TD 1

Suites numériques

Monotonie

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

Déterminer la monotonie (croissante ou décroissante) des suites suivantes.

1. $u_n = \frac{1}{n^2+1}$
2. $v_n = n^2 + n$
3. $w_n = \sum_{k=1}^{n} k^2$
4. $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n + 1$
5. $v_0 = 3$ et $v_{n+1} = \frac{v_n}{2}$
6. $w_0 = -1$ et $w_{n+1} = w_n - e^{w_n} - \sqrt{n}$

Limites et comparaison asymptotique

Exercice 2 (★☆☆☆☆)

Déterminer des équivalents simples des suites suivantes

1. $u_n = 4n^4 - 2n^2 + 1$
2. $v_n = \frac{n^5+n^4-n-1}{2n^2+n+14}$
3. $w_n = a^n + b^n$ avec $|a| > |b| > 0$
4. $a_n = e^{\frac{1}{n^2}}$
5. $b_n = \frac{2}{n^4} + \frac{3}{n^2}$
6. $c_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$

Exercice 3 (★☆☆☆☆)

Déterminer la limite des suites suivantes en utilisant des équivalents.

1. $u_n = \frac{3n^2-17}{6n^2-n-1}$
2. $v_n = \frac{\cos\left(\frac{1}{n}\right)}{3^n-2^n}$
3. $w_n = \frac{2n+2}{-n^2+3}e^{-n}$
4. $z_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$

Exercice 4 (★★☆☆☆)

À l'aide de limite de taux de variations déterminer les résultats suivants.

1. $\sin\left(\frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$
2. $\cos\left(\frac{1}{n}\right) = 1 + o\left(\frac{1}{n}\right)$
3. $e^{\frac{1}{n}} = 1 + \frac{1}{n} + o\left(\frac{1}{n}\right)$
4. $\sqrt{1+n} = \sqrt{n} + \frac{1}{2\sqrt{n}} + o\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$
5. $\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) \sim \frac{1}{n}$
6. $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e.$

Exercice 5 (★★☆☆☆)

Déterminer la limite des suites suivantes en utilisant des développements limités.

1. $u_n = n\sin\left(\frac{1}{n}\right)$
2. $v_n = \sqrt{n}\ln\left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)$
3. $w_n = \left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ (utiliser la forme exponentielle)
4. $z_n = n^2\left(e^{\sin\left(\frac{1}{n^2+1}\right)} - 1\right)$

Exercice 6 (★★★☆☆)

Montrer que $n! = o(n^n)$ et pour tout entier $m \geq 1, m^n = o(n!)$.

Exercice 7 (★★★☆☆)

Soit (u_n) une suite convergente à valeurs dans $\mathbb{Z}$ et ℓ sa limite. Montrer que

- $\ell \in \mathbb{Z}$
- (u_n) est constante égale à ℓ à partir d'un certain rang.

Exercice 8 (★★★☆☆)

On considère la suite (u_n) définie pour $n \geq 2$ par

$$u_n = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k^2-1}.$$

1. Montrer que pour tout $k \geq 2$, $\frac{1}{k^2-1} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k+1}\right)$.
2. En déduire $\lim u_n$.

Exercice 9 (★★☆☆☆) -Inspiré du Bac de Math Sujet 1 - 2023

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \geq 0$,

$$u_{n+1} = \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1.$$

1. Calculer u_1 et u_2 sous forme de fraction irréductible.
2. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).
3. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, n \leq u_n \leq n+1$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n).
4. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.
5. Montrer que $u_n \sim n$.
6. On considère la suite (v_n) définie par $v_n = u_n - n$.
   (a) Montrer que (v_n) est géométrique de raison de raison $\frac{3}{4}$. Quelle est la limite de (v_n) ?
   (b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n = \left(\frac{3}{4}\right)^n + n$.

Exercice 10 (★★★★☆)

On considère la suite positive (u_n) définie par $u_0 = 1, u_1 = 2$ et $\forall n \geq 0$,

$$u_{n+2} = \sqrt{u_n u_{n+1}}.$$

On pose $\forall n \in \mathbb{N}, v_n = \ln(u_n)$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a
$$v_{n+2} = \frac{1}{2}\left(v_{n+1} + v_n\right). \qquad (1)$$
2. Soit $r \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, montrer que la suite $w_n = r^n$ vérifie la relation (1) si, et seulement si $r \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$.
3. Montrer que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$ la suite $a + \frac{b}{(-2)^n}$ est solution de (1).
4. Calculer a et b tels que $v_n = a + \frac{b}{(-2)^n}$ pour tout n.
5. En déduire la limite de (v_n) puis celle de (u_n).

Suites définies par récurrence par des fonctions

Exercice 11 (★★☆☆☆) - Inspiré du Bac math Amérique du Nord 2024

On considère la fonction g définie sur $[0,1]$ par $g(x) = 2x - x^2$. On pose (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = g(u_n)$.

1. Montrer que g est strictement croissante sur $[0;1]$ et calculer $g(0)$ et $g(1)$.
2. Calculer u_1 et u_2.
3. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, 0 < u_n < u_{n+1} < 1$.
4. En déduire que u converge vers une limite $\ell \in [0,1]$ et donner la valeur de ℓ.
5. On pose (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \ln(1 - u_n)$.
   (a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison 2. Donner son expression en fonction de n.
   (b) En déduire l'expression de u_n en fonction de n et retrouver la limite trouvée précédemment.

Exercice 12 (★★★☆☆) -Inspiré du Bac math Amérique du Sud 2022

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 4$ et $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n^2.$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout n,
$$0 < u_n \leq 4.$$
3. Montrer que (u_n) est décroissante. En déduire que (u_n) converge.
4. Montrer que la limite ℓ de u_n vérifie $\ell = \frac{1}{5}\ell^2$. En déduire, la valeur de ℓ.
5. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $v_n = \ln(u_n)$ et $w_n = v_n - \ln(5)$.
   (a) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_{n+1} = 2v_n - \ln(5)$.
   (b) Montrer que (w_n) est géométrique de raison 2.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}, v_n = \ln\left(\frac{4}{5}\right)2^n + \ln(5)$.
6. Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$ et retrouver $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 13 (★★★★★)

On considère la fonction f définie sur $[0,1]$ par $f(x) = \frac{1}{1+x}$. On pose (u_n) définie par

$$\begin{cases} u_0 &= 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= f(u_n). \end{cases}$$

1. Montrer que f est strictement décroissante $[0;1]$ et calculer $f(0)$ et $f(1)$.
2. Calculer u_1, u_2, u_3, u_4 et u_5.
3. On considère la suite définie par $F_0 = 0, F_1 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$
   (a) Calculer $F_0, F_1, F_2, F_3, F_4, F_5, F_6$.
   (b) Résoudre l'équation $\ell^2 = \ell + 1$. On note φ la solution positive que vous trouverez et ψ l'autre.
   (c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \psi^n\right).$$
Indication : On pourra prouver la proposition $P(n)$: « $F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^n - \psi^n\right)$ *et* $F_{n+1} = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\varphi^{n+1} - \psi^{n+1}\right)$ ».

(d) Justifier que $F_n \underset{+\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\varphi^n$.

4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \frac{F_n}{F_{n+1}}$.

5. En déduire que $\lim u_n = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.