Soutien 2

Révisions sur les fonctions

Lecture graphique et droites affines

On rappelle que le graphe d'une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^2$ des points de la forme $(x, f(x))$ pour x parcourant I.

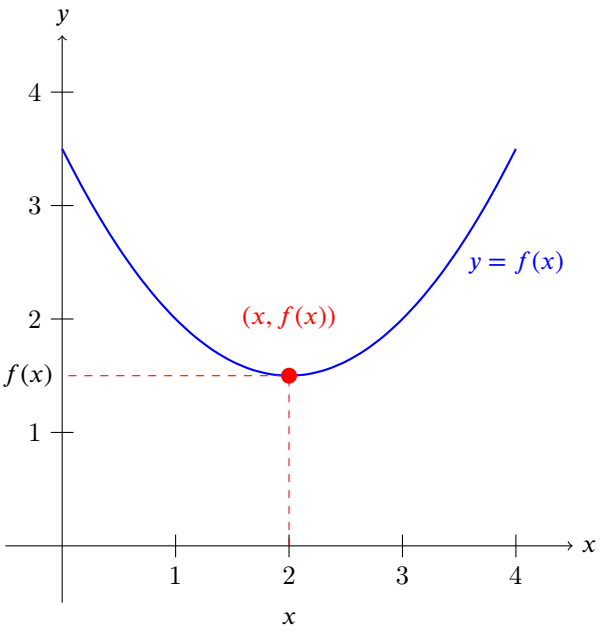

FIGURE 1 – Graphe d'une fonction

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

Tracer chacune des droites ci-dessous sur le même graphique.

1. $y_1 = x$
2. $y_2 = 2x - 1$
3. $y_3 = -\frac{1}{2}x + 1$
4. $y_4 = 2$
5. $y_5 = -x + 2$

Exercice 2 (★☆☆☆☆)

Tracer des fonctions vérifiant les conditions suivantes.

1. $f(-1) = -1, f(0) = 2, f(2) = 4$
2. $f(0) = -1, f(0) = 1, f(1) = -2$ avec f croissante sur $[-1, 0]$, décroissante sur $[1, 2]$ et $\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$.

3. $f(-2) = -4, f(0) = 1, f(1) = 3$ et $f'(0) = 1$
4. $f(-1) = f(1) = 1, f(0) = 2$ telle que 2 est le maximum de f et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
5. f telle que son graphe admet $y = x + 2$ pour tangente en -1 et $y = -x + 2$ pour tangente en 1 et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$.

Dérivation et développements limités

Exercice 3 (★★☆☆☆)

Pour chacune des fonctions ci-dessous déterminer son ensemble de définition, calculer sa dérivée, déterminer ses variations, l'équation de sa tangente en $a = 1$ et esquissez son graphe.

1. $y(x) = 2x - 1$
2. $f(x) = x^2 + x + 1$
3. $g(x) = x\ln(x)$
4. $h(x) = \sqrt{1 + x^2}$
5. $\varphi(x) = \dfrac{1}{1 - 2x}$
6. $\psi(x) = xe^{2x-2}$

Exercice 4 (★★☆☆☆)

Déterminer les développements limités suivants en 0.

1. DL_5 de $\cos(x)$
2. DL_2 de $\ln(1 - 2x)$.
3. DL_3 de e^{6x}.
4. DL_6 de $\sin(3x^2)$.

Exercice 5 (★★☆☆☆)

1. Pour chaque question calculer le(s) développement(s) limité(s) en 0 et en déduire la limite demandée.
   (a) DL_2 de $\cos(2x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\cos(2x) - 1}{x}$.
   (b) DL_1 de $\sin(x)$ et DL_2 de $1 - \cos(x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x\sin(x)}{1 - \cos(x)}$
   (c) DL_3 de $\sin(2x)$ et en déduire $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{x^2}{\sin(x) - x}$
   (d) DL_1 de $\sqrt{1 + 2x^2}$ et en déduire $\lim\limits_{x\to0} \dfrac{\sqrt{1 + 2x^2} - 1}{x^2}$.
2. Les fonctions suivantes sont-elles continues en 0 ?

(a)
$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \neq 0 &\longmapsto \frac{\cos(2x) - 1}{x} \\ 0 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

(b)
$$\begin{aligned} g : \quad]-2\pi, 2\pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \neq 0 &\longmapsto \frac{x\sin(x)}{1 - \cos(x)} \\ 0 &\longmapsto 2 \end{aligned}$$

(c)
$$\begin{aligned} h : \quad]-\pi, \pi[&\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \neq 0 &\longmapsto \frac{x^2}{\sin(x) - x} \\ 0 &\longmapsto 0 \end{aligned}$$

(d)
$$\begin{aligned} \varphi : \quad \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ x \neq 0 &\longmapsto \frac{\sqrt{1 + 2x^2} - 1}{x^2} \\ 0 &\longmapsto -1 \end{aligned}$$