

Logique booléenne

Exercices ludiques de logique

Exercice 1 (★★☆☆☆)

Trois logiciennes entrent dans un bar. Le serveur arrive et leur demande « Est-ce que vous voulez toutes une bière ? »

- La première répond « Je ne sais pas ».
- La deuxième répond « Je ne sais pas ».
- La troisième répond « Oui ! ».

Expliquez leurs réponses.

Correction :

Il suffit qu'une seule logicienne ne veuille pas de bière pour pouvoir répondre « Non ! » à la question du serveur. Puisque la première logicienne ne répond pas « Non ! » c'est qu'elle veut une bière. En revanche, elle ignore ce que veulent les deux autres. De même pour la deuxième. Puisque les deux premières n'ont pas répondu « Non » c'est qu'elles veulent toutes les deux une bières et, puisque la troisième veut également une bière elle peut répondre avec assurance « Oui ! » à la question du serveur.

Exercice 2 (★★★☆☆)

Vous vous trouvez face à deux portes. Derrière l'une d'elle se trouve 1 million d'euros et derrière l'autre se trouve un grille-pain. Il y a aussi deux statues qui peuvent répondre à une seule de vos questions. L'une d'entre elles dira systématiquement la vérité et l'autre mentira systématiquement. Vous n'avez aucun moyen de savoir quelle statue ment et laquelle dit la vérité.

Quelle question posez-vous à quelle statue pour savoir derrière quelle porte se trouve le million ?

Correction :

Il faut poser à n'importe quelle statue la question « Quelle porte m'indiquerait l'autre statue si je lui demandais derrière quelle porte se trouve le million » et choisir l'autre porte que celle indiquée. En effet,

- Si on pose la question à la statue qui dit toujours la vérité elle nous répondra la vérité en nous disant que la statue menteuse nous indiquera la mauvaise porte ; elle nous indiquera la mauvaise porte.
- Si on pose la question à la statue qui ment toujours elle mentira en nous indiquant la mauvaise porte puisque l'autre statue, la fiable, nous indiquerait la bonne.

Dans tous les cas la porte indiquée est celle derrière laquelle se trouve le grille-pain et on prend l'autre.

Exercice 3 (★☆☆☆☆)

Un cycliste part en ligne droite d'une ville A vers une ville B située à $90km$ de A et s'y arrête lorsqu'il l'atteint. Au même moment un oiseau part de la ville A et va faire la ville B . Lorsqu'il l'atteint il fait demi tour

et retourne jusqu'au cycliste puis retourne vers la ville B puis retourne jusqu'au cycliste etc. Sachant que

- Le cycliste se déplace à 30km/h,
- L'oiseau se déplace à 50km/h,

Quelle distance parcourt l'oiseau au total ?

Correction :

L'oiseau part en même temps que le cycliste et s'arrête en même temps que lui. Le cycliste met 3h pour atteindre sa destination donc l'oiseau parcourt $3 \times 50 = 150\text{km}$.

Propositions et tautologies

Exercice 4 (★★★☆☆)

Pour chacune des propositions suivantes donner sa négation et dire si la proposition est vraie.

1. $\forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, x \geq y$
2. $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geq -1$.
3. $\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \Rightarrow (x^2 \leq y^2)$.
4. $\forall x \in]-\infty, 0], \forall y \in]-\infty, 0], xy \geq 0$.
5. $\forall a \in \mathbb{Z}, \forall b \in \mathbb{Z}, 1 \in D_{a,b}$ (On rappelle que $D_{a,b}$ désigne l'ensemble des diviseurs communs à a et à b).
6. Pour toutes fonctions décroissantes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \circ g$ est croissante.
7. $\exists n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ tel que $\forall p$ premier, $p \nmid n$.

Correction :

1. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \forall y \in \mathbb{R}, x < y$. La proposition est vraie, prendre $y = x + 1$.
2. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, x^2 < -1$. La proposition est vraie car un carré est toujours positif.
3. Négation : $\exists x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R}, (x \leq y) \text{ et } (x^2 > y^2)$. La proposition est fausse car sa négation est vraie. Prendre $x = -1$ et $y = 0$ on a bien $-1 \leq 0$ et $1 > 0$. Cette proposition prouve que la fonction $x \mapsto x^2$ n'est pas croissante sur $\mathbb{R}$.
4. Négation : $\exists x \in]-\infty, 0], \exists y \in]-\infty, 0], xy < 0$. La proposition est vraie car le produit de deux réels négatif est positif.
5. Négation : $\exists a \in \mathbb{Z}, \exists b \in \mathbb{Z}, 1 \notin D_{a,b}$. La proposition est vraie car 1 est un diviseur commun à tout couple d'entiers.
6. Négation : Il existe des fonctions décroissantes $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f \circ g$ est décroissante. La proposition est vraie car f décroissante revient à dire que pour tout $x \leq y$ on a $f(x) \geq f(y)$ mais alors $g(f(x)) \leq g(f(y))$. Donc $g \circ f$ croissante.
7. Négation : $\forall n \in \mathbb{N}, n \geq 2$ tel que $\exists p$ premier, $p \mid n$. La proposition est fausse car sa négation est vraie ; tout entier supérieur à 2 admet un diviseur premier.

Exercice 5 (★★☆☆☆)

Déterminer si les expressions suivantes sont des tautologies par la méthode de votre choix (calcul propositionnel, table de vérité etc).

- | | |
|---|---|
| 1. $\neg(\neg P) \Leftrightarrow P$ | 5. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Leftrightarrow (P \Rightarrow R)$ |
| 2. $(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$ | 6. $(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$ |
| 3. $(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Leftrightarrow (P \Rightarrow Q)$ | 7. $(P \Leftrightarrow Q) \Leftrightarrow ((P \wedge Q) \vee (\neg P \wedge \neg Q))$. |
| 4. $((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$ | |

Correction :

1. C'est une propriété du cours que $\neg(\neg P) \equiv P$.
2. On peut le prouver à l'aide d'une table de vérité.

P	Q	$\neg Q$	$\neg P$	$\neg Q \Rightarrow \neg P$	$P \Rightarrow Q$	$(\neg Q \Rightarrow \neg P) \Rightarrow (P \Rightarrow Q)$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	1	0	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1

3. La table précédente prouve que l'équivalence est vraie. En d'autres termes on a $\neg Q \Rightarrow \neg P \equiv P \Rightarrow Q$.
La formule $\neg Q \Rightarrow \neg P$ est appelée formule contraposée de $P \Rightarrow Q$.
4. On fait encore une table de vérité

P	Q	R	$P \Rightarrow Q$	$Q \Rightarrow R$	$(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$	$P \Rightarrow R$	$((P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)) \Rightarrow (P \Rightarrow R)$
0	0	0	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1	1
1	1	0	1	0	0	0	1
1	1	1	1	1	1	1	1

On peut aussi le faire par le calcul direct mais c'est un peu plus fastidieux. On note p, q, r les variables représentant les propositions. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned}
 ((p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r)) \Rightarrow (p \Rightarrow r) &= \overline{(\overline{p} + q)} (\overline{q} + r) + \overline{p} + r \\
 &= \overline{\overline{p} + q} \cdot \overline{\overline{q} + r} + \overline{p} + r && \text{(par De Morgan)} \\
 &= p\overline{q} + q\overline{r} + \overline{p} + r && \text{(par De Morgan)} \\
 &= \overline{q} + \overline{p} + q + r && \text{(car } p\overline{q} + q = (p + q) \cdot \underbrace{(\overline{q} + q)}_{=1}) \\
 & && \text{(et } q\overline{r} + r = (q + r) \cdot \underbrace{(\overline{r} + r)}_{=1}) \\
 &= 1 + \overline{p} + r && \text{(car } q + \overline{q} = 1) \\
 &= 1 && \text{car 1 est absorbant pour l'addition.}
 \end{aligned}$$

5. La table précédente montre que cette formule n'est pas une tautologie. Par exemple, on peut lire que lorsque P et R sont fausses et Q est vraie $P \Rightarrow R$ est vraie (car faux implique n'importe quoi est vraie) tandis que $Q \Rightarrow R$ est fausse (car vrai ne peut impliquer que vrai) donc $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow R)$ est fausse.
6. Une table de vérité donne

P	Q	$\neg Q$	$P \wedge \neg Q$	$\neg(P \wedge \neg Q)$	$(P \Rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg(P \wedge \neg Q)$
0	0	1	0	1	1
0	1	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1
1	1	0	0	1	1

Donc $P \Rightarrow Q \equiv \neg(P \wedge \neg Q)$ il s'agit de la formulation par l'absurde de l'implication $P \Rightarrow Q$.

Le calcul direct marche tout aussi bien

$$p \Rightarrow q = \overline{p} + q \quad \underbrace{=}_{\text{De Morgan}} \quad \overline{p\overline{q}}.$$

Exercice 6 (★★☆☆☆)

Donner la formulation contraposée des propositions suivantes :

1. S'il pleut alors le sol est mouillé.
2. Si c'est un chat alors il est mortel.
3. Qui parle ne sait pas.
4. Pierre qui roule n'amasse pas mousse.
5. Jamais deux sans trois
6. Si un entier est divisible par 5 alors il est pair.
7. Si deux entiers n'ont qu'un diviseur positif en commun alors ils sont premiers entre eux.
8. $a \mid bc$ et $\text{pgcd}(a, b) = 1 \Rightarrow a \mid c$.

Correction :

1. Si le sol est sec alors il ne pleut pas.
2. S'il est immortel alors ce n'est pas un chat.
3. Qui sait ne parle pas.
4. Pierre qui amasse mousse ne roule pas.
5. Si pas trois alors pas deux (proverbe bête $\Rightarrow$ contraposée bête... tiens et quelle est sa contraposée à elle ?)
6. Si un entier est impair alors il n'est pas divisible par 5 (*vous l'aurez remarqué ; une implication n'a pas besoin d'être vraie pour avoir une formulation contraposée*).
7. Si deux entiers ne sont pas premiers entre eux alors ils n'ont pas qu'un diviseur en commun.
8. $a \nmid c \Rightarrow a \nmid bc$ ou $\text{pgcd}(a, b) \neq 1$.

Exercice 7 (★★☆☆☆)

On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x &\longmapsto x^2 \end{aligned}$$

Déterminer parmi les propositions lesquelles sont vraies. Justifier à chaque fois.

1. f est à valeur positive.
2. f est croissante.
3. f est paire.
4. f est à valeurs strictement positives.

Correction :

1. f est à valeur positive. Vrai. Un carré est toujours positif.
2. f est croissante. Faux : $-2 \leq -1$ pourtant $(-2)^2 = 4 > (-1)^2 = 1$.
3. f est paire. Vrai. $\forall x \in \mathbb{R}, (-x)^2 = x^2$.
4. f est à valeurs strictement positives. Faux : $f(0) = 0$.

Exercice 8 (★★★☆☆)

Montrer par la contraposée les propositions suivantes :

1. Un entier dont le carré est pair est lui-même pair.
2. Soit $n, m \in \mathbb{Z}$. Si m ne possède pas d'inverse modulaire modulo n alors $\text{pgcd}(n, m) \geq 2$.
On pourra utiliser le théorème d'Euler.

Correction :

1. La formulation contraposée est

Si un entier est impair alors son carré est impair.

Montrons cette proposition. Soit $n \in \mathbb{Z}$ impair alors $n \equiv 1 \pmod{2}$ donc $n^2 \equiv 1^2 \equiv 1 \pmod{2}$. Donc n^2 est impair ce qui prouve la proposition contraposée donc la proposition initiale.

2. La formulation contraposée est

Si $\text{pgcd}(n, m) < 2$ alors m possède un inverse modulaire modulo n .

Si $\text{pgcd}(n, m) < 2$ alors c'est nécessairement 1 donc n et m sont premiers entre eux. D'après le théorème d'Euler on a donc $m^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$ donc $m \cdot m^{\varphi(n)-1} \equiv 1 \pmod{n}$. Autrement dit, $m^{\varphi(n)-1}$ est l'inverse modulaire de m modulo n .

Calcul propositionnel

Exercice 9 (★★★☆☆)

Démontrer à l'aide de calcul propositionnel les formules suivantes puis retrouver le résultat trouvé à l'aide d'une table de Karnaugh.

- | | | |
|-------------------|-------------------------------|---------------------------------|
| 1. $a + ab = a$ | 3. $a + \bar{a}b = a + b$ | 5. $a + b + \bar{a}\bar{b} = 1$ |
| 2. $a(a + b) = a$ | 4. $(a + b)(a + \bar{b}) = a$ | 6. $(a + b)\bar{a}\bar{b} = 0$ |

Correction :

1. En factorisant par a on a

$$a + ab = a \cdot (1 + b) = a \cdot 1 = a.$$

2. On a

$$a(a + b) = a + ab = a$$

d'après la question précédente.

3. Par distributivité de l'addition

$$\begin{aligned} a + \bar{a}b &= (a + \bar{a})(a + b) \\ &= 1(a + b) = a + b \end{aligned}$$

4. En appliquant deux fois la distributivité de la multiplication :

$$\begin{aligned} (a + b)(a + \bar{b}) &= aa + \bar{a}b + ab + b\bar{b} \\ &= a + a(b + \bar{b}) \\ &= a + ab + \bar{a}\bar{b} + 0 \\ &= a + a \cdot 1 \\ &= a + a \\ &= a \end{aligned}$$

- 5.

$$a + b + \bar{a}\bar{b} = a + b + a + \bar{b} \quad (1)$$

$$= c + \bar{c} \quad (2)$$

$$= 1$$

(1) d'après une loi de De Morgan ; (2) en posant $a + b = c$.

6. D'après la question 3. on a $a + \bar{a}\bar{b} = a + \bar{b}$ donc

$$a + b + \bar{a}\bar{b} = a + \bar{b} + b = a + 1 = 1.$$

7. On a

$$\begin{aligned}(a + b)\bar{a}\bar{b} &= (a\bar{a} + b\bar{a})\bar{b} \\ &= b\bar{a}\bar{b} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Exercice 10 (★★☆☆☆)

Simplifier les expressions suivantes à l'aide de tables de Karnaugh.

$$F_1 = ab\bar{c} + \bar{a}\bar{b}c + a\bar{b}\bar{c} + \bar{a}bc$$

$$F_2 = abc + \bar{a}bc + \bar{a}\bar{b}c + ab\bar{c}$$

$$F_3 = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + ab\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d$$

$$F_4 = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}d + ab\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c}d + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}bcd + \bar{a}b\bar{c}d$$

$$F_5 = \bar{a}\bar{b}\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}c\bar{d} + \bar{a}b\bar{c}\bar{d} + ab\bar{c}\bar{d} + \bar{a}\bar{b}cd + \bar{a}b\bar{c}d$$

$$F_6 = \bar{a}\bar{b}cd + ab\bar{d} + \bar{a}bc + bc\bar{d} + b\bar{c}d + \bar{a}bc$$

$$F_7 = \bar{b}c\bar{d} + abc + \bar{b}c + ac\bar{d}$$

Correction :

On trouve

$$F_1 = a\bar{c} + \bar{b}c$$

$$F_2 = ab + \bar{a}c$$

$$F_3 = \bar{a}bd + \bar{b}cd + \bar{b}\bar{d}$$

$$F_4 = \bar{a}\bar{b} + ad + \bar{a}bc$$

$$F_5 = \bar{b}\bar{d} + ad$$

$$F_6 = ad + \bar{a}\bar{b}c + \bar{a}bc$$

$$F_7 = ac + \bar{b}c$$

Exercice 11 (★★★★☆)

On souhaite programmer l'autorisation de dépassement d'un véhicule en fonction des paramètres suivants :

a : Le véhicule d'en face est petit et lent. (*Un vélo par exemple*)

b : La visibilité est bonne.

c : La voie de gauche est dégagée.

d : La signalisation autorise le dépassement.

Le véhicule est autorisé à dépasser lorsque les conditions suivantes sont réalisées :

- Le véhicule d'en face est petit et lent et la voie de gauche est dégagée.
- ou si la voie de gauche est dégagée et la signalisation autorise le dépassement.
- Par ailleurs, on ne peut savoir que la voie de gauche est dégagée que si la visibilité est bonne.
- De même, on ne peut savoir que la signalisation autorise le dépassement que si la visibilité est bonne.

1. Écrire une formule logique traduisant l'autorisation de dépasser en fonction des paramètres a, b, c et d en n'utilisant que des $+$, $\times$ et $\bar{\cdot}$ (« ou », « et » et « négation »).
2. Faire une table de vérité de cette formule.
3. En déduire une expression simplifiée de la formule de dépassement. Traduire cette identité par une phrase en français et donner une condition suffisante pour dépasser.
4. Retrouver le résultat par le calcul.
5. Donner une forme normale disjonctive de la fonction booléenne et donner une condition nécessaire pour le dépassement.

Correction :

1. On a $f(a, b, c, d) = (ac + cd)(c \Rightarrow b)(d \Rightarrow b)$. On se rappelle que $c \Rightarrow b = \bar{c} + b$ ce qui donne, en factorisant b

$$(ac + cd)(c \Rightarrow b)(d \Rightarrow b) = (ac + cd)(\bar{c} + b)(\bar{d} + b) = (ac + cd)(\bar{c}\bar{d} + b).$$

On a donc $(c \Rightarrow b)(d \Rightarrow b) = c + d \Rightarrow b$ par les lois de De Morgan.

2.

a	b	c	d	ac	dc	$c + d$	$c + d \Rightarrow b$	$(ac + dc) \cdot (c + d \Rightarrow b)$
0	0	0	0	0	0	0	1	0
0	0	0	1	0	0	1	0	0
0	0	1	0	0	0	1	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	0	0	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1	0	0
1	0	1	0	1	0	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0	0	1	0
1	1	0	1	1	0	1	1	0
1	1	1	0	1	0	1	1	1
1	1	1	1	1	1	1	1	1

3. On résume la table de vérité précédente dans le tableau de Karnaugh suivant.

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

On peut identifier deux blocs de 2. Un bloc correspond à abc et le second à bcd .

$$f(a, b, c, d) = abc + bcd.$$

On peut traduire ça par

« Il n'est possible de dépasser que lorsque la visibilité est bonne et que la voie de gauche est dégagée et que le véhicule d'en face est petit et lent ou que la signalisation autorise le dépassement. »

Une condition suffisante est abc , c'est-à-dire que le véhicule d'en face est petit et lent, que la visibilité est bonne et que la voie de gauche est dégagée.

4. On a, en factorisant par c

$$f(a, b, c, d) = (ac + cd)(\bar{c}\bar{d} + b) = c(a + d)(\bar{c}\bar{d} + b) = (a + d)(\underbrace{c\bar{c}}_{=0}\bar{d} + bc) = bc(a + d).$$

5. Pour déterminer une forme normale disjonctive on regroupe les 0 du tableau puis on prend la négation.

cd \ ab	00	01	11	10
00	0	0	0	0
01	0	0	1	0
11	0	0	1	1
10	0	0	0	0

ce qui donne

$$\overline{f(a, b, c, d)} = \underbrace{\bar{c}}_{\text{bloc vert}} + \underbrace{\bar{b}}_{\text{bloc rouge}} + \underbrace{\bar{a}\bar{d}}_{\text{bloc bleu}}.$$

Donc, en prenant la négation et en appliquant les lois de De Morgan on obtient

$$f(a, b, c, d) = bc(a + d).$$

Donc n'importe quel facteur de l'expression ci-dessus est une condition nécessaire pour le dépassement. Par exemple $a + d$ est une condition nécessaire, c'est-à-dire que « le véhicule d'en face est petit et lent ou la signalisation autorise le dépassement » est une condition nécessaire.