TD 1

Suites numériques

Monotonie

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

Déterminer la monotonie (croissante ou décroissante) des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{1}{n^2+1}$
2. $v_n = n^2 + n$
3. $w_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$
4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$
5. $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$
6. $w_0 = -1$ et $w_{n+1} = w_n - e^{w_n} - \sqrt{n}$

Correction :

1. Décroissante
2. Croissante
3. Croissante
4. Croissante
5. Décroissante
6. Décroissante

Limites et comparaison asymptotique

Exercice 2 (★☆☆☆☆)

Déterminer des équivalents simples des suites suivantes

1. $u_n = 4n^4 - 2n^2 + 1$
2. $v_n = \frac{n^5+n^4-n-1}{2n^2+n+14}$
3. $w_n = a^n + b^n$ avec $|a| > |b| > 0$
4. $a_n = e^{\frac{1}{n^2}}$
5. $b_n = \frac{2}{n^4} + \frac{3}{n^2}$
6. $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Correction :

1. $u_n \sim 4n^4$
2. $v_n \sim \frac{n^5}{2n^2} = \frac{n^3}{2}$
3. $w_n \sim a^n$
4. $a_n \sim 1$
5. $b_n \sim \frac{3}{n^2}$
6. $c_n \sim \frac{1}{2\sqrt{n}}$.

Exercice 3 (★☆☆☆☆)

Déterminer la limite des suites suivantes en utilisant des équivalents.

1. $u_n = \frac{3n^2-17}{6n^2-n-1}$
2. $v_n = \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{3^n-2^n}$
3. $w_n = \frac{2n+2}{-n^2+3}e^{-n}$
4. $z_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

Correction :

1. $\lim u_n = \frac{1}{2}$
2. $\lim v_n = 0$
3. $\lim w_n = 0$
4. $\lim z_n = 1$

Exercice 4 (★★☆☆☆)

À l'aide de limite de taux de variations déterminer les résultats suivants.

1. $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$
2. $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$
3. $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$
4. $\sqrt{1+n} = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
5. $\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e.$

Correction :

Il s'agit d'appliquer la définition de la limite du taux de variation d'une fonction dérivable

$$\lim_{x\to 0} \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = f'(0)$$

avec $\frac{1}{n}$ à la place de x.

1. Pour $f = \sin$
2. Pour $f = \cos$
3. Pour $f = \exp$ on écrit $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = \exp'(0) = 1$, donc $\frac{e^{\frac{1}{n}}-1}{\frac{1}{n}} = 1 + o(1)$ donc $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$
4. On factorise $\sqrt{n+1} = \sqrt{n}\sqrt{1+\frac{1}{n}}$ puis on applique la limite du taux de variation à $f(x) = \sqrt{1+x}$.
5. Pour $f(x) = \ln(1+x)$
6. On utilise la définition $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)}$ puis on applique la question précédente.

Exercice 5 (★★☆☆☆)

Déterminer la limite des suites suivantes en utilisant des développements limités.

1. $u_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $v_n = \sqrt{n}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$
3. $w_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ (utiliser la forme exponentielle)
4. $z_n = n^2\left(e^{\sin\left(\frac{1}{n^2+1}\right)} - 1\right)$

Correction :

1. $\lim u_n = 1$
2. $\lim v_n = 0$
3. $\lim w_n = e^a$
4. $\lim z_n = 1$

Exercice 6 ($\star\star\star\star\star$)

Montrer que $n! = o(n^n)$ et pour tout entier $m \geq 1, m^n = o(n!)$.

Correction :

On a

$$0 \leq \frac{n!}{n^n} = \frac{1 \times 2 \times \cdots \times n}{n \times n \times \cdots \times n} \leq \frac{1}{n} \times 1 \times 1 \times \cdots \times 1 = \frac{1}{n}.$$

Par encadrement on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$, i.e. $n! = o(n^n)$.

D'autre part, $\forall n \geq m$ on a

$$\frac{m^n}{n!} = \frac{m \times \cdots m \times m \times \cdots \times m}{1 \times \cdots \times m \times (m+1) \times \cdots \times n} \leq \frac{m^m}{m!}\frac{m}{n} \longrightarrow 0.$$

Exercice 7 ($\star\star\star\star\star$)

Soit (u_n) une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et ℓ sa limite. Montrer que

- $\ell \in \mathbb{Z}$
- (u_n) est constante égale à ℓ à partir d'un certain rang.

Correction :

Par définition de la limite pour tout $\varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq n_0$ on a $\ell - \varepsilon < u_n < \ell + \varepsilon$, i.e. $u_n \in]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$. Supposons que $\ell \notin \mathbb{Z}$ et posons $n \in \mathbb{Z}$ l'entier le plus proche de ℓ. Alors, avec $\varepsilon = \frac{|\ell - n|}{2}$ l'intervalle $]\ell - \varepsilon, \ell + \varepsilon[$ ne contient aucun entier ce qui est absurde car il doit contenir u_{n_0} donc $\ell \in \mathbb{Z}$ et en prenant $\varepsilon = \frac{1}{2}$ on a $u_n \in \left]\ell - \frac{1}{2}, \ell + \frac{1}{2}\right[$ pour $n \geq n_0$ mais alors ℓ est le seul entier de l'intervalle donc $u_n = \ell$.

Exercice 8 ($\star\star\star\star\star$)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 2$ par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2 - 1}.$$

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$.
2. En déduire $\lim u_n$.

Correction :

1. On met $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}$ au même dénominateur ce qui donne

$$\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1} = \frac{k+1}{(k-1)(k+1)} - \frac{k-1}{(k+1)(k-1)} = \frac{k+1-k+1}{k^2-1} = \frac{2}{k^2-1}.$$

Il ne reste plus qu'à diviser par 2 pour obtenir le résultat annoncé.

2. On a alors

$$u_n = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n+1}\right) = 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

par télescopage. On obtient donc la limite $\lim u_n = \frac{3}{2}$.

Exercice 9 (★★☆☆☆) -Inspiré du Bac de Math Sujet 1 - 2023

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.
2. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \leq u_n \leq n+1$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
5. Montrer que $u_n \sim n$.
6. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - n$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison de raison $\frac{3}{4}$. Quelle est la limite de (v_n) ?
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Correction :

1. On a $u_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{7}{4}$ et $u_2 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + 1 = \frac{21+4+16}{16} = \frac{41}{16}$.
2. On a $u_0 < u_1 < u_2$ donc la suite semble croissante.
3. On montre la proposition $P(n)$: « $n \leq u_n \leq n+1$ »par récurrence.

   Initialisation : On a $0 \leq u_0 \leq 1$ car $u_0 = 1$ ce qui prouve l'initialisation.

   Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n \leq u_n \leq n+1$.

   Hérédité : On part de l'hypothèse de récurrence

$$\begin{aligned}
n \leq u_n &\leq n+1 \\
\frac{3}{4}n \leq \frac{3}{4}u_n &\leq \frac{3}{4}(n+1) && \text{(multiplication par } \tfrac{3}{4}) \\
\frac{3}{4}n + \frac{1}{4}n + 1 \leq \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 &\leq \frac{3}{4}(n+1) + \frac{1}{4}n + 1 && \text{(addition de } \tfrac{1}{4}n+1) \\
n+1 \leq u_{n+1} \leq n + \frac{7}{4} &\leq n+2
\end{aligned}$$

   Ce qui prouve $P(n+1)$ et conclut donc l'hérédité.
4. On a $\forall n \in \mathbb{N}$ l'inégalité $n \leq u_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} n = +\infty$. On en déduit par comparaison que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
5. En divisant $n \leq u_n \leq n+1$ par n on a $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$1 \leq \frac{u_n}{n} \leq 1 + \frac{1}{n}.$$

   On en déduit par le théorème d'encadrement que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_n}{n} = 1$ ce qui revient à dire que $u_n \sim n$.
6. (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_{n+1} = u_{n+1} - (n+1) = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}(u_n - n) = \frac{3}{4}v_n.$$

   Ce qui prouve bien que (v_n) est géométrique de raison $\frac{3}{4}$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = v_0\left(\frac{3}{4}\right)^n$ avec $v_0 = u_0 - 0 = 1$, i.e. $v_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n$. Puisque $\left|\frac{3}{4}\right| < 1$, $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.

   (b) On a $u_n = v_n + n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice 10 (★★★★☆)

On considère la suite positive (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \geq 0$,

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}.$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$v_{n+2} = \frac{1}{2}\left(v_{n+1} + v_n\right). \tag{1}$$
2. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, montrer que la suite $w_n = r^n$ vérifie la relation (1) si, et seulement si $r \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$.
3. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ la suite $a + \frac{b}{(-2)^n}$ est solution de (1).
4. Calculer a et b tels que $v_n = a + \frac{b}{(-2)^n}$ pour tout n.
5. En déduire la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

Correction :

1. On a
$$\ln\left(v_{n+2}\right) = \ln\left(u_{n+2}\right) = \ln\left(\sqrt{u_{n+1}u_n}\right) = \frac{1}{2}\left(\ln\left(u_{n+1}\right) + \ln\left(u_n\right)\right) = \frac{1}{2}\left(v_{n+1} + v_n\right).$$
2. On a alors $w_{n+2} = r^{n+2}$ et $w_{n+1} = r^{n+1}$ donc si w vérifie la relation (1) si et seulement si $\forall n \in \mathbb{N}$
$$r^{n+2} = \frac{1}{2}\left(r^{n+1} + r^n\right) = \frac{r^n}{2}(r+1).$$
En divisant par r^n on a $r^2 - \frac{1}{2}r - \frac{1}{2} = 0$ que l'on peut résoudre. On trouve alors les solutions $r_1 = 1$ et $r_2 = -\frac{1}{2}$. Tout le raisonnement est fait par équivalents donc on a terminé.
3. On pose $t_n = a + \frac{b}{(-2)^n}$ on a alors d'une part $t_{n+2} = a + \frac{b}{(-2)^{n+2}}$ et d'autre part
$$\frac{1}{2}\left(t_{n+1} + t_n\right) = \frac{1}{2}\left(a + \frac{b}{(-2)^{n+1}} + a + \frac{b}{(-2)^n}\right) = \frac{1}{2}\left(2a + \frac{b - 2b}{(-2)^{n+1}}\right) = a + \frac{-b}{2 \times (-2)^{n+1}} = a + \frac{b}{(-2)^{n+2}} = t_{n+2}.$$
4. Si $v_n = a + \frac{b}{(-2)^n}$ alors, puisque $v_0 = \ln(u_0) = \ln(1) = 0$ d'autre part on a $v_0 = a + \frac{b}{2^0} = a + b$. Et $v_1 = \ln(u_1) = \ln(2)$ donc $v_1 = a - \frac{b}{2} = \ln(2)$. Donc on devrait avoir
$$\begin{cases} a + b &= 0 \\ a - \frac{b}{2} &= \ln(2) \end{cases}$$
La première ligne donne $b = -a$ et en injectant ça dans la seconde ligne on a $a + \frac{a}{2} = \frac{3a}{2} = \ln(2)$ donc $a = \frac{2}{3}\ln(2)$ et $b = -\frac{2}{3}\ln(2)$. Puisque (v_n) est complètement déterminé par ses deux premiers termes et la relation (1) et coïncide avec les deux premiers termes de la suite définie par $2\ln(2) - \frac{2\ln(2)}{2^n}$ qui vérifie la même relation on a pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \frac{2\ln(2)}{3} - \frac{2\ln(2)}{3(-2)^n}$
5. On en déduit immédiatement que $\lim\limits_{n \to +\infty} v_n = \frac{2\ln(2)}{3}$. Par ailleurs, pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = e^{v_n}$. Puisque la fonction exponentielle est continue on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = e^{\frac{2\ln(2)}{3}} = \left(e^{\ln(2)}\right)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{2}{3}} = 4^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{4}$.

Suites définies par récurrence par des fonctions

Exercice 11 (★★☆☆☆) **- Inspiré du Bac math Amérique du Nord 2024**

On considère la fonction g définie sur $[0, 1]$ par $g(x) = 2x - x^2$. On pose (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $[0;1]$ et calculer $g(0)$ et $g(1)$.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que u converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ et donner la valeur de ℓ.
5. On pose (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \ln(1-u_n)$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2. Donner son expression en fonction de n.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite trouvée précédemment.

Correction :

1. On a g dérivable et $g'(x) = -2x < 0$ pour $x > 0$. On a $g(0) = 0$ et $g(1) = 1$
2. On a $u_1 = g(u_0) = 2\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ et $u_2 = 2\frac{3}{4} - \frac{9}{16} = \frac{24-9}{16} = \frac{15}{16}$.
3. On pose $P(n) =$« $0 < u_n < u_{n+1} < 1$ ».

   Initialisation : On a $0 < \frac{1}{2} < \frac{3}{4} < 1$ ce qui prouve l'initialisation $P(0)$.

   Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $P(n)$ soit vraie, i.e.
$$0 < u_n < u_{n+1} < 1.$$

   Hérédité : On veut montrer $P(n+1)$ c'est à dire que $0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1$. On compose la relation donnée par l'hypothèse de récurrence par la fonction g. On a le droit de le faire en conservant les inégalité stricte car la fonction g est strictement croissante.
$$g(0) < g(u_n) < g(u_{n+1}) < g(1) \Leftrightarrow 0 < u_{n+1} < u_{n+2} < 1.$$
   Ce qui prouve $P(n+1)$ et conclut la récurrence.
4. La relation établie dans la question précédente prouve en particulier que la suite (u_n) est strictement croissante et majorée donc elle converge vers une limite $\ell \in [0,1]$. La première question prouve que l'intervalle $[0;1]$ est par g et, puisque g est continue (car expression polynomiale), la limite ℓ doit vérifier
$$g(\ell) = \ell \Leftrightarrow 2\ell - \ell^2 = \ell \Leftrightarrow \ell - \ell^2 = 0 \Leftrightarrow \ell(1-\ell) = 0$$
   donc $\ell = 0$ ou $\ell = 1$. Puisque u_n est croissante on a pour tout $n \in \mathbb{N}, u_0 = \frac{1}{2} \leq u_n$ donc, en passant à la limite, $\frac{1}{2} \leq \ell$ donc $\ell \neq 0$ donc $\ell = 1$.
5.
   (a) On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$v_{n+1} = \ln(1-u_{n+1}) = \ln(1-2u_n+u_n^2)$$
   On reconnaît une identité remarquable $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ qui donne
$$v_{n+1} = \ln((1-u_n)^2) = 2\ln(1-u_n) = 2v_n.$$
   Donc (v_n) est géométrique de raison 2 et $v_0 = \ln(1-u_0) = -\ln(2)$. Donc pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = -\ln(2)2^n$.

   (b) On a
$$u_n = 1 - e^{v_n} = 1 - e^{-\ln(2)2^n} = 1 - (e^{-\ln(2)})^{2^n} = 1 - \frac{1}{2^{2^n}}.$$
   On a $\lim 2^{2^n} = +\infty$ donc $\lim u_n = 1$.

Exercice 12 (★★★☆☆) -Inspiré du Bac math Amérique du Sud 2022

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout n,
$$0 < u_n \leq 4.$$
3. Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire que (u_n) converge.
4. Montrer que la limite ℓ de u_n vérifie $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$. En déduire, la valeur de ℓ.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.
   (b) Montrer que (w_n) est géométrique de raison 2.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right)2^n + \ln(5)$.
6. Calculer $\lim_{n\to+\infty} v_n$ et retrouver $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Correction :

1. On a $u_1 = \frac{16}{5}$ et $u_2 = \frac{16^2}{5^3} = \frac{2^8}{125} = \frac{256}{125}$.
2. **Initialisation :** On a $0 \leq u_0 \leq 4$ car $u_0 = 4$ ce qui prouve l'initialisation.
   Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $0 < u_n \leq 4$.
   Hérédité : On part de l'hypothèse de récurrence
$$\begin{aligned}
&0 < u_n \leq 4 \\
&0 < u_n^2 \leq 16 && \text{(passage au carré car toutes les quantités sont positives)} \\
&0 < \underbrace{\frac{1}{5}u_n^2}_{=u_{n+1}} \leq \frac{16}{5} \leq \frac{16}{4} = 4 \text{ (division par } \frac{1}{5})
\end{aligned}$$
   Ce qui prouve la proposition au rang $n+1$.
3. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{u_n}{5} \leq \frac{4}{5} \leq 1$ d'après la question précédente. Donc $u_{n+1} \leq u_n$ donc u est décroissante.
4. La suite (u_n) est définie par récurrence par une fonction, i.e. $u_{n+1} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \frac{1}{5}x^2$ qui est une fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Donc si (u_n) converge vers ℓ alors la limite doit vérifier $\ell = f(\ell)$ i.e. $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$ donc $\ell\left(1 - \frac{1}{5}\ell\right) = 0$ donc $\ell = 0$ ou $\ell = 5$. Or la limite doit appartenir à $[0, 4]$ donc ça ne peut pas être 5. Donc $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.
5. (a) On a
$$v_{n+1} = \ln(u_{n+1}) = \ln\left(\frac{1}{5}u_n^2\right) = \ln\left(\frac{1}{5}\right) + \ln\left(u_n^2\right) = 2\ln(u_n) - \ln(5) = 2v_n - \ln(5).$$
   (b) On a $w_{n+1} = v_{n+1} - \ln(5) = 2v_n - \ln(5) - \ln(5) = 2(v_n - \ln(5)) = 2w_n$.
   (c) On a pour tout $n \in \mathbb{N}, w_n = w_0 2^n = (\ln(u_0) - \ln(5))2^n = \ln\left(\frac{4}{5}\right)2^n$. Donc $v_n = w_n + \ln(5) = \ln\left(\frac{4}{5}\right)2^n + \ln(5)$.
6. Puisque $\frac{4}{5} < 1, \ln\left(\frac{4}{5}\right) < 1$ et $\lim_{n\to+\infty} v_n = -\infty$ donc, puisque $u_n = e^{v_n}$, $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$.

Exercice 13 $(\star\star\star\star\star)$

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x)=\frac{1}{1+x}$. On pose (u_n) définie par

$$\left\{\begin{array}{rl} u_0 & =0 \\ \forall n\in\mathbb{N}, u_{n+1} & =f(u_n). \end{array}\right.$$

1. Montrer que f est strictement décroissante $[0;1]$ et calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Calculer u_1,u_2,u_3,u_4 et u_5.
3. On considère la suite définie par $F_0=0, F_1=1$ et $\forall n\in\mathbb{N}, F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$
   (a) Calculer $F_0,F_1,F_2,F_3,F_4,F_5,F_6$.
   (b) Résoudre l'équation $\ell^2=\ell+1$. On note φ la solution positive que vous trouverez et ψ l'autre.
   (c) Montrer par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}$,
   $$F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\varphi^n-\psi^n\right).$$
   Indication : On pourra prouver la proposition $P(n)$: « $F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\varphi^n-\psi^n\right)$ *et* $F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt5}\left(\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}\right)$ ».
   (d) Justifier que $F_n\underset{+\infty}{\sim}\frac{1}{\sqrt5}\varphi^n$.
4. Montrer par récurrence que $\forall n\in\mathbb{N}, u_n=\frac{F_n}{F_{n+1}}$.
5. En déduire que $\lim u_n=\frac{\sqrt5-1}{2}$.

Correction :

1. La fonction f est l'inverse d'une fonction strictement croissante et $f(0)=1, f(1)=\frac12$.
2. On a $u_1=1, u_2=\frac12, u_3=\frac23, u_4=\frac35$ et $u_5=\frac58$.
3. (a) On a $F_0=0, F_1=1, F_2=1, F_3=2, F_4=3, F_5=5, F_6=8$.
   (b) Avec le discriminant on trouve $\ell\in\left\{\frac{1-\sqrt5}{2},\frac{1+\sqrt5}{2}\right\}$. Donc $\psi=\frac{1-\sqrt5}{2}$ et $\varphi=\frac{1+\sqrt5}{2}$
   (c) On pose $P(n)$: « $F_n=\frac{1}{\sqrt5}\left(\varphi^n-\psi^n\right)$ et $F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt5}\left(\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}\right)$ »

   Initialisation : On a $\frac{1}{\sqrt5}(\varphi^0-\psi^0)=0=F_0$ et $\frac{1}{\sqrt5}(\varphi-\psi)=\frac{\sqrt5}{\sqrt5}=1=F_1$. Ce qui prouve l'initialisation.

   Hypothèse de récurrence : Soit $n\in\mathbb{N}$ tel que
   $$\left\{\begin{array}{rl} F_n & =\frac{1}{\sqrt5}\left(\varphi^n-\psi^n\right) \\ F_{n+1} & =\frac{1}{\sqrt5}\left(\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}\right) \end{array}\right.$$

   Hérédité : Par définition on a $F_{n+2}=F_{n+1}+F_n$ donc, par hypothèse de récurrence, on a
   $$F_{n+2}=\frac{1}{\sqrt5}\left(\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}\right)+\frac{1}{\sqrt5}\left(\varphi^n-\psi^n\right)=\frac{1}{\sqrt5}\left(\varphi^{n+1}+\varphi^n-(\psi^{n+1}+\psi^n)\right)$$
   Mais $\varphi^{n+1}-\varphi^n=\varphi^n(\varphi+1)=\varphi^n\varphi^2=\varphi^{n+2}$ puisque φ vérifie $\varphi^2=\varphi+1$. De même $\psi^{n+1}+\psi^n=\psi^{n+2}$. Donc on a bien
   $$F_{n+2}=\frac{1}{\sqrt5}\left(\varphi^{n+2}-\psi^{n+2}\right)\text{ et }F_{n+1}=\frac{1}{\sqrt5}\left(\varphi^{n+1}-\psi^{n+1}\right)$$
   Donc $P(n+1)$ est vraie lorsque $P(n)$ est vraie ce qui conclut la récurrence.
   (d) On remarque que $|\psi|<1$ car $4<5<9$ donc $2<\sqrt5<3$ donc $-1>1-\sqrt5>-2$ donc $\frac12<|\psi|<1$. On en déduit que la suite géométrique ψ^n a pour limite 0. Par ailleurs, $\varphi>1$ donc $\lim\varphi^n=+\infty$. On en déduit que $\frac{\sqrt5F_n}{\varphi^n}=1-\left(\frac{\psi}{\varphi}\right)^n\xrightarrow[n\to+\infty]{}1$ donc $F_n\sim\frac{1}{\sqrt5}\varphi^n$.

4. **Initialisation :** On a $u_0 = \frac{0}{1} = \frac{F_0}{F_1}$.

   Hypothèse de récurrence : Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $u_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$.

   Hérédité : Par définition $u_{n+1} = f(u_n) = \frac{1}{1+u_n}$. Par hypothèse de récurrence

$$u_{n+1} = \frac{1}{1 + \frac{F_n}{F_{n+1}}} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+1} + F_n} = \frac{F_{n+1}}{F_{n+2}}.$$

   Ceci conclut la récurrence.

5. On a $F_{n+1} \sim \varphi^{n+1}$ et $F_n \sim \varphi^n$ donc (on a le droit de quotienter des équivalents)

$$u_n \sim \frac{\varphi^n}{\varphi^{n+1}} = \frac{1}{\varphi} = \frac{2}{1+\sqrt{5}} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{\left(1+\sqrt{5}\right)\left(1-\sqrt{5}\right)} = \frac{2\left(1-\sqrt{5}\right)}{1-5} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

   Donc on a bien la limite voulue.