Séries

Il s'agit d'une liste d'exercices corrigés que j'utilise pour les colles que je dispense au lycée Chateaubriand, destinée aux étudiant·e·s de deuxième année de classe préparatoire. Cette liste est mise à leur disposition dès que les chapitres correspondants ont été abordés.

Si vous travaillez sur cette liste au cours de l'année, il se peut que certains chapitres n'aient pas encore été étudiés. Lorsque la résolution d'un exercice fait appel à des notions qui ne sont abordées que plus tard dans l'année, je précise les outils utilisés sous forme de mots-clés. Si vous n'êtes pas encore familier·ère avec ces notions, n'hésitez pas à passer à l'exercice suivant.

De nombreux exercices et leurs corrigés proviennent de ma propre création. Il est donc possible qu'il subsiste des coquilles, des erreurs ou des pistes d'amélioration. Je procède d'ailleurs régulièrement à des corrections. Si vous avez des suggestions d'amélioration ou si certains arguments vous semblent peu clairs, n'hésitez pas à me contacter. Mes coordonnées figurent en bas de la dernière page du document.

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

Étudier la convergence de la série de terme général $\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\frac{1}{n}$.

Exercice 2 (★★☆☆☆)

Pour quels $a\in\mathbb{C}$ a-t-on la convergence de la série de terme général $u_n=\left(1+\frac{a}{n}\right)^n-\frac{n-1}{n}e^a$?

Exercice 3 (★★☆☆☆)

Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{\mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n)}$

Exercice 4 (★★☆☆☆)

Étudier la série de terme général $u_n=\alpha^{\sqrt{n}}$ pour $\alpha>0$ (on discutera en fonction de la valeur de α si c'est nécessaire).

Exercice 5 (★★☆☆☆)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n=\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$ avec $\alpha>0$ (on discutera du résultat en fonction de la valeur de α si c'est nécessaire).

Exercice 6 (★★☆☆☆)

On pose $u_0=1$ et $u_{n+1}=\sqrt{1+u_n}-1$. Après avoir justifié que $\lim u_n=0$ étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 7 (★★★☆☆)

On considère $\sigma:\ \mathbb{N}^*\longrightarrow\mathbb{N}^*$ une injection. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1}\frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 8 (★★★☆☆)

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $0<u_0<1$ et $u_{n+1}=u_n\cdot(1-u_n)$.

1. Montrer que (u_n) tend vers 0.
2. Donner un équivalent simple de $\frac{1}{u_{n+1}}-\frac{1}{u_n}$.
3. La série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 9 (★★★★☆)

1. On considère une suite (u_n) à valeurs complexes. Montrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.

2. On considère la suite u_n définie par $u_1 = \sqrt{1}, u_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ et pour tout $n \geq 1, u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 10 (★★★★★)

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes sans racine entière. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geq 0} \ln \left| \frac{P(n)}{Q(n)} \right| .$$

Exercice 11 (★★★★☆)

Justifier l'existence puis calculer

$$\int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{dx} .$$

(On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Mots clés : *Intégrales impropres*

Exercice 12 (★★★★★)

On pose $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \ln\left(1 + u_n\right)$. Étudier la convergence de la série de terme général (u_n).

Mots clés : *Séries entières*

Éléments de corrections - Séries

Exercice 1 (correction)

Il suffit de faire un développement limité du sinus $\frac{1}{\sqrt{n}}\sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)-\frac{1}{n}=\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}+O\left(\frac{1}{n^2\sqrt{n}}\right)\right)-\frac{1}{n}=O\left(\frac{1}{n^3}\right)$. Donc notre série est absolument convergente donc convergente.

Exercice 2 (correction)

Grâce à l'expression $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}$ on obtient l'expression $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=e^a-\frac{a^2}{2n}e^a+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ à l'aide de développements limités à l'ordre 2. En sommant, on obtient alors

$$u_n=\left(1-\frac{a^2}{2}\right)e^a\cdot\frac{1}{n}+\underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{terme général d'une série convergente}}$$

On en déduit que la série de terme général converge si et seulement si la série de terme général $\left(1-\frac{a^2}{2}\right)e^a\cdot\frac{1}{n}$ converge ce qui est le cas seulement si $\left(1-\frac{a^2}{2}\right)e^a=0$, i.e. $a^2=2$ donc $a\in\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$.

⚠ Cet exercice est une excellente illustration du fait qu'on ne peut pas brutalement sommer des équivalents. En effet, si malgré les recommandations des professionnels vous vous y risquez, puisque $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ tend vers e^a on aurait $u_n\sim\frac{1}{n}\cdot e^a$ qui n'est jamais le terme général d'une série convergente.

Astuce

Comme vous pouvez le constater j'utilise le développement limité $e^u=u+O(u^2)$ qui est une sorte d'hybride entre le développement à l'ordre 1 qui est $e^u=u+o(u)$ et celui à l'ordre 2 qui est $e^u=u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)$. L'avantage de cette écriture est qu'elle est aussi compacte qu'un développement à l'ordre 1 mais donne plus d'information. Pour vous en convaincre essayez de refaire l'exercice en faisant des développements à l'ordre 1 (vous devriez échouer puisqu'on a un $o\left(\frac{1}{n}\right)$ à la fin qui ne nous permet pas de conclure) et en faisant des développements à l'ordre 2 (vous devriez réussir mais avec des calculs beaucoup plus pénibles car vous traînerez des termes d'ordre 2 qui se contenteraient bien volontiers de rester sous forme de $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$).

Exercice 3 (correction)

Pour $n\geq 2$, $n-1$ et n sont premiers entre eux donc $n(n-1)\mid \mathrm{ppcm}(1,2,\ldots,n)$ donc $\frac{1}{\mathrm{ppcm}(1,\ldots,n)}\leq\frac{1}{n(n-1)}\sim\frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. Par positivité notre série converge.

Exercice 4 (correction)

Si $\alpha\geq 1$ la suite ne tend pas vers 0 et donc la série de terme générale (u_n) ne converge pas.

Si $0<\alpha<1$ on utilise la définition générale de l'exponentiation pour un exposant non entier $u_n=\alpha^{\sqrt{n}}=e^{\sqrt{n}\ln\alpha}$. On remarque alors que $n^2u_n\to 0$ par croissance comparée ce qui prouve que $\sum u_n$ converge (pour faire proprement la croissance comparée poser $N=-\sqrt{n}\cdot\ln\alpha$).

Exercice 5 (correction)

On fait des développements limités successifs. On a $\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right) = 1 - \frac{1}{n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)$ puis

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)\right) = -\frac{1}{n^{2\alpha}} + O\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right) \sim -\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

Puisque $-\frac{1}{n^{2\alpha}}$ **est de signe constant** il s'agit du terme général d'une série de même nature que $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$. Cette dernière converge donc si et seulement si $\alpha > \frac{1}{2}$.

Exercice 6 (correction)

On remarque que la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{1+x} - 1$ laisse l'intervalle $[0,1]$ invariant et est croissante et continue sur cet intervalle. On en déduit que (u_n) est monotone et bornée donc qu'elle converge vers un point fixe de f. La fonction f a deux points fixes -1 et 0 et seul 0 appartient à $[0,1]$ donc $\lim u_n = 0$. On peut alors faire un développement limité de u_{n+1} qui donne $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - 1 = 1 + \frac{u_n}{2} + O\left(u_n^2\right) - 1 = \frac{u_n}{2} + O\left(u_n^2\right)$. On a alors $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ et la règle de D'Alembert nous permet de conclure que $\sum u_n$ converge.

Exercice 7 (correction)

L'idée est de considérer la suite $S_{2N} - S_N$ où $S_N = \sum_{n=1}^{N} \frac{\sigma(n)}{n^2}$, la suite des sommes partielles. On a alors

$$S_{2N} - S_N = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\sigma(n)}{n^2} \geq \frac{1}{4N^2} \sum_{n=N+1}^{2N} \sigma(n).$$

On remarque ensuite que $\sum_{n=N+1}^{2N} \sigma(n) \geq \sum_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$. En effet, il s'agit d'une somme de N entiers distincts. On peut alors conclure que $S_{2N} - S_N \geq \frac{N(N+1)}{8N^2} \sim \frac{1}{8}$. On en déduit que notre série diverge (si elle convergeait on aurait $S_{2N} - S_N$ qui tendrait vers 0).

Exercice 8 (correction)

1. On vérifie tout d'abord que la fonction $x \mapsto x \cdot (1-x)$ définie sur $[0;1]$ est bien à valeurs dans $[0;1]$. On a $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq 1 - x \leq 1$ donc en multipliant les deux inégalités on a bien $0 \leq f(x) \leq 1$. On en déduit par récurrence que pour tout n on a $0 \leq u_n \leq 1$. Notre suite est donc bornée est $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc elle est décroissante et minorée donc converge vers un point fixe de f. Le seul point fixe de f est 0 donc (u_n) tend bien vers 0.
2. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} &= \frac{1}{u_n} \cdot \left(\frac{1}{1-u_n} - 1\right) \\ &= \frac{1}{u_n} \cdot \left(1 + u_n + O(u_n^2) - 1\right) \\ &= 1 + O(u_n) \end{aligned}$$

   Donc $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \sim 1$.
3. La suite (1) est le terme général d'une série divergente. On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) \sim \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$

   Par télescopage $\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \sim \frac{1}{u_n} \sim n$. Donc $u_n \sim \frac{1}{n}$. Il s'agit donc du terme général d'une série divergente.

Exercice 9 (correction)

1. On a $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_{n+1} - u_n = u_{N+1} - u_1$ par téléscopage ce qui répond à la question.
2. La question précédente nous suggère de nous intéresser à la série de terme général $u_{n+1} - u_n$. Lorsqu'on voit une différence de deux racines c'est souvent un bon réflexe de passer à la forme conjuguée pour faire disparaître les racines

$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n)}{u_{n+1} + u_n} = \frac{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}} - 1 - \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}}{u_{n+1} + u_n}$$

Les 1 se simplifient et on retrouve une différence de racines. On remarque qu'en réitérant le procédé les deux vont se simplifier. En somme on simplifie considérablement le numérateur en rajoutant des termes au dénominateur.

$$u_{n+1} - u_n = \frac{\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{1 + \cdots + \sqrt{n+1}} + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{n}}\right) \cdot \left(\sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n+1}} + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}\right) \cdots \left(\sqrt{n + \sqrt{n+1}} + \sqrt{n}\right)}$$

Il ne nous reste alors plus qu'à minoré le numérateur pour obtenir un grand O du terme général de notre série. On a les minorations grossières mais suffisantes

$$\sqrt{k + \sqrt{k + 1 + \ldots \sqrt{n}}} \geq \sqrt{\underbrace{\sqrt{\ldots}}_{n-k \text{ fois}} \sqrt{n}} = n^{\frac{1}{2^{n-k}}} \geq n^{\frac{1}{2^{n+1-k}}} \text{ et } \sqrt{k + \sqrt{k + 1 + \ldots \sqrt{n+1}}} \geq (n+1)^{\frac{1}{2^{n+1-k}}} \geq n^{\frac{1}{2^{n+1-k}}}$$

On en déduit que

$$\left(\sqrt{1 + \cdots + \sqrt{n+1}} + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{n}}\right) \cdot \left(\sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n+1}} + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}\right) \cdots \left(\sqrt{n + \sqrt{n+1}} + \sqrt{n}\right) \geq 2^n \prod_{k=1}^{n} n^{\frac{1}{2^k}}$$

or

$$\prod_{k=1}^{n} n^{\frac{1}{2^k}} = n^{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k}} \geq \sqrt{n}.$$

Donc $u_{n+1} - u_n \leq \frac{\sqrt{n+1}}{2^n \sqrt{n}} = O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ donc la série converge donc u_n converge.

Je mentionne l'existence d'une autre méthode qui ne fait pas intervenir les séries. On peut poser $v_n = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots + \sqrt{1}}}$, i.e. $v_1 = 1$ et $v_{n+1} = f(v_n)$ avec $f(x) = \sqrt{1+x}$. On peut montrer que v_n tend vers $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (exercice) puis que

$$v_n \leq u_n \leq 2v_n$$

(exercice) ce qui permet de conclure que (u_n) converge puisqu'elle est croissante et majorée. On peut même majorer u_n par $2^{1/4} v_n$ ce qui donne une encore meilleure majoration de la limite.

Exercice 10 (correction)

Remarquons tout d'abord que si $\deg P \neq \deg Q$ alors $\frac{P(n)}{Q(n)}$ tend soit vers 0 soit vers ∞ donc $\ln\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|$ ne tend pas vers 0 et notre série diverge grossièrement. On suppose donc que $\deg P = \deg Q = d$ et on note $P = a_d X^d + \cdots + a_0$ et $Q = b_d X^d + \cdots + b_0$.

Une condition nécessaire pour que la série converge est que $\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right| \to 1$ or $\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right| \sim \left|\frac{a_d}{b_d}\right|$ i.e. $|a_d| = |b_d|$. Quitte à factoriser au numérateur par a_d et au numérateur par b_d on peut supposer que les polynômes P et Q sont unitaires.

On va ensuite effectuer des développements limités pour conclure. On a

$$\frac{P(n)}{Q(n)} = \frac{P(n)}{n^d} \cdot \frac{1}{1+\underbrace{\left(Q(n)/n^d - 1\right)}_{\to 0}} = \frac{P(n)}{n^d} \cdot \left(1 - \underbrace{\left(Q(n)/n^d - 1\right)}_{=\frac{b_{d-1}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \qquad \text{(On utilise } \frac{1}{1+u} = 1 - u + O(u^2))$$

$$= \left(1 + \frac{a_{d-1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{b_{d-1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right) = 1 + \frac{a_{d-1} - b_{d-1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right| = \frac{a_{d-1} - b_{d-1}}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \qquad \text{(On utilise } \ln(1+u) = u + O(u^2)).$$

Le $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quoiqu'il contienne est le terme général d'une série convergente. Quant au $\frac{a_{d-1}-b_{d-1}}{n}$ c'est le terme général d'une série convergente si et seulement si $a_{d-1} = b_{d-1}$. En conclusion, la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|$ converge si, et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

- $\deg P = \deg Q$
- $|a_d| = |b_d|$ et $b_d a_{d-1} = a_d b_{d-1}$.

Astuce

Comme vous pouvez le constater j'utilise le développement limité $\ln(1+u) = u + O(u^2)$ qui est une sorte d'hybride entre le développement à l'ordre 1 qui est $\ln(1+u) = u + o(u)$ et celui à l'ordre 2 qui est $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. L'avantage de cette écriture est qu'elle est aussi compacte qu'un développement à l'ordre 1 mais donne plus d'information. Pour vous en convaincre essayez de refaire l'exercice en faisant des développements à l'ordre 1 (vous devriez échouer puisqu'on a un $o\left(\frac{1}{n}\right)$ à la fin qui ne nous permet pas de conclure) et en faisant des développements à l'ordre 2 (vous devriez réussir mais avec des calculs beaucoup plus pénibles car vous traînerez des termes d'ordre 2 qui se contenteraient bien volontiers de rester sous forme de $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$).

Exercice 11 (correction)

On a l'encadrement $0 \leq x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$ donc l'intégrande est bien intégrable en 0 et elle est continue par morceaux.

Grâce à la relation de Chasles on écrit

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \mathrm{d}x\,.$$

Pour $\frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}$ on a $k \leq \frac{1}{x} < k+1$ donc $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = k$. On a alors

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} k \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k(k+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k(k+1)}$$

la dernière ligne étant obtenue en séparant écrivant le numérateur $2k+1 = k + (k+1)$. Par ailleurs $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ce qui donne, par un télescopage puis un changement de variable,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}\right) + 1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2}\right) + 1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{n+1}\right).$$

En prenant la limite on a alors

$$\int_0^1 x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 12 (correction)

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \ln(1+x)$ est stable sur cet intervalle donc (u_n) est bien définie et à valeurs positives. Par ailleurs, par concavité de f son graphe se situe sous sa tangente en 0 qui est $y = x$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+u_n) \leq u_n$. La suite u est donc décroissante et minorée par 0 donc converge vers une limite ℓ qui vérifie $\ell = f(\ell)$ par continuité de f.

L'équation $\ell = \ln(1+\ell)$ a pour unique solution $\ell = 0$ par stricte concavité de f. On en déduit que u converge vers 0. Ceci nous permet de faire un développement limité de $u_{n+1} = \ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right) = u_n\left(1 - \frac{u_n}{2} + o\left(u_n\right)\right)$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on va chercher α de telle sorte que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge.

$$\begin{array}{rrl}
 & u_{n+1}^\alpha & = u_n^\alpha\left(1 - \frac{u_n}{2} + o\left(u_n\right)\right)^\alpha \\
DL_1 \text{ de } (1+x)^\alpha & u_{n+1}^\alpha & = u_n^\alpha\left(1 - \frac{\alpha u_n}{2} + o\left(u_n\right)\right) \\
\text{donc} & u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha & = -\frac{\alpha u_n^{1+\alpha}}{2} + o\left(u_n^{1+\alpha}\right) \\
(\text{pour } \alpha = -1) & \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} & = \frac{1}{2} + o(1) \\
\text{donc} & \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} & \sim \frac{1}{2}
\end{array}$$

Puisque la série des $\frac{1}{2}$ diverge (grossièrement) on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

Donc par télescopage $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \sim \frac{1}{u_n} \sim \frac{n}{2}$ donc $u_n \sim \frac{2}{n}$ qui est positif et le terme général d'une série divergente d'après le critère de Riemann donc $\sum u_n$ diverge.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : `fabien.narbonne@posteo.net` **Site internet :** `https://fabiennarbonne.fr`