner une condition nécessaire pour le dépassement.