Soutien 15/11

Raisonnement par récurrence et calcul modulaire

Raisonnement par récurrence

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 10^n - 1$ est divisible par 9.

- Par récurrence
- À l'aide des modulo.

Exercice 2 (★★☆☆☆)

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, les deux propriétés

- $P(n)$: « $4^n - 1$ est divisible par 3 »
- $Q(n)$: « $4^n + 1$ est divisible par 3 »

Montrer que les deux propriétés sont héréditaires. Sont-elles vraies pour tout n ?

Exercice 3 (★★☆☆☆)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 2^{3n+5} + 3^{n+1}$ est divisible par 5.

- Par récurrence
- À l'aide des modulo.

Exercice 4 (★★★★☆)

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, 31^n + 6n - 1$ est divisible par 9.

Exercice 5 (★☆☆☆☆)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Exercice 6 (★☆☆☆☆)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Exercice 7 (★★★☆☆)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} k^3 = \left(\sum_{k=1}^{n} k\right)^2$$

de deux façons :

- Directement
- En utilisant la formule $\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Exercice 8 (★☆☆☆☆)

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}$$

Exercice 9 (★★☆☆☆)

On pose (u_n) définie par $u_0 = 1$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \sqrt{2+u_n}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$0 < u_n < u_{n+1} < 2.$$

Exercice 10 (★☆☆☆☆)

On pose (u_n) définie par $u_0 = 2$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \frac{u_n}{1+u_n}$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = \frac{2}{2n+1}.$$

Exercice 11 (★☆☆☆☆)

On pose (u_n) définie par $u_0 = 3$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n - 1$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = 2^{n+1} + 1.$$

Exercice 12 (★★☆☆☆)

Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall n \in \mathbb{N}$,

$$(1+x)^n \geq 1 + nx.$$

Exercice 13 (★★★☆☆)

On pose (u_n) définie par $u_0 = 0$ et $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = 2u_n + 2^n$. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n = n2^{n-1}$.