Suites et séries de fonctions

Il s'agit d'une liste d'exercices corrigés que j'utilise pour les colles que je dispense au lycée Chateaubriand, destinée aux étudiant·e·s de deuxième année de classe préparatoire. Cette liste est mise à leur disposition dès que les chapitres correspondants ont été abordés.

Si vous travaillez sur cette liste au cours de l'année, il se peut que certains chapitres n'aient pas encore été étudiés. Lorsque la résolution d'un exercice fait appel à des notions qui ne sont abordées que plus tard dans l'année, je précise les outils utilisés sous forme de mots-clés. Si vous n'êtes pas encore familier·ère avec ces notions, n'hésitez pas à passer à l'exercice suivant.

De nombreux exercices et leurs corrigés proviennent de ma propre création. Il est donc possible qu'il subsiste des coquilles, des erreurs ou des pistes d'amélioration. Je procède d'ailleurs régulièrement à des corrections. Si vous avez des suggestions d'amélioration ou si certains arguments vous semblent peu clairs, n'hésitez pas à me contacter. Mes coordonnées figurent en bas de la dernière page du document.

Suites de fonctions

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

La suite de fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{nx}{1+n^2x} \end{array}$$

converge-t-elle simplement ? Uniformément ?

Exercice 2 (★☆☆☆☆)

La suite de fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc}]1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{1}{\ln(nx)} \end{array}$$

converge-t-elle simplement ? Uniformément ?

Exercice 3 (★☆☆☆☆)

La suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x}{1+\frac{x^2}{n^2}}$ converge-t-elle simplement ? Uniformément ? Uniformément sur tout segment ?

Exercice 4 (★★☆☆☆)

La suite de fonction

$$f_n : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \sqrt{\frac{1}{n} + x^2} \end{array}$$

converge-t-elle simplement ? Uniformément ? La suite de ses dérivées converge-t-elle uniformément (sans calcul) ?

Exercice 5 (★★★☆☆)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite de fonctions

$$f_n : \begin{array}{ccc} \left[0, \frac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^\alpha \cos(x)^n \sin(x) \end{array}$$

définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que (f_n) converge uniformément.

Exercice 6 (★★★☆☆)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Calculer

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^1 f(nx)dx.$$

Exercice 7 (★★★☆☆)

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{ccc}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie sur son ensemble de définition.
2. Calculer $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ et $\lim_{x\to 1^+} f(x)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 et donner les variations de f. Étudier sa convexité.
4. Esquissez le graphe de f.

Mots clés : *Continuité sous le symbole somme*

Exercice 8 (★★★☆☆)

Soit (a_n) une suite réelle croissante, à valeurs strictement positive et telle que $a_n \to +\infty$.
On considère

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-a_n t}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est intégrable et que
$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{a_n}.$$
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Mots clés : *Continuité sous le symbole somme, convergence dominée*

Exercice 9 (★★★☆☆)

Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}$$

puis la calculer (on admettra que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Mots clés : *Inversion série intégrale*

Exercice 10 (★★★★☆)

Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1} dt$ puis la calculer.
Mots clés : *Inversion série intégrale*

Exercice 11 (★★★★★)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, bornée telle que $f(0) = 0$. On pose

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{ntf\left(\frac{t}{n}\right)}{\left(1+t^2\right)^2} dt.$$

Montrer que u_n est bien définie pour tout n puis calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 12 (★★☆☆☆)

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ bornée. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx$.
Mots clés : *Intégrales à paramètres*

Exercice 13 (★★★★☆)

Justifier l'existence puis calculer

$$\int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{dx}\,.$$

(On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$*).*
Mots clés : *Intégrales impropres*

Exercice 14 (★★★★★)

On veut calculer $I = \int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t} dt$.

1. Montrer que I est bien définie (que l'intégrale existe).
2. On pose $v_n = \int_0^n \ln(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$. Montrer que $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$.
3. On pose $u_n = \int_0^1 \ln(x)\,(1-x)^n\,dx$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_n - \frac{1}{(n+2)^2}$.
   (b) En déduire que $u_n = \frac{-1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)$.
4. Montrer que $I = -\gamma$ où γ désigne la constante d'Euler, i.e.

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n).$$

Mots clés : *Intégrales impropre, inversion limite intégrale*

Exercice 15 (★★★★☆)

On pose

$$f : \begin{array}{rcl}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

2. Calculer $f'(x)$ et en déduire que

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x\sin(x)}{1 - x\cos(x)}\right).$$

Mots clés : *Dérivation sous le signe somme*

Exercice 16 (★★★★☆) - Méthode de Cavalieri

On considère $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente à termes positifs. On pose

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{Card}\left\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > t\right\}. \end{array}$$

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

Mots clés : *Inversion série intégrale*

Exercice 17 (★★★★☆)

Soit $b > 0$ et f_0 une fonction définie sur le segment $[0, b]$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, b], f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)dt$.

1. Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} f_n$.
2. Montrer que la somme $S(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est solution d'un problème de Cauchy.
3. Calculer la somme lorsque $b = 1$ et f_0 est le prolongement par continuité de $x \mapsto x\ln(x)e^x$.

Mots clés : *Dérivation sous le signe somme, équation différentielle*

Exercice 18 (★★★★★)

On pose

$$f: \begin{array}{ccl}]-1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right). \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[\,, f'(x) = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.
3. Trouver un équivalent simple de f en -1 et montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \frac{-\ln(x)}{2}$.
   Indication : Pour l'équivalent en $+\infty$ on pourra commencer par faire une intégration par partie de l'expression de $f'(x)$ trouvée dans la question précédente.

Mots clés : *Dérivation sous le signe somme*

Exercice 19 (★★★☆☆)

On pose

$$f: \begin{array}{ccl}]0, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right). \end{array}$$

Montrer que f est bien définie et donner un équivalent simple de f lorsque $x \to +\infty$.
On donne $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

Mots clés : *Dérivation sous le signe somme*

Exercice 20 (★★★★★)

On pose

$$\begin{array}{rccl} f: &]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \longmapsto & \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{1+nx}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et continue.
2. Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[\,, f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt$. Montrer que

$$f(x) = 1 - \frac{\ln(2)}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$

3. En déduire les valeurs des sommes

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n+1} \text{ et } S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Séries entières

Exercice 21 (★☆☆☆☆)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \left(a_n + b_n\right) x^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min\left(R_1, R_2\right)$ avec égalité si $R_1 \neq R_2$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n b_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq R_1 R_2$.

Mots clés : *Série entière*

Exercice 22 (★★☆☆☆)

Montrer à l'aide de la définition $e^z = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \dfrac{z^n}{n!}$ que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$.

Mots clés : *Série entière*

Exercice 23 (★★★☆☆)

On pose

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & x > 0 & \longmapsto & \exp\left(-\dfrac{1}{x}\right) \\ & x \leq 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe C^∞.
2. La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

Mots clés : *Série entière*

Exercice 24 (★★★☆☆)

Soit $n \geq 1$ et $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n}\, dt$.

1. Après avoir justifié que I_n existe pour tout $n \geq 1$ montrer que $\lim\limits_{n\to\infty} I_n = 0$.
2. À l'aide du changement de variable $u = t^n$ donner un équivalent de I_n en $+\infty$ (on ne cherchera pas à calculer $\int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u} du$).
3. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} I_n z^n$.

Mots clés : *Série entière, intégrale impropre*

Exercice 25 (★★★☆☆)

On considère la suite définie [1] par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1, u_{n+1} = 2u_n + 2^n$. On souhaite déterminer l'expression de u_n en fonction de n pour tout n. On pose $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0, u_n \leq 3^n$. En déduire que f est bien définie sur un intervalle non trivial $]-R; R[$.
2. À l'aide de la relation de récurrence montrer que
$$\forall -R < x < R, f(x) = \frac{x}{(1-2x)^2}.$$
3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \geq 0$.

Mots clés : *Série entière, combinatoire*

Exercice 26 (★★★☆☆)

Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1.

1. Déterminer une série entière $S(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ de rayon de convergence 1 telle que $\lim\limits_{x\to 1} S(x)$ existe et telle que $\sum_{n\geq 0} u_n$ ne converge pas.
2. On suppose désormais que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ et que $\lim\limits_{x\to 1} S(x) = \ell$. On veut montrer que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell$.
   (a) Montrer que $x \longmapsto S(x)$ est croissante sur $[0, 1[$.
   (b) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}, \sum\limits_{n=0}^{N} u_n \leq \ell$.
   (c) En déduire que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et que $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \ell$.
   (d) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0, \sum\limits_{n=0}^{+\infty} u_n \geq \ell - \varepsilon$.
   (e) Conclure.

Mots clés : *Série entière, inversion limite intégrale*

Exercice 27 (★★★★☆) Inspiré de CCINP 2023 (PSI)

On souhaite calculer $W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t)\, \mathrm{dt}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^\pi \cos(x\sin(t))\, \mathrm{dt}\,. \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer f' et f''.

1. Il s'agit d'une suite qui intervient dans des problèmes de répartition des carrés dans les corps finis.

3. On pose $h(x,t) = \cos(t)\sin(x\sin(t))$. Justifier que pour tout x la fonction $h(x,\cdot)$ est dérivable et calculer $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$.
4. En déduire que f est solution de l'équation différentielle

$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{E}$$

5. On suppose qu'il existe une solution de E développable en série entière sur un voisinage de 0 qu'on écrit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrer qu'alors $a_1 = 0$ et que $\forall n \geq 2, a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2}$.
6. Montrer que f est développable en série entière sur un voisinage de 0 et exprimer ses coefficients en fonction de W_n.
7. En déduire que f est l'unique solution de E vérifiant $f(0) = \pi$.
8. En déduire l'expression de W_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Mots clés :*Intégrales à paramètres, équation différentielle, série entière*

Exercice 28 (★★★★☆)

On pose $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de n éléments. Une involution de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation telle que $\sigma^2 = \sigma \circ \sigma = \mathrm{id}$. On pose u_n le nombre d'involutions de $\mathfrak{S}_n$. On souhaite calculer u_n pour tout n. On pose $u_0 = 1$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1, u_{n+1} = u_n + nu_{n-1}$.
3. On considère la série entière $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.
   (a) Montrer que le rayon de convergence R de f vérifie $R \geq 1$.
   (b) Montrer que
   $$\forall x \in]-R; R[, f'(x) = (1+x)f(x).$$
   (c) En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k!(n-2k)!2^k}$$
   où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

Mots clés : *Série entière, combinatoire*

Exercice 29 (★★★★★) - Nombres de Bell

On définit B_n, appelé *nombre de Bell*, le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Par convention, on pose $B_0 = 1$.

1. Calculer B_1, B_2 et B_3.
2. Montrer la *formule d'Aitken* :
$$\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$
3. On pose $B(x) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} B_n \dfrac{x^n}{n!}$.
   (a) Montrer que le rayon de convergence de B est infini.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, B(x) = e^{e^x - 1}$.
   (c) Montrer que pour $K \geq n, \forall k \in \mathbb{N}, \dfrac{(K+k)^n}{(K+k)!} \leq \dfrac{K^n}{j!K!}$.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $K \geq 2$ tel que $\dfrac{K^n}{K!} \leq 1$. Montrer la *formule de Dobiǹski* : $B_n = \left\lfloor \dfrac{1}{e} \sum\limits_{k=0}^{K} \dfrac{k^n}{k!} \right\rfloor + 1$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

Mots clés : *Série entière, combinatoire*

Exercice 30 (★★★★★) - Partitions d'entiers à sommants bornés

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Une écriture $n = s_1 + \cdots + s_m$ avec $s_1 \in \mathbb{N}^*$ s'appelle une *partition* de n et les entiers s_i des sommants. On définit $p_{n,m}$ le nombre de façon de partitionner n en au plus m sommants. Par convention on prendra $p_{0,m} = 1$. On pose

$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,m} x^n.$$

1. Montrer que le rayon de convergence de S est 1.
2. Montrer que $p_{n,m} = \#\left\{\left(\alpha_1, \ldots, \alpha_m\right) \in \mathbb{N}^m \mid \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + m\alpha_m = n\right\}$.
3. Montrer que $\forall x \in]-1, 1[, S(x) = \dfrac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$.
4. On s'intéresse désormais au cas $m = 3$.
   (a) Compléter les coefficients manquants a, b, c et d dans la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ suivante
   $$\frac{1}{(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)} = \frac{a}{(1-x)^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{17}{72}\frac{1}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{cx+d}{1+x+x^2}.$$
   (b) En déduire que $p_{n,3}$ est l'entier le plus proche de $\dfrac{1}{12}(n+3)^2$ *(on distinguera les quatre cas n pair ou non et n multiple de* 3 *ou non).*

Mots clés : *Série entière, combinatoire*

Exercice 31 (★★★★★) - Théorème de Molien

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $A = \mathbb{C}[X_1, \ldots, X_n]$ et pour $k \in \mathbb{N}$, A_k le sous-espace de A constitué des polynômes homogènes de degré k. Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe fini. On définit les morphismes de groupes

$$\rho : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(A) \\ g & \longmapsto & (P \mapsto P(g^{-1}(X_1, \ldots, X_n))) \end{array} \quad \text{et} \quad \rho^{(k)} : \begin{array}{ccc} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(A_k) \\ g & \longmapsto & (P \mapsto P(g^{-1}(X_1, \ldots, X_n))) \end{array}$$

où $g^{-1}(X_1, \ldots, X_n) = g^{-1}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$. Enfin, on définit $A_k^G = \left\{P \in A_k \mid \forall g \in G, \rho(P) = P\right\}$ et $a_k = \dim(A_k^G)$. On veut montrer le théorème de Molien : pour tout x suffisamment petit on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \frac{1}{\det(I_n - xg)}.$$

1. On pose $p = \dfrac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \rho^{(k)}(g)$.
   (a) Montrer que p est un projecteur sur A_k^G.
   (b) En déduire la formule de Burnside :
   $$a_k = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} \mathrm{Tr}\left(\rho^{(k)}(g)\right).$$
2. Soit $g \in G$ de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$.
   (a) Justifier qu'il existe un intervalle $]-r, r[$ que l'on précisera sur lequel
   $$\frac{1}{\det(I_n - xg)} = \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n} \right) x^k.$$
   (b) Justifier que tout élément $g \in G$ est diagonalisable. En déduire que $\mathrm{Tr}(\rho^{(k)}(g^{-1})) = \sum_{k_1 + \cdots + k_n = k} \lambda_1^{k_1} \cdots \lambda_n^{k_n}$.
3. Conclure.

Mots clés : *Série entière, groupes*

Exercice 32 (★★★★★) - Permutations et tangente

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est alternée lorsque $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \dots$. On note α_n le nombre de permutations alternées et, dans cet exercice, on s'intéresse à (T_n) définie par $\forall p \in \mathbb{N}, T_{2p} = 0$ et $T_{2p+1} = \alpha_{2p+1}$. On pose

$$T(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} T_{2p+1} \frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

1. Justifier que le rayon de convergence R de T satisfait $R \geq 1$.
2. Montrer que si σ est une permutation alternée de $\mathfrak{S}_{2p+1}$ alors $\sigma^{-1}(2p+1)$ est pair. Calculer T_1 et T_3.
3. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$,
$$T_{2p+1} = \sum_{q=0}^{p-1} \binom{2p}{2q+1} T_{2q+1} T_{2p-2q-1}.$$
En déduire la valeur de T_5.
4. Montrer que T est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle
$$y' = y^2 + 1. \tag{1}$$
5. Résoudre l'équation (1) et en déduire l'expression de T sur $]-R, R[$.

Mots clés : *Série entière, équations différentielles, combinatoire*

Éléments de corrections - Suites et séries de fonctions

Suites de fonctions

Exercice 1 (correction)

On a pour tout x, n, $\frac{nx}{1+n^2x} \leq \frac{nx}{n^2x} = \frac{1}{n}$ on a donc convergence uniforme vers 0.

Exercice 2 (correction)

On a pour tout n, x, $\frac{1}{\ln(nx)} \leq \frac{1}{\ln(n)}$ donc on a convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 3 (correction)

On voit qu'à x fixé on a toujours $f_n(x) \to x$ donc $f(x) = x$ est la limite simple de f. On a $\left|f(n) - f_n(n)\right| = \left|n - \frac{n}{2}\right| \to +\infty \neq 0$ donc la convergence n'est pas uniforme. Soit $I = [a; b]$ un segment. Alors, sur I, on a $x^2 \leq M^2$ avec $M = \max\{|a|, |b|\}$ donc $\left|f(x) - f_n(x)\right| \leq M\left(1 - \frac{1}{1+\frac{M^2}{n^2}}\right) \to 0$ donc on a convergence uniforme sur tout compact.

Exercice 4 (correction)

On remarque que (f_n) converge simplement vers $\sqrt{x^2} = |x|$. On a alors

$$f_n(x) - \sqrt{x^2} = \frac{\frac{1}{n} + x^2 - x^2}{\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + |x|} = \frac{1}{n\left(\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + |x|\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La convergence est donc uniforme. Si la suite des dérivées convergeait uniformément, la limite serait aussi dérivable. Ce n'est pas le cas car $|x|$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 5 (correction)

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(0) = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ fixé $f_n(\delta) = n^\alpha \cos(\delta)^n \sin(\delta)$ tend vers 0 par croissance comparée car $0 \leq \cos(\delta) < 1$. Donc, si (f_n) converge uniformément vers une fonction il s'agit de la fonction nulle. On étudie les variations de f_n. On a $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right], \forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned} f_n'(x) &= n^\alpha \left(\cos(x)^{n+1} - n\sin(x)^2\cos(x)^{n-1}\right) \\ &= n^\alpha \cos(x)^{n-1}\left(\cos(x)^2 - n\sin(x)^2\right) \\ &= n^\alpha \cos(x)^{n-1}\left(\cos(x) + \sqrt{n}\sin(x)\right)\left(\cos(x) - \sqrt{n}\sin(x)\right) \end{aligned}$$

Puisque cos et sin sont tous les deux positifs sur l'intervalle d'étude et que $f_n(0) = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ l'abscisse x_n du maximum f_n est atteint strictement entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que $\cos(x_n) = \sqrt{n}\sin(x_n)$, i.e. $x_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Il ne nous reste plus qu'à estimer $f_n(x_n)$. On a, en utilisant $\operatorname{Arctan}(u) = u + O\left(u^3\right)$ et $\cos(u) = 1 - u^2 + O\left(u^2\right)$ que $\cos\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \sim e^{-\frac{1}{2}}$. À l'aide d'un DL_1 de Arctan et de sin on a $\sin(x_n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. On en déduit que

$$\sup f_n = f_n(x_n) \sim e^{-\frac{1}{2}} n^{\alpha - \frac{1}{2}}.$$

Puisque f_n converge simplement vers 0 la convergence est uniforme si, et seulement si $f_n(x_n)$ tend vers 0, i.e. si, et seulement si $\alpha < \frac{1}{2}$.

Exercice 6 (correction)

On a pour tout $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} f(nx) = 0$ donc la limite simple de $f_n(x) = f(nx)$ sur $]0,1]$ est 0. Malheureusement la limite n'est pas uniforme parce que, par exemple, $f_n\left(\frac{a}{n}\right) = f(a)$ qui ne tend pas vers 0 si $f(a) \neq 0$. En fait, la limite est uniforme si et seulement si $f = 0$. On remarque que f est bornée. En effet, par définition de la limite, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \geq \delta$, $|f(x)| \leq 1$ (définition de la limite nulle en $+\infty$ avec $\varepsilon = 1$). Par ailleurs, f est continue par morceaux sur $[0, \delta]$ qui est un segment donc bornée. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$ par une constante disons M. On peut alors conclure de deux manières différentes.

Par convergence dominée. La constante M est intégrable sur $[0, 1]$ donc l'inégalité $|f(nx)| \leq M$ fournit une domination qui permet d'inverser limite et intégrale.

À la main. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $\forall y \geq \delta, |f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $1 > \nu > 0$. On a pour $n\nu \geq \delta$

$$\left|\int_0^1 f(nx)dx\right| = \underbrace{\left|\int_0^{\nu} f(nx)dx\right|}_{\leq \nu M} + \left|\int_{\nu}^1 f(nx)dx\right|.$$

Si on choisit $\nu = \frac{\varepsilon}{2M}$ on a alors $\left|\int_{\nu}^1 f(nx)dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}(1-\nu) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ on a donc $\left|\int_0^1 f(nx)dx\right| \leq \varepsilon$.

Exercice 7 (correction)

On rappelle qu'une série alternée est majorée en valeur absolue par son premier terme et est du signe de son premier terme.

1. Soit $x \geq 1$, la suite $f_n(x) = (-1)^n \frac{1}{\ln(nx)}$ est alternée, décroissante en valeur absolue et tend vers 0 donc la somme converge.
2. On pose $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$. On considère suite des restes pour $p \geq 2$,

$$\left|R_p(x)\right| = \left|\sum_{n\geq p} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}\right| \leq \frac{1}{\ln(px)} \leq \frac{1}{\ln(p)}.$$

Donc (R_p) converge uniformément vers 0 donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément vers $f(x)$. Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \ell_n = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On applique la même chose à la série de fonction $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$ qui converge donc vers $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$ lorsque x tend vers 1. On en déduit que

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{\ln(x)}}_{\to+\infty} + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}}_{\to S} \to +\infty.$$

3. On a $f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{x\ln(nx)^2}$. Il s'agit toujours d'une série alternée donc $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge sur $]1,+\infty[$ et la série des restes d'ordre p est majorée, en valeur absolue, par $\dfrac{1}{x\ln(px)^2} \leq \dfrac{1}{\ln(p)^2}$ par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(px)^2}$. La série des dérivées converge donc uniformément ce qui prouve que f est $\mathcal{C}^1$ et $\forall x \in]1,+\infty[$,
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x\ln(nx)^2}$$
qui est du signe du premier terme, i.e. de $\frac{-1}{x\ln(x)^2} < 0$ donc f est décroissante.
Pour $x > y, f'(x) - f'(y) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\left(\dfrac{1}{x\ln(nx)^2} - \dfrac{1}{y\ln(ny)^2}\right)$ qui est toujours alternée par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(px)^2}$. Elle est donc du signe de son premier terme qui est $\dfrac{1}{y\ln(y)^2} - \dfrac{1}{x\ln(x)^2} > 0$ donc f' est croissante donc f est convexe (pensez à ne pas dériver systématiquement pour établir la monotonie d'une fonction surtout lorsque vérifier la dérivabilité peut être pénible comme c'est le cas pour les limites de suites de fonctions ou pour les intégrales à paramètres).
4. Tracer le graphe d'une fonction qui ressemble à $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ sur l'intervalle de définition (attention qu'elle n'y ressemble qu'au tracer, pas de façon asymptotique).

Exercice 8 (correction)

1. Pour $t > 0$ fixé la suite $(-1)^{n+1}e^{-a_n t}$ est alternée (signe alterné, décroissante en valeur absolue et tend vers 0) donc la série converge, i.e. f est bien définie. On considère $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N}(-1)^{n+1}e^{-a_n t}$. Soient $\alpha > 0$. Puisqu'une série alternée est inférieure en valeur absolue à son premier terme, on a $\forall t \in [\alpha,+\infty[$,
$$\left|f(x) - f_N(x)\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty}(-1)^{n+1}e^{-a_n t}\right| \leq e^{-a_{N+1}t} \leq e^{-a_{N+1}\alpha}.$$
Ce qui prouve la convergence uniforme sur tout segment de fonctions continues donc f est continue.
2. En majorant la série par son premier terme on a
$$f_N(t) \leq e^{-a_0 t}$$
ce qui fournit une domination de la suite f_N par une fonction intégrable donc f est intégrable et on peut intervertir limite et intégrale ce qui donne
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t)dt &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} e^{-a_n t}dt \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{a_n} \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{a_n}\end{aligned}$$
3. On peut appliquer cela au cas particulier où $a_n = n$. Dans ce cas on a $f(t) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-t})^n = \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}$ de la forme $\frac{u'}{u}$ qui se primitive donc en $\ln(u)$. On a donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\int_0^{+\infty}\frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}dt = -\left[\ln\left(1+e^{-t}\right)\right]_0^{+\infty} = \ln(2).$$

Exercice 9 (correction)

On peut écrire
$$\frac{t}{e^t-1} = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = te^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}te^{-(n+1)t}.$$

Par ailleurs, pour tout n la fonction $te^{-(n+1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (car c'est un $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ par exemple). De plus, en intégrant par partie pour éliminer le t, on a

$$\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}dt = \left[\frac{-t}{n+1}e^{-(n+1)t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Puisque $f_n(t) = te^{-(n+1)t}$ est positive et que son intégrale est le terme général d'une série convergente l'inversion série-intégrale est légale. On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t-1}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 10 (correction)

Pas de problème de convergence en 0 et en $+\infty$ notre fonction est équivalence à e^{-t} positive et d'intégrale convergente donc tout converge bien. On a par ailleurs $\frac{1}{e^t+1} = e^{-t}\frac{1}{1+e^{-t}}$ et $e^{-t} < 1$ pour $t > 0$ donc on a le développement suivant $e^{-t}\frac{1}{1+e^{-t}} = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-nt} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-(n+1)t}$ dont le terme général est intégrable en valeur absolue donc on peut faire l'inversion série intégrale ce qui donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

Exercice 11 (correction)

On pose $g_n(t) = \frac{ntf\left(\frac{t}{n}\right)}{(1+t^2)^2}$. La fonction f est continue en 0 donc pas de problème d'intégrabilité en cette borne. Puisque f est bornée c'est un $O(1)$. Donc on a $\frac{ntf\left(\frac{t}{n}\right)}{(1+t^2)^2} = O\left(\frac{t}{(1+t^2)^2}\right)$ lorsque $t \to +\infty$ qui est intégrable car $\sim \frac{1}{t^2}$.

Puisque f est C^1 en 0 on a $f(u) = f'(0)u + o(u) = f'(0)u + u\varepsilon(u)$ avec $\varepsilon(u) \underset{u\to 0}{=} 0$. En appliquant cela à t **fixé** pour n grand on a $\lim g_n(t) = g(t) = \frac{f'(0)t^2}{(1+t^2)^2}$. On a donc la convergence simple de la suite (g_n) mais ça ne suffit pas.

On veut réussir à dominer g_n indépendamment de n. Pour cela on aimerait montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $f(x) \leq Mx$. Puisque f est supposée bornée $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, i.e. il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \geq x_0, |f(x)| \leq x$ (définition de la limite avec $\varepsilon = 1$). Par ailleurs, la fonction f est C^1 sur le segment $[0, x_0]$ donc, avec M' un majorant de $f'_{|[0,x_0]}$ par le théorème des accroissements finis appliqué à l'intervalle $[0, x]$ on a $|f(x) - f(0)| \leq M'(x-0)$, i.e. $|f(x)| \leq M'x$. Avec $M = \max M', 1$ on a bien $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq Mx$. On en déduit que

$$g_n(t) \leq \frac{Mt^2}{(1+t^2)^2}$$

et cette dernière fonction est indépendante de n et intégrable on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Il ne reste plus qu'à calculer la limite. On fait une intégration par partie de $\int_0^\infty \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}dt$ avec $u = t$ et $v' = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ qui se primitive en $\frac{-1}{1+t^2}$ (en effet, v' de la forme $\frac{U'}{U^2}$). Cela donne

$$\int_0^\infty \frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt = \underbrace{\left[\frac{-t}{1+t^2}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+t^2}dt}_{=\frac{\pi}{2}\text{ (car primitive Arctan)}}.$$

On peut enfin conclure que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_0^{+\infty}\frac{ntf\left(\frac{t}{n}\right)}{\left(1+t^2\right)^2}dt = \frac{\pi}{4}f'(0).$$

Exercice 12 (correction)

En appliquant le changement de variable $y = xn$ on a $\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{y}{n}\right)}{1+y^2} dy$. Il s'agit donc simplement de justifier l'inversion limite intégrale. Par hypothèse $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq M$ donc l'intérieur de l'intégrale est dominé par $\frac{M}{1+y^2}$ qui est intégrable et ne dépend pas de M donc $\lim_{n\to\infty} \int \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+y^2} dy = f(0)\frac{\pi}{2}$.

Exercice 13 (correction)

On a l'encadrement $0 \leq x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$ donc l'intégrande est bien intégrable en 0 et elle est continue par morceaux.

Grâce à la relation de Chasles on écrit

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{dx} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{dx}\,.$$

Pour $\frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}$ on a $k \leq \frac{1}{x} < k+1$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = k$. On a alors

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{dx} = \sum_{k=1}^{n} k \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} x \,\mathrm{dx} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k(k+1)}$$

la dernière ligne étant obtenue en séparant écrivant le numérateur $2k+1 = k + (k+1)$. Par ailleurs $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ce qui donne, par un télescopage puis un changement de variable,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}\right) + 1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2}\right) + 1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{n+1}\right).$$

En prenant la limite on a alors

$$\int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{dx} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 14 (correction)

1. Par croissance comparée $\ln(t)e^{-t} = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ en 0 et $\ln(t)e^{-t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ donc intégrable aux deux bornes (et continue entre les deux).
2. La suite de fonction $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0;n]}(t)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ est continue par morceaux et, par l'inégalité $\ln(1-u) \leq -u$ on a $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leq e^{-t}$ ce qui permet de dominer f_n par $\varphi(t) = e^{-t}$ qui est intégrable et donc d'intervertir limite et intégrale.
3. (a) On fait une intégration par partie dans u_{n+1} en primitivant 1 en x et en dérivant $\ln(x)(1-x)^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \int_0^1 1 \times \ln(x)(1-x)^{n+1}\,\mathrm{dx} = \left[x\ln(x)(1-x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 x\left(\frac{1}{x}(1-x)^{n+1} - (n+1)\ln(x)(1-x)^n\right)\mathrm{dx} \\ = -\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,\mathrm{dx} + (n+1)\int_0^1 x\ln(x)(1-x)^n\,\mathrm{dx} \\ = -\frac{1}{n+2} + (n+1)\int_0^1 (x-1+1)\ln(x)(1-x)^n\,\mathrm{dx} \\ = -\frac{1}{n+2} - (n+1)\underbrace{\int_0^1 \ln(x)(1-x)^{n+1}\,\mathrm{dx}}_{u_{n+1}} + (n+1)\underbrace{\int_0^1 \ln(x)(1-x)^n\,\mathrm{dx}}_{u_n}. \end{aligned}$$

Ce qui donne bien $(n+2)u_{n+1} = -\frac{1}{n+2} + (n+1)u_n$.

(b) En posant $w_n = (n+1)u_n$ on a $w_{n+1} = w_n - \frac{1}{n+2}$. Donc, par télescopage, $w_n - w_0 = \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{k+2}$ mais $w_0 = u_0 = -1$ donc $w_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$, d'où le résultat.

4. On a par changement de variable $x = \frac{t}{n}$, $v_n = \int_0^1 n\ln(nx)(1-x)^n \, \mathrm{d}x = n\left(u_n + \frac{\ln(n)}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}\right) \sim -\gamma$.

Exercice 15 (correction)

1. Soit $-1 < x < 1$. On a $\left|x^n \frac{\sin(nx)}{n}\right| \leq \left|x^{n+1}\right|$. Donc la série converge absolument. Donc $f(x)$ existe bien sur $]-1,1[$.

   On pose $f_n(x) = \frac{x^n \sin(nx)}{n}$ pour $n \geq 1$, $|x| < 1$. Par ailleurs pour tout $\delta < 1$ et $x \in [-\delta, \delta]$

   - D'après ce qui précède $\sum f_n$ converge simplement.
   - Soit $0 < \delta < 1$ et $x \in [-\delta, \delta]$ $\left|f_n'(x)\right| = \left|x^{n-1}\sin(nx) + x^n \cos(nx)\right| \leq 2\delta^{n-1}$ dont la série converge donc $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de la forme $[-\delta, \delta]$.

   donc f est $\mathcal{C}^1$ et on a $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)$.

2. On pose $g(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right)$ et on calcule séparément $f'(x)$ et $g'(x)$.

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx) = \mathfrak{I}\left(\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(xe^{ix}\right)^n\right) + \mathfrak{R}\left(-1 + \sum_{n=0}^{+\infty}\left(xe^{ix}\right)^n\right) \\
&= \mathfrak{I}\left(\frac{1}{x}\frac{1}{1-xe^{ix}}\right) + \mathfrak{R}\left(-1 + \frac{1}{1-xe^{ix}}\right) = \frac{1}{x}\frac{\mathfrak{I}\left(1-xe^{-ix}\right)}{|1-xe^{ix}|^2} + \frac{\mathfrak{R}\left(1-xe^{-ix}\right)}{|1-xe^{ix}|^2} - 1 \\
&= \frac{1}{x}\frac{x\sin(x)}{1-2x\cos(x)+x^2} + \frac{1-x\cos(x)}{1-2x\cos(x)+x^2} - 1 = \frac{\sin(x) + 1 - x\cos(x) - 1 + 2x\cos(x) - x^2}{1-2x\cos(x)+x^2} \\
&= \frac{\sin(x) + x\cos(x) - x^2}{1-2x\cos(x)+x^2}
\end{aligned}$$

   Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arctan}\left(\frac{x\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right)' &= \frac{\frac{(\sin(x)+x\cos(x))(1-x\cos(x)) - x\sin(x)(-\cos(x)+x\sin(x))}{(1-x\cos(x))^2}}{1+\left(\frac{x\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right)^2} \\
&= \frac{\sin(x) - x\sin(x)\cos(x) + x\cos(x) - x^2\cos(x)^2 + x\sin(x)\cos(x) - x^2\sin(x)^2}{(1-x\cos(x))^2 + x^2\sin(x)^2} \\
&= \frac{\sin(x) + x\cos(x) - x^2}{1-2x\cos(x)+x^2}.
\end{aligned}$$

On a donc $f'(x) = g'(x)$ donc f et g différent d'une constante. Mais $f(0) = 0$ et $g(0) = 0$ donc $\forall x \in]-1,1[\,, f(x) = g(x)$.

Exercice 16 (correction)

On considère $f_n(t) = \mathbb{1}_{\{u_n > t\}} = \begin{cases} 1 & \text{si } u_n > t \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. La fonction f_n vaut 1 sur $[0, u_n[$ puis 0 ensuite. Elle est donc intégrable et $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt = u_n$. On en déduit que

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{N} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{N} u_n$$

qui converge donc on peut intervertir série et intégrale ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Or la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est bien $f(t)$.

Exercice 17 (correction)

1. On remarque que f_1 étant une primitive d'une fonction continue, elle est de classe C^1. Par une récurrence qu'on ne détaillera pas f_n est de classe C^n. On a aussi $\forall n \in \mathbb{N}^*, f_n(0) = 0$ donc $\forall k \leq n-1, f_n^{(k)}(0) = f_{n-k}(0) = 0$. Par ailleurs, $f_n^{(n)} = f_0$ qui est bornée sur $[0, b]$ car continue sur un segment. On a alors, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$|f_n(x)| \leq ||f_0||_\infty \frac{x^n}{n!} \leq ||f_0||_\infty \frac{b^n}{n!}.$$

On en déduit que $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge normalement sur $[0, b]$.

2. Puisque la convergence est normale $S(x)$ existe pour tout $x \in [0, b]$ et on peut intervertir somme et dérivation ce qui donne

$$S'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1}(x) = f_0(x) + S(x).$$

Par ailleurs on a $S(0) = 0$ donc S est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' - y = f_0 \\ y(0) = 0. \end{cases}$$

3. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto \lambda e^x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de l'équation par la méthode de variation de la constante, i.e. avec $y_0(x) = \lambda(x)e^x$ ce qui donne $\lambda'(x)e^x = x\ln(x)e^x$. On en déduit que λ est une primitive de $x\ln(x)$. On peut en déterminer une en faisant une intégration par partie ce qui donne $\int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{4}(2\ln(x) - 1)$. On en déduit que $y_0(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln(x) - 1)e^x$ est une solution particulière et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) = y_0(x) + \lambda e^x$. Puisque $S(0) = 0$ on a $\lambda = 0$. Donc $S(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln(x) - 1)e^x$.

Exercice 18 (correction)

1. Attention à ne pas tomber dans le piège de prendre un équivalent : on rappelle que lorsque la série n'est pas de signe constant on ne peut pas conclure sur la convergence ou non d'une série. On propose tout de même deux méthodes.

   Méthode 1 : Par le théorème des séries alternée. Si $x = 0$ la série est nulle. Si $-1 < x < 0$ alors $\left|\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right| = -\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ qui est décroissante (par rapport à n) et tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. De même pour $x > 0$, $\left|\ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)\right| = \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ qui est décroissante et tend vers 0.

   Méthode 2 : Avec des développements limités. À x fixé on a $(-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right) = (-1)^n \frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il s'agit de la somme de deux suites qui sont le terme général de séries convergentes.

   Ainsi, f est bien définie sur son ensemble de définition. On pose $f_n(x) = (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ qui est de classe C^∞ et $f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$. À x fixé $f_n'(x)$ est le terme général d'une série alternée donc convergente et, puisqu'une série alternée est majorée, en valeur absolue, par son premier terme, on a pour $p \geq 2$, $\left|\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}\right| \leq \frac{1}{x+p} \leq \frac{1}{p-1} \to 0$. Ainsi la série des restes de $\sum f_n'$ converge uniformément vers 0 donc f est de classe C^1 et

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n}.$$

2. On a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x+n} = \lim_{N\to+\infty} \sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{x+n}$. Or

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N} \frac{(-1)^n}{x+n} &= \sum_{n=1}^{N}(-1)^n \int_0^1 t^{x+n-1}dt\\ &= \int_0^1 t^x \sum_{n=1}^{N}(-1)^n t^{n-1}dt\\ &= \int_0^1 -t^x \frac{1-(-t)^N}{1+t}dt = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt + (-1)^N \int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t}dt.\end{aligned}$$

Or $\left|\int_0^1 \frac{t^{x+N}}{1+t}dt\right| \leq \int_0^1 t^{x+N}dt \leq \frac{1}{x+N+1} \to 0$. Donc, par unicité de la limite on a bien $f'(x) = -\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.

3. On a $f(x) = -\ln(1+x) + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$. Le second terme étant bien défini sur $]-2,+\infty[$ il a une limite finie lorsque $x \to -1$. En revanche, $-\ln(1+x) \to +\infty$ donc $f(x) \underset{x\to-1^-}{\sim} -\ln(1-x)$.

   Par ailleurs, en intégrant par parties, en primitivant t^x, on a

$$f'(x) = \left[\frac{-t^{x+1}}{(x+1)(1+t)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{(x+1)(1+t)^2}dt = -\frac{1}{2(x+1)} - R(x)$$

   avec $0 \leq R(x) = \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{(x+1)(1+t)^2}dt \leq \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{(x+1)}dt = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$. Enfin, on a $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = -\frac{\ln(x+1)}{2} + \int_0^x R(t)dt$. Or

$$0 \leq R(t) \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2+t}dt = \ln(x+1) - \ln(x+2) + \ln(2) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \ln(2) \to \ln(2).$$

   On a donc

$$f(x) = -\frac{\ln(x)}{2} + O(1) \sim -\frac{\ln(x)}{2}.$$

Exercice 19 (correction)

On pose $f_n(x) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right)$ pour $n \geq 1$. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. Pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0$, $\frac{1}{nx^2} \leq \frac{\pi}{2}$ la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{nx^2}\right)\right)_{n\geq n_0}$ est décroissante (car sin est croissante sur $[0,\pi/2]$) et tend bien vers 0. Donc la suite de fonction (f_n) est alternée à partir d'un certain rang donc converge.

On considère $x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n x^2 \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right)$. Puisqu'une série alternée est inférieure à son premier terme en valeur absolue on a, à partir d'un certain rang,

$$\left|\sum_{n=p}^{+\infty}(-1)^n x^2\right| \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right) \leq \left|x^2 \sin\left(\frac{1}{px^2}\right)\right| \leq \frac{1}{p}$$

donc la suite de fonction $\left(\sum_{n=1}^{N}(-1)^n x^2 \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right)\right)$ converge uniformément ce qui permet d'échanger limite et somme. On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = -\ln(2) \text{ donc } f(x) \sim -\frac{\ln(2)}{x^2}.$$

Exercice 20 (correction)

1. À $x>0$ fixé la suite $\left(\dfrac{1}{1+nx}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0 donc la série converge simplement par le théorème des séries alternées. Soit $\alpha>0$ et $x\geq\alpha$. Puisqu'une série alternée est majorée en valeur absolue par son premier terme on a
$$\left|\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx}\right|\leq\frac{1}{1+px}\leq\frac{1}{1+p\alpha}\to 0.$$
Ainsi, f est limite uniforme sur $[\alpha,+\infty[$ de fonctions continues donc elle est continue sur tout intervalle de cette forme donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. On propose deux méthodes. L'une d'entre elle utilise le théorème de convergence dominée que vous n'avez peut-être pas encore vu, l'autre est plus élémentaire mais plus longue.

   Méthode 1 : Par convergence dominée. On peut voir $\dfrac{1}{1+t^x}$ comme la somme d'une série géométrique : $\dfrac{1}{1+t^x}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{nx}$. Par ailleurs la majoration $\left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{nx}\right|\leq 1=\varphi(t)$ par une fonction intégrable fournit une domination qui permet d'échanger limite et intégrale. D'où
$$\int_0^1\frac{1}{1+t^x}dt=\int_0^1\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{nx}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^1 t^{nx}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx}=f(x).$$

   Méthode 2 : À la main. Par définition pour tout $x>0$, $f(x)=\lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\dfrac{(-1)^n}{1+nx}$. D'autre part,
$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{1+nx}=\sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\int_0^1 t^{nx}dt=\int_0^1\sum_{n=0}^{N-1}(-t^x)^n dt=\int_0^1\frac{1-(-t^x)^N}{1+t^x}dt=\int_0^1\frac{1}{1+t^x}dt-(-1)^N\int_0^1\frac{t^{Nx}}{1+t^x}dt.$$
Or $\left|\int_0^1\dfrac{t^{Nx}}{1+t^x}dt\right|\leq\int_0^1 t^{Nx}dt=\dfrac{1}{1+Nx}\to 0$. Donc on a bien, par unicité de la limite, $f(x)=\int_0^1\dfrac{1}{1+t^x}dt$.

   Pour les mêmes raisons que dans la première question la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\dfrac{x}{1+nx}$ converge uniformément. En effet, on peut majorer uniformément les restes
$$\left|\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{(-1)^n x}{1+nx}\right|\leq\frac{x}{1+px}=\frac{1}{p}\frac{1+px-1}{1+px}=\frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{1+px}\right)\leq\frac{1}{p}.$$
Ceci qui permet d'échanger $\lim_{N\to+\infty}$ et $\lim_{x\to+\infty}$ dans les sommes partielles $\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\dfrac{x}{1+nx}$ (on doit commencer à 1 car pour $n=0$ le terme est x qui ne converge pas lorsque $x\to+\infty$). On obtient donc
$$xf(x)-x=\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x}{1+nx}\to\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$
Il ne reste plus qu'à remarquer, avec le changement de variable $k=n-1$ et ce qu'on a prouvé au début de la question, que
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}=-f(1)=-\int_0^1\frac{1}{1+t}dt=-\ln(2).$$
On a donc bien $f(x)=1-\dfrac{\ln(2)}{x}+o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. On sépare les termes pairs et impairs ce qui donne
$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n+1}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}+i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+2}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1}+\frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=f(2)+\frac{i}{2}f(1).$$

Grâce à la question précédente on a $f(1)=\ln(2)$ et $f(2)=\int_0^1 \frac{1}{1+t^2}dt=[\mathrm{Arctan}(t)]_0^1=\mathrm{Arctan}(1)=\frac{\pi}{4}$. Donc

$$S_1=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n+1}=\frac{\pi}{4}+\frac{i\ln(2)}{2}.$$

L'autre somme qui nous intéresse est $f(3)=\int_0^1\frac{1}{1+t^3}dt$. Nous allons faire une décomposition en éléments simples. On a $1+t^3=(1+t)(1-t+t^2)$ et $1-t+t^2$ à pour racines $\omega=e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\overline{\omega}$. En faisant les calculs on obtient

$$\frac{1}{1+t^3}=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{t-2}{1-t+t^2}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t}-\frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1}\right)+\frac{1}{2}\frac{1}{t^2-t+1}$$

Une primitive de $\frac{1}{1+t}$ est $\ln(1+t)$, une primitive de $\frac{2t-1}{t^2-t+1}$ est $\ln(t^2-t+1)$ et une primitive de $\frac{1}{t^2-t+1}$ s'obtient en passant à la forme canonique au dénominateur et en essayant de reconnaître la dérivée d'une $\mathrm{Arctan}(\cdot)$ comme ci-dessous

$$\begin{aligned}\frac{1}{t^2-t+1}=\frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}&=\frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\\&=\frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1}\\&=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right)'\end{aligned}$$

Au final, on a

$$\begin{aligned}S_3&=\frac{1}{3}\ln(2)-\frac{1}{6}\times 0+\frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)+\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)\\&=\frac{\ln(2)}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right)=\frac{\ln(2)}{3}+\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right)\\&=\frac{\ln(2)}{3}+\frac{\pi}{3\sqrt{3}}\end{aligned}$$

Séries entières

Exercice 21 (correction)

1. Soit $r<\min(R_1,R_2)$ alors la suite $a_nr^n+b_nr^n$ tend vers 0 comme somme de suite qui tend vers 0 donc $R\geq\min(R_1,R_2)$. Par ailleurs si $R_1\neq R_2$, disons $R_1<R_2$ alors pour $R_1<r<R_2$ la série $\sum_{n\geq 0}a_nr^n+b_nr^n$ diverge grossièrement comme somme d'une série convergente $\sum_{n\geq 0}b_nr^n$ et d'une série grossièrement divergente $\sum_{n\geq 0}a_nr^n$.
2. Soit $r<R_1R_2$. D'après le produit de Cauchy les coefficients du développement en série entière du produit $\sum_{n\geq 0}a_nx^n\sum_{n\geq 0}b_nx^n$ sont donné par $c_n=\sum_{k=0}^{n}a_kb_{n-k}$. On écrit $r=r_1r_2$ avec $r_1<R_1$ et $r_2<R_2$. Par hypothèse $\left|c_nr^n\right|=\left|\sum_{k=0}^{n}a_kb_k\right|r^n\leq\sum_{k=0}^{n}\left|a_kr_1^k\right|\left|b_{n-k}r_2^{n-k}\right|$ or $\left|b_{n-k}r_2^{n-k}\right|$ est bornée disons par M donc $\left|c_nr^n\right|\leq M\sum_{k=0}^{n}\left|a_k\right|r_1^k\leq M\sum_{k=0}^{+\infty}\left|a_k\right|x^k$ donc $\left|c_nr^n\right|$ est bornée donc $R\geq R_1R_2$.

Exercice 22 (correction)

On a

$$\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z_1^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{z_1^k}{k!}\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\right) && \text{(par produit de Cauchy)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}z_1^k z_2^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2} && \text{(par le binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

Exercice 23 (correction)

1. La fonction f est évidemment de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. De plus on a $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = 0$ et de même à gauche. Donc f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 0$. On montre très facilement par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}, \exists F_k$ un fraction rationnelle telle que $\forall x > 0, f^{(k)}(x) = F_k(x)e^{-\frac{1}{x}}$. Quelle que soit la limite de F_k en 0, par croissance comparée $\lim_{x\to 0^+} f^{(k)}(x) = 0 = f^{(k)}(0)$. Donc f est bien de classe C^∞.
2. Si f était développable en série entière en 0 on aurait alors pour un certain $R > 0$ et $x \in]-R, R[\,, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0)\dfrac{x^n}{n!} = 0$ or $\forall x > 0, f(x) > 0$ ce qui est impossible.

Exercice 24 (correction)

1. On a pour tout $n \geq 1$, pour tout $x > 1$, $f_n(t) = e^{-t^n} \leq e^{-t} = \varphi(t)$ et on remarque que φ est intégrable. Notre suite de fonction est donc bien intégrable car dominée et, d'après le théorème de convergence dominée on peut inverser limites et intégrales. Ce qui donne $\lim I_n = 0$.
2. Le changement de variable donne
$$\int_1^\infty e^{-t^n}dt = \frac{1}{n}\int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u^{\frac{n-1}{n}}}du$$
Toujours par le théorème de convergence dominée, puisque $u^{\frac{n-1}{n}} \geq 1$, $\frac{e^{-u}}{u^{\frac{n-1}{n}}} \leq e^{-u}$ donc $\int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u^{\frac{n-1}{n}}}du \to \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u}du = I$ donc $I_n \sim \frac{I}{n}$.
3. D'après la règle de D'Alembert le rayon de convergence est 1.

Exercice 25 (correction)

1. Par récurrence. On a bien $u_0 = 0 \leq 3^0 = 1$. Soit $n \geq 0$ tel que $u_n \leq 3^n$ alors $u_{n+1} = 2u_n + 2^n \leq 2\cdot 3^n + 3^n = 3\cdot 3^n = 3^{n+1}$.
On en déduit que le rayon de convergence R de f est supérieur à celui de $\sum 3^n x^n$ qui est $\frac{1}{3}$ d'après le critère de d'Alembert.
2. On a
$$\begin{aligned}
f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty}u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty}u_n x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}u_{n+1}x^{n+1} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}(2u_n+2^n)x^{n+1} = 2xf(x) + x\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n \\
&= 2xf(x) + \frac{x}{1-2x}
\end{aligned}$$
d'où le résultat attendu.

3. On calcule $\frac{x}{(1-2x)^2}$. On a

$$\begin{aligned}\frac{1}{(1-2x)^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)' \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n2^n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n2^{n-1}x^{n-1}\end{aligned}$$

En multipliant par x et en identifiant les coefficients par unicité des coefficients des séries entières on obtient $\forall n \geq 0, u_n = n2^{n-1}$.

Exercice 26 (correction)

À venir.

Exercice 27 (correction)

On pose $g(x,t) = \cos(x\sin(t))$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur le segment $[0;\pi]$ donc intégrable.
2. On a bien à t fixé $x \mapsto g(x,t)$ de classe C^∞ et toutes les conditions de continuité par morceaux des dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ en t. On a en plus la domination $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq 1$ donc on peut dériver sous le signe intégral, i.e.

$$\begin{aligned}f'(x) &= -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{d}t \\ f''(x) &= -\int_0^\pi \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

3. On a $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x\cos^2(t)\cos(x\sin(t))$.
4. En remplaçant $\sin^2(t)$ par $1-\cos^2(t)$ dans l'expression de $xf''(x)$ on a

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = \int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{d}t = [h(x,t)]_0^\pi = 0.$$

5. Avec $g(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ solution de E, puisqu'une série entière converge normalement sur son disque ouvert de convergence on peut dériver terme à terme et on a

$$xg''(x) + g'(x) + xg(x) = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1} + (n+1)^2 a_{n+1})x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière sur le disque de convergence on a bien $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 2, a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2}$.

6. On a $\forall u \in \mathbb{R}, \cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ donc, sous réserve de pouvoir intervertir série et intégrale on a

$$f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\sin(t)^{2n}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}W_n x^{2n}$$

Puisqu'on a $\int_0^\pi \left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sin^{2n}(t)\right|\mathrm{d}t \leq \frac{\pi}{(2n)!}$ par la majoration $\sin^{2n}(t) \leq 1$ sur $[0;\pi]$ et que $\frac{\pi}{(2n)!}$ est le terme général d'une série entière de rayon de convergence infinie alors l'interversion est bien légale et le rayon de convergence du développement de f au voisinage de 0 est infini.

7. On remarque qu'une solution g développable en série entière au voisinage de 0 a ses coefficients totalement déterminés par $g(0) = a_0$. En effet, la relation de récurrence donne $a_{2n+1} = 0$ pour tout n inconditionnellement à cause de la condition $a_1 = 0$ et de même les termes d'indice pair son fixés par le choix de a_0. Donc f est bien l'unique solution satisfaisant $f(0) = \pi$ sur son disque de convergence qui est $\mathbb{R}$.

8. En considérant les premiers termes de a_{2n} vérifiant la relation de récurrence

$$\begin{cases} a_0 & = \pi \\ a_1 & = 0 \\ a_n & = \frac{-a_{n-2}}{n^2}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$

on prouve facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = (-1)^n \frac{\pi}{2^{2n}(n!)^2}$. En identifiant a_{2n} à $(-1)^n \frac{W_n}{(2n)!}$ grâce à la question 6) on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \pi \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Exercice 28 (correction)

1. On a $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$.
2. On a bien $u_2 = 1 + 1$. Soit $n \geq 2$. On considère $E_{n+1} = \{1, \dots, n, n+1\}$ et $\sigma : E_{n+1} \longrightarrow E_{n+1}$. Si $\sigma(n+1) = n+1$ alors $\sigma_{|E_n}$ est une involution de $\mathfrak{S}_n$ réciproquement toute involution de $\mathfrak{S}_n$ induit une involution de $\mathfrak{S}_{n+1}$ qui fixe $n+1$. Si $\sigma(n+1) = j \neq n+1$ alors l'ensemble de $n-1$ éléments $E_n^j = E_n \setminus \{j\}$ est stable par σ qui est toujours une involution. Puisqu'on a n choix pour $j \neq n+1$ on a bien

$$u_{n+1} = \underbrace{u_n}_{\text{involutions qui fixent } n+1} + \underbrace{nu_{n-1}}_{\text{involutions qui ne fixent pas } n+1}.$$

3. (a) Puisque l'ensemble des involutions est inclus dans $\mathfrak{S}_n$ qui est de cardinal $n!$ on a $u_n \leq n!$ donc $\frac{u_n}{n!} \leq 1$ donc le rayon de convergence de f est supérieur à celui de $\sum_{n \geq 0} x^n$ qui est 1.

   (b) D'après le cours f est dérivable et on peut la dériver terme à terme sur $]-R; R[$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + nu_{n-1}}{n!} x^n \\ &= 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n}_{f(x)-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1} \times x}_{f(x)} = (1+x) f(x). \end{aligned}$$

   (c) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 du type $y' - a(x)y = 0$ dont les solutions sont de la forme $\lambda e^{A(x)}$ avec $A'(x) = a(x)$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} / f(x) = \lambda e^{x + \frac{x^2}{2}}$. Puisque $f(x) = u_0 = 1$ on a $\lambda = 1$.

   (d) On a par ailleurs

$$\begin{aligned} e^{x + \frac{x^2}{2}} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(x + \frac{x^2}{2} \right)^N = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} x^N \left(1 + \frac{x}{2} \right)^N \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} x^N \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{x^k}{2^k} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{\binom{N}{k}}{N! 2^k} x^{N+k}. \end{aligned}$$

   On en déduit qu'à n fixé, le terme a_n en x^n de la série entière ci-dessus est

$$\sum_{N+k=n / k \leq N} \frac{\binom{N}{k}}{N! 2^k}.$$

   Mais $A_n = \{(N,k), N \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq N, N+k = n\} = \left\{ (n-k, k), 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \right\}$. D'où

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{n-k}{k}}{(n-k)! 2^k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k!(n-2k)! 2^k}.$$

   Par unicité des coefficients du développement en série entière on a $a_n = \frac{u_n}{n!}$ ce qui permet de conclure.

Exercice 29 (correction)

1. Il n'existe que deux façons de partitionner $\{1\}$ donc $B_1 = 1$. De même, $\{1,2\}$ et $\{1\} \cup \{2\}$ sont les deux seules partitions de $\{1,2\}$ donc $B_2 = 2$. Enfin,
$$\{1,2,3\} = \{1,2\} \cup \{3\} = \{1,3\} \cup \{2\} = \{2,3\} \cup \{1\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$$
donne $B_3 = 5$.
2. On considère l'ensemble $E = \{1, 2, \dots, n+1\}$ et considère les partitions de E telles que la partie contenant $n+1$ possède $1 \leq k+1 \leq n$ éléments. À k fixé il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir une telle partie. Étant donné une partition $\mathcal{P} = \left\{E_1, \dots, E_r\right\}$ telle que $n+1 \in E_r$ alors $\mathcal{P} \setminus \left\{E_r\right\}$ forme une partition de $E \setminus E_r$ qui est un ensemble à $n-k$ éléments. Il y a donc $\binom{n}{k} B_{n-k}$ partitions de E telles que la partie contenant $n+1$ possède $k+1$ éléments. On obtient alors, en faisant le changement de variable $k \leftrightarrow n-k$
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$
3. (a) Un ensemble à n éléments possède 2^n parties. Une partition possède au plus n éléments (lorsqu'elle en possède n c'est qu'il s'agit de singletons). On obtient alors une majoration (très grossière) $B_n \leq n2^n$. On pose $u_n = \dfrac{n2^n}{n!}$ qui vérifie $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(n+1)2^{n+1}n!}{n2^n(n+1)!} = \dfrac{2}{n} \to 0$. Donc, par la règle de d'Alembert, le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ est infini et, par comparaison, celui de B l'est aussi.

   (b) On a
$$\begin{aligned}
B'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} && \text{(changement de variable)}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \frac{x^n}{n!} && \text{(formule d'Aitken)}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{B_k x^k}{k!} && \text{(simplification et regroupement des termes)}\\
&= e^x B(x) && \text{(on a reconnu un produit de Cauchy)}
\end{aligned}$$

   On obtient alors[2], $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(B(x))' = \dfrac{B'(x)}{B(x)} = e^x$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(B(x)) = e^x + c$ donc $B(x) = e^{e^x + c}$ mais $B(0) = 1 = e^{1+c}$ donc $c = -1$. Donc $B(x)$ coïncide avec $e^{e^x - 1}$ sur $\mathbb{R}^+$ et elles sont toutes les deux développables en séries entière sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, B(x) = e^{e^x - 1}$.

   (c) On a
$$\begin{aligned}
\frac{(K+k)!}{k!K!} &= \frac{(K+k)\cdots(k+1)}{K(K-1)\cdots 1} = \left(1 + \frac{k}{K}\right)\left(1 + \frac{k}{K-1}\right)\cdots(1+k)\\
&\geq \left(1 + \frac{k}{K}\right)^K \geq \left(1 + \frac{k}{K}\right)^n && \text{car } K \geq n
\end{aligned}$$
   ce qui prouve bien que ce que $\dfrac{(K+k)!}{k!K!} \geq \dfrac{(K+k)^n}{K^n}$.

   (d) On développe e^{e^x-1} en série entière pour pouvoir calculer B_n en identifiant les coefficients des deux séries. On a
$$\begin{aligned}
e^{e^x-1} &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!}\\
&= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n x^n}{n!} \right) \frac{1}{k!}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

2. On se restreint aux réels positifs pour être sûr que $B(x) > 0$ et donc que son logarithme ait un sens.

On en déduit, par identification, que $\forall n \in \mathbb{N}$, $B_n = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^n}{k!}$. Enfin, pour $K \in \mathbb{N}$ tel que $\frac{K^n}{K!} \le 1$ on a

$$\frac{1}{e}\sum_{k=K}^{+\infty}\frac{k^n}{k!} = \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(K+k)^n}{(K+k)!} \le \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!} = 1$$

donc $0 < B_n - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{K-1}\frac{k^n}{k!} \le 1$ puis $B_n - 1 \le \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{K-1}\frac{k^n}{k!} < B_n$. Ce qui prouve bien la formule voulue.

Référence : Analyse combinatoire - Charon, Hudry.

Exercice 30 (correction)

1. Puisque $p_{n,m}$ ne tend pas vers 0 on a $R \le 1$. Par ailleurs, lorsqu'on écrit $p_{n,m} = s_1 + \cdots + s_m$ on a nécessairement $0 \le s_i \le n$ donc ce qui permet d'injecter les partitions de n en au plus m sommants dans $\{0, \dots, n\}^m$ donc $p_{n,m} \le (n+1)^m$ qui est polynomial en n donc $R \ge 1$.
2. On pose $A_{n,m} = \left\{ (s_1, \dots, s_m) \in \mathbb{N}^m \,\middle|\, \begin{array}{c} s_1 + \cdots + s_m = n \\ 0 \le s_1 \le \cdots \le s_m \end{array} \right\}$ et $B_{n,m} = \left\{ (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m \mid \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + m\alpha_m = n \right\}$. Par définition, $p_{n,m} = \#A_{n,m}$. On pose l'application $f : (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \mapsto (\alpha_m, \alpha_m + \alpha_{m-1}, \dots, \alpha_m + \alpha_{m-1} + \cdots + \alpha_1)$ de $B_{n,m}$ dans $A_{n,m}$ qui est bien définie est injective car elle peut être définie par la multiplication matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_m \\ \alpha_{m-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ et la matrice est inversible car de déterminant 1.

   L'inverse de cette application est $f^{-1} : (s_1, \dots, s_m) \mapsto (s_m - s_{m-1}, s_{m-1} - s_{m-2}, \dots, s_1)$ qui est aussi bien défini. On a donc bien le résultat demandé.
3. Pour tout $|x| \le 1$, $\frac{1}{1-x^s} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{sk} = \sum_{k=0}^{+\infty}\delta_{s,k}x^k$ avec $\delta_{s,k} = 1$ si $k \in s\mathbb{Z}$ et $\delta_{s,k} = 0$ sinon. En particulier on remarque que pour tout s et k on a $\delta_{s,k} = \delta_{s,s-k}$ ce qui facilite le calcul des produits. Donc

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} &= \prod_{s=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{sk}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{s_1+\cdots+s_m=n} \delta_{1,s_1}\cdots\delta_{m,s_m}\right)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+m\alpha_m=n} 1\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{B_{n,m}} 1\right)x^n. \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,m}x^n = S(x).
\end{aligned}$$

4. On s'intéresse désormais au cas $m = 3$.
   (a) En multipliant de part et d'autre part $(1-x)^3$ puis en évaluant en $x = 1$ on a $a = \frac{1}{2\times 3} = \frac{1}{6}$. De même, en multipliant par $1 + x$ et en évaluant en $x = -1$ on a $b = \frac{1}{8}$. En multipliant par x et en prenant la limite on a $0 = \frac{1}{8} - \frac{17}{72} + c$ ce qui donne $x = \frac{1}{9}$ puis, en évaluant en $x = 0$ on a $1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{17}{72} + \frac{1}{8} + d$ ce qui donne $d = \frac{2}{9}$.

   (b) Il s'agit maintenant de développer en série entière la fraction de droite et d'identifier avec les coefficients de la série de gauche à l'aide de l'unicité des coefficients du développement en série entière sur un intervalle non trivial. On y va terme par terme. On commence par les plus faciles

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ et } \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$$

   On remarque ensuite que $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$ et $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)''$ ce qui permet d'obtenir les développement en série entière de ces deux fractions en dérivant terme à terme (par convergence normale sur tout compact des séries entières). On a, après changement de variables,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \text{ et } \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

Enfin, il reste à traiter $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$ que l'on développe en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$. On trouve

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{1-j^2x} + \frac{1}{1-jx} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(j^{2n}+j^n\right)x^n$$

avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2 = \overline{j}$ les racines de X^2+X+1. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,3}x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{12} + \frac{n+1}{4} + \frac{17}{72} + \frac{1}{8}(-1)^n + \frac{1}{9}\left(j^{2n}+j^n\right)\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{7}{72} + \frac{1}{8}(-1)^n + \frac{1}{9}\left(j^n+\overline{j^n}\right)\right)x^n.\end{aligned}$$

Lorsque n est un multiple de 3 on a $j^n + \overline{j^n} = 2$ et sinon $j^n + \overline{j^n} = -1$. Ceci permet d'obtenir :

Si n est pair, multiple de 3 $\;p_{n,3} = \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{7}{72} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9} = \frac{1}{12}(n+3)^2 + \frac{1}{4}$.

Si n est pair, non multiple de 3 $\;p_{n,3} = \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{7}{72} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{1}{12}$.

Si n est impair, multiple de 3 $\;p_{n,3} = \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{7}{72} - \frac{1}{8} + \frac{2}{9} = \frac{1}{12}(n+3)^2$.

Si n est pair, non multiple de 3 $\;p_{n,3} = \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{7}{72} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{1}{3}$.

Dans tous les cas on a $\left|p_{n,m} - \frac{1}{12}(n+3)^2\right| \leq \frac{1}{3}$ or $p_{n,m}$ est un entier. C'est donc l'entier le plus proche de $\frac{1}{12}(n+3)^2$ (attention, il ne s'agit ni de la partie entière, ni de la partie entière supérieure).

Référence : Analyse combinatoire - Charon, Hudry.

Exercice 31 (correction)

Correction à venir.

Exercice 32 (correction)

1. Puisque les permutations alternées forment un sous-ensemble de $\mathfrak{S}_n$ on a la majoration de $T_{2p+1} \leq (2p+1)!$ donc $\dfrac{T_{2p+1}}{(2p+1)!} \leq 1$ donc le rayon de convergence R de T est supérieur à celui de $\sum x^n$ qui vaut 1.
2. L'entier $\sigma^{-1}(2p+1)$ est l'indice pour lequel σ vaut $2p+1$. Les valeurs atteintes en indice impair sont inférieures strictement aux valeurs prises par σ à l'indice précédent et à l'indice suivant. Puisque $2p+1$ est la valeur maximale prise par σ elle est forcément atteinte en un indice pair. On $T_1 = 1$ et $T_3 = 2$ car il y a seulement deux permutations alternées dans $\mathfrak{S}_3$ qui sont (2 3 1) et (1 3 2) (on doit nécessairement avoir 3 en indice 2 d'après ce qui vient d'être dit).
3. On considère une permutation alternée σ et j telle que $\sigma(2j) = 2p+1$. Les valeurs prises à gauche $\sigma(1) < \sigma(2) > \cdots > \sigma(2j-1)$ respectent l'alternance tout comme celles de droite $\sigma(2j+1) < \sigma(2j+2) > \cdots > \sigma(2p+1)$. On note S_g les valeurs de gauche et S_d celles de droite. En faisant correspondre bijectivement S_g avec $\{1,\ldots,2j-1\}$ et S_d avec $\{1,\ldots,2p-2j+1\}$ en respectant l'ordre on fait correspondre à σ deux permutations alternée σ_g et σ_d de $\mathfrak{S}_{2j-1}$ et $\mathfrak{S}_{2p-2j+1}$. Réciproquement, en choisissant $2j-1$ éléments dans $\{1,\ldots,2p\}$ (les valeurs S_g) ce qui fixe les $2p-2j+1$ restantes (les valeurs de S_d) et en choisissant deux permutations alternée $\sigma_g \in \mathfrak{S}_{2j-1}$ et $\sigma_d \in \mathfrak{S}_{2p-2j+1}$ on peut bien reconstruire une unique permutation alternée $\sigma \in \mathfrak{S}_{2p+1}$. On a $\binom{2p}{2j-1}$ façons de choisir les valeurs de S_g puis T_{2j-1} façons de choisir σ_g et $T_{2p-2j+1}$ façons de choisir σ_d. En sommant sur l'indice auquel apparaît $2p+1$ on obtient avec le changement de variable $q = p - j$

$$T_{2p+1} = \sum_{j=1}^{p}\binom{2p}{2j-1}T_{2j-1}T_{2p-2j+1} = \sum_{q=0}^{p-1}\binom{2p}{2q+1}T_{2q+1}T_{2p-2q-1}.$$

On en déduit que $T_5 = \binom{4}{1}T_1T_3 + \binom{4}{3}T_3T_1 = 16$.

4. On peut dériver dans la somme par convergence normale sur tout compact des séries entières

$$T'(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} T_{2p+1} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$

Or, en remarquant que lorsque j est impair pour tout k soit k soit $j-k$ est pair, on a le produit de Cauchy suivant :

$$T(x)^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{T_k}{k!} \frac{T_{j-k}}{(j-k)!} \right) x^j = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} T_k T_{2p-k} \right) \frac{x^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{p-1} \binom{2p}{k} T_{2q+1} T_{2p-2q-1} \right) \frac{x^{2p}}{(2p)!} = T'(x) - 1$$

l'avant dernière égalité étant obtenue en sommant les T_k pour k impair ce qui élimine aussi le cas $p = 0$ pour lequel on a seulement l'indice $k = 0$.

5. Soit y une solution de l'équation. On a alors $(\mathrm{Arctan}(y))' = \dfrac{y'}{y^2+1} = 1$. Ceci implique qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\mathrm{Arctan}(y) = x + c$, i.e. $y(x) = \tan(x+c)$. Puisque $T(0) = 0$ on peut prendre $c = 0$. On a donc $\forall x \in]-R, R[\,, T(x) = \tan(x)$.

Référence : Analyse combinatoire - Charon, Hudry.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : `fabien.narbonne@posteo.net` **Site internet :** `https://fabiennarbonne.fr`