

Réduction des endomorphismes

Il s'agit d'une liste d'exercices corrigés que j'utilise pour les colles que je dispense au lycée Chateaubriand, destinée aux étudiants de deuxième année de classe préparatoire. Cette liste est mise à leur disposition dès que les chapitres correspondants ont été abordés.

Si vous travaillez sur cette liste au cours de l'année, il se peut que certains chapitres n'aient pas encore été étudiés. Lorsque la résolution d'un exercice fait appel à des notions qui ne sont abordées que plus tard dans l'année, je précise les outils utilisés sous forme de mots-clés. Si vous n'êtes pas encore familier-ère avec ces notions, n'hésitez pas à passer à l'exercice suivant.

De nombreux exercices et leurs corrigés proviennent de ma propre création. Il est donc possible qu'il subsiste des coquilles, des erreurs ou des pistes d'amélioration. Je procède d'ailleurs régulièrement à des corrections. Si vous avez des suggestions d'amélioration ou si certains arguments vous semblent peu clairs, n'hésitez pas à me contacter. Mes coordonnées figurent en bas de la dernière page du document.

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

Soient f, g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E . Montrer que si f et g commutent alors pour tout $\lambda \in \text{Sp}(f)$, tout sous-espace propre $E_\lambda = \ker(f - \lambda \text{id}) \subseteq E$ de f est stable par g .

Exercice 2 (★☆☆☆☆)

Soit $M \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $M^{-1} = P(M)$.

Mots clés : *Polynômes annulateurs*

Exercice 3 (★☆☆☆☆)

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'elle soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Mots clés : *Polynômes annulateurs*

Exercice 4 (★☆☆☆☆)

Décrire les espaces propres associés à l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n \in \mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n \in \mathbb{N}} \end{array}$$

Exercice 5 (★☆☆☆☆)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Quelles sont ses valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ? Quel est son polynôme minimal ?

Mots clés : *Version sans diago en commentaires*

Exercice 6 (★★☆☆☆)

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. On suppose que A^n converge vers une matrice B . Montrer que B est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres possibles.

Mots clés : *Espace vectoriel normé, polynôme annulateur*

Exercice 7 (★★☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $u \in \mathcal{L}(E)$ et

$$\begin{aligned} f_u : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ v &\longmapsto uv := u \circ v \end{aligned}$$

Montrer que $\mu_u = \mu_{f_u}$ où μ_u et μ_{f_u} désignent les polynômes minimaux respectifs de u et de f_u .

Mots clés : Polynôme minimal, polynômes annulateurs

Exercice 8 (★★☆☆☆)

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ est connexe par arc. Est-il convexe ?

Mots clés : Espace vectoriel normé, convexité

Exercice 9 (★★☆☆☆)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A . Que peut-on en déduire en termes d'espaces propres ?
2. Montrer que -1 est une valeur propre de A .
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A sans calcul de déterminant.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Quel est son polynôme minimal ?

Exercice 10 (★★☆☆☆)

Discuter la diagonalisabilité de l'endomorphisme

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto (1 + X^2) \cdot P'' \end{aligned}$$

Exercice 11 (★★☆☆☆)

Déterminer les espaces propres de l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto X P'. \end{aligned}$$

Exercice 12 (★★☆☆☆)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E . On suppose qu'il existe $m \geq 2$ un entier tel que $u^m = \underbrace{u \circ \dots \circ u}_{m \text{ fois}} = u$.

1. Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{im} u^{m-1}$.
2. On suppose E de dimension finie. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Mot clés : Polynômes annulateurs, version sans diago disponible

Exercice 13 (★★☆☆☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme tel que $P(A) = 0$. Montrer que pour toute valeur propre λ de A on a $P(\lambda) = 0$.

Exercice 14 (★★☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E . Montrer qu'on a équivalence entre

1. $\text{rg } f = \text{rg } f^2$
2. $\text{im } f = \text{im } f^2$
3. $\ker f = \ker f^2$
4. $\text{im } f \oplus \ker f = E$

Exercice 15 (★★☆☆☆) oral Mines-Ponts

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = g(x)v$.

Exercice 16 (★★★☆☆) Inspiré de Mines-Télécom PSI Mathématiques II 2022

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice admettant une valeur propre dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

1. Montrer que A possède deux valeurs propres complexes distinctes conjuguées.
2. Montrer qu'il existe une matrice $Q \in \text{GL}_2(\mathbb{R})$ et des réels a, b tels que

$$A = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

(Indication : On pourra considérer V un vecteur propre de A et l'écrire $V = W_1 + iW_2$ avec $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^2$).

Exercice 17 (★★★★☆☆)

Soit

$$\begin{aligned} u : \mathbb{K}_{n-1}[X] &\longrightarrow \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P &\longmapsto P(X+1). \end{aligned}$$

1. Montrer que χ_u , le polynôme caractéristique de u vérifie $\chi_u(X) = (X-1)^n$.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Déterminer des réels $a_0, \dots, a_{n-2}$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on a

$$P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

Mots clés : Trigonalisabilité, Cayley-Hamilton

Exercice 18 (★★★★☆☆)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel E de dimension finie et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u)$ est inversible si, et seulement si P est premier avec μ_u , le polynôme minimal de u .

Indication : on pourra commencer par justifier que si $P(u)$ est inversible alors son inverse est aussi dans $\mathbb{K}[u]$.

Mots clés : Polynôme minimal, polynômes annulateurs, Cayley-Hamilton

Exercice 19 (★★★★☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u &\longmapsto u + \text{Tr}(u) \text{id} \end{aligned}$$

1. Montrer que $\forall u \in \mathcal{L}(E)$, $\Phi^2(u) = (n+2)\Phi(u) - (n+1)u$.
2. Montrer que Φ est diagonalisable et décrire ses espaces propres.
3. Que vaut $\det(\Phi)$?

Mots clés : Polynôme minimal, polynômes annulateurs, Cayley-Hamilton

Exercice 20 (★★★★☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et

$$\begin{aligned}\Phi: \mathcal{L}(E) &\longrightarrow \mathcal{L}(E) \\ u &\longmapsto u + \operatorname{Tr}(u) \operatorname{id}\end{aligned}$$

Étudier la diagonalisabilité de Φ et calculer $\det(\Phi)$.

Indication : on pourra remarquer que 1 est une valeur propre évidente de Φ .

Mots clés : Version sans polynôme annulateur

Exercice 21 (★★★★☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 22 (★★★★☆)

1. Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $\operatorname{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.
2. Soient A, B deux matrices dont l'une des deux est inversible. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ où χ_C désigne le polynôme caractéristique d'une matrice C .
3. Montrer que le résultat reste vrai si on ne suppose plus que A ou B est inversible.

Mots clés : Densité, polynôme caractéristique

Exercice 23 (★★☆☆☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice. Montrer que $\det(e^A) = e^{\operatorname{Tr}(A)}$.

Mots clés : Exponentielle matrice, trigonalisation

Exercice 24 (★★★★☆)

Soit E un $\mathbb{K}$ -espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On pose C_f l'ensemble des endomorphismes $g \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent avec f . On suppose que f est diagonalisable et on note $\operatorname{Spec}(f)$ l'ensemble de ses valeurs propres et E_λ ses espaces propres associés.

1. Montrer que C_f est un espace vectoriel de dimension finie.
2. Montrer que $g \in C_f \Leftrightarrow \forall \lambda \in \operatorname{Spec}(f), E_\lambda$ stable par g .
3. En déduire un isomorphisme entre C_f et $\bigoplus_{\lambda \in \operatorname{Spec}(f)} \mathcal{L}(E_\lambda)$ puis qu'on a $\dim C_f = \sum_{\lambda \in \operatorname{Spec}(f)} \alpha_\lambda^2$ où α_λ est la multiplicité de λ .
4. On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $(\operatorname{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est une base de C_f .

Exercice 25 (★★★★☆) Inspiré d'un oral Central MP

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1 avec $n \geq 2$.

1. Montrer que $X(X - \operatorname{Tr}(A))$ est un polynôme annulateur de A .
2. En déduire que A est diagonalisable si, et seulement si $\operatorname{Tr}(A) \neq 0$ et que si $\operatorname{Tr}(A) = 0$ alors A est semblable à

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. Donner une base de vecteurs propres de $A = \begin{pmatrix} i \\ j \end{pmatrix}_{1 \leq i, j \leq n}$.

Mots clés : Polynôme minimal, polynômes annulateurs

Exercice 26 (★★★★☆☆)

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On considère l'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}_n[X] \\ P &\longmapsto P(X^2 + 1)^{(n)}. \end{aligned}$$

Après avoir justifié que f est bien définie discuter sa diagonalisabilité.

Exercice 27 (★★★★☆☆)

On pose

$$\begin{aligned} S : M_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow M_2(\mathbb{R}) \\ M &\longmapsto JMJ \end{aligned}$$

avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $S^2 = S \circ S = \text{id}$.
2. On pose $F = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / JMJ = M\}$ et $G = \{M \in M_2(\mathbb{R}) / JMJ = -M\}$. Montrer que $F \oplus G = M_2(\mathbb{R})$.
3. Que peut-on en déduire sur la diagonalisabilité de S ?
4. Quelles sont les dimensions de F et de G ?

Exercice 28 (★★★★☆☆)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & z & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C}$ pour que M_z soit diagonalisable.

Exercice 29 (★★★★☆☆) Inspiré d'un oral Mines-Pont

On considère $z \in \mathbb{C}$ et $M_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que M_z soit diagonalisable.

Exercice 30 (★★★★☆☆)

Soit $k \in \mathbb{C}$, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ? En déduire que le polynôme caractéristique de A s'écrit $\chi_A(X) = X^2(X - \lambda)(X - \mu)$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que λ et μ satisfont

$$\begin{cases} \lambda + \mu &= k \\ \lambda^2 + \mu^2 &= k^2 + 6 \end{cases}$$

En déduire les valeurs de λ et μ .

3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que A soit diagonalisable.

Exercice 31 (★★★★☆☆)

On considère une urne contenant 2 boules blanches et une boule rouge. On tire successivement des boules dans l'urne. Si on tire une boule blanche on la retire définitivement. Si on tire la boule rouge on la replace dans l'urne. On pose X_n le nombre de boules

blanches au n -ème tirage. On pose $x_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $y_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $z_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. On pose $M = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

- Étude de M .
 - Montrer que M est diagonalisable et déterminer une base de chacun de ses espaces propres.
 - Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Déterminer une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $U_{n+1} = AU_n$.
 - En déduire l'expression de U_n en fonction de n .
 - Que peut-on dire du comportement asymptotique de x_n, y_n et z_n ? Est-ce surprenant ?

Mots clés : Réduction, Probabilité

Exercice 32 (★★★☆☆) Inspiré de CCINP PSI 2023

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et

$$M(a, b) = \begin{pmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & b & a \\ a & \cdots & a & a & b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

que l'on pourra écrire $M(a, b) = bI_n + aM(1, 0)$. On notera $P_{a,b}$ son polynôme caractéristique.

- Montrer que $P_{1,0} = (X - (n-1))(X+1)^n$ (indication : question faisable sans calcul).
- On suppose dans cette question que $a \neq 0$. Montrer que $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right)$. En déduire l'ensemble des valeurs propres de $M_{a,b}$ ainsi que leur multiplicité.
- On pose $Q_{a,b}(X) = (X - (b-a))(X - (b + (n-1)a))$. Montrer qu'il s'agit d'un polynôme annulateur de $M(a, b)$.
- En déduire que $M(a, b)$ est diagonalisable pour tout $a, b \in \mathbb{C}$.
- Déterminer le reste de la division euclidienne de X^k par $Q_{a,b}$. En déduire l'expression de $M(a, b)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Mots clés : Polynômes annulateurs

Exercice 33 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts

Soit $n \geq 2$. Calculer le polynôme minimal ainsi que le déterminant de l'application

$$\Phi: \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array}$$

où A^T désigne la transposée de la matrice A .

Mots clés : Version sans diago disponible

Exercice 34 (★★★☆☆) Suites barypolygonaux régulières

On considère un triangle T_0 du plan représenté par 3 points complexes a_0, b_0, c_0 . On fixe $t \in]0, 1[$ et on construit un triangle T_1 représenté par les 3 points a_1, b_1 et c_1 qui sont les t -barycentres respectifs de (a_0, b_0) , (b_0, c_0) et (c_0, a_0) . Plus généralement on construit une suite de triangles a_n, b_n, c_n tels que

$$\begin{cases} a_n = ta_{n-1} + (1-t)b_{n-1} \\ b_n = tb_{n-1} + (1-t)c_{n-1} \\ c_n = tc_{n-1} + (1-t)a_{n-1} \end{cases}$$

- Montrer que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ avec $M = \begin{pmatrix} t & 1-t & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 1-t & 0 & t \end{pmatrix}$.
- On considère χ_M le polynôme caractéristique de M . Montrer que $\chi_M = (X-t)^3 - (1-t)^3$. En déduire que M a trois valeurs propres $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = t + j(1-t), \lambda_3 = t + j^2(1-t)$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
- Montrer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 .

4. On pose P la matrice de changement de base de la base canonique vers (v_1, v_2, v_3) et $D = P^{-1}MP$. Montrer que $M^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty}$

$$\frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Conclure : vers quoi tend la suite de triangle T_n ? Cette limite dépend-elle de t ?

Exercice 35 (★★★★☆) Inspiré de X-ENS MP-MPI math A 2024

Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $E_n = \{1, \dots, n\}$ et on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note aussi $\nu(\sigma)$ son nombre de point fixes, i.e. $\nu(\sigma) = \text{Card} \{i \in E_n \mid \sigma(i) = i\}$. On considère

$$M = - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \dots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

- Montrer que M est diagonalisable. Calculer ses valeurs propres ainsi que leur multiplicité (*Indication : observez bien la matrice avant de vous lancer dans un calcul de déterminant, il n'est pas nécessaire de le calculer*).
- En déduire l'égalité

$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X^{\nu(\sigma)} = (X + n - 1)(X - 1)^{n-1}.$$

- Calculer les trois sommes suivantes :

$$\Sigma_1 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \quad \Sigma_2 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \nu(\sigma) \quad \Sigma_3 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma) + 1}.$$

- On dit qu'une permutation σ n'ayant aucun point fixe est un *dérangement* et on note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que

$$\text{Card} \{ \sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1 \} = \text{Card} \{ \sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1 \} + (-1)^{n-1}(n-1)$$

Exercice 36 (★★★★★)

Soit p un nombre premier.

- Déterminer $q = \text{Card} (\text{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$.
- Montrer que $\forall A \in M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), A^{q+2} = A^2$.
- On considère désormais $q = \text{Card} (\text{GL}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}))$. A-t-on

$$\forall A \in M_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), A^{q+3} = A^3?$$

Mots clés : Réduction, Polynôme minimal, théorème de Lagrange, Cayley-Hamilton, anneaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, polynôme annulateur

Exercice 37 (★★★★★)

On considère un groupe G fini d'ordre n et $\rho : G \longrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ un morphisme de groupes.

- Montrer que tout élément de l'image de ρ est diagonalisable.
Indication : on pourra essayer de trouver un polynôme annulateur des éléments de l'image.
- Montrer que si G est commutatif alors les éléments de $\text{im } \rho$ sont diagonalisables dans une base commune.

Mots clés : Groupe fini, Réduction avec polynôme annulateur

Exercice 38 (★★★★★)

Soit $E = C^0([0, 1], \mathbb{R})$ et V l'endomorphisme de E défini par $V(f)(x) = \int_0^x f(t) dt$. On munit E du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t) dt.$$

1. Montrer que V est continu et qu'il ne possède pas de valeur propre.
2. Déterminer l'adjoint V^* de V et calculer $V^*(f)'$.
3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $V \circ V^*$.

Mots clés : *Espaces préhilbertiens, continuité des applications linéaires*

Exercice 39 (★★★★★)

On considère $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x) dx.$$

On définit l'endomorphisme

$$\begin{aligned} u : \quad \mathbb{R}[X] &\longrightarrow \mathbb{R}[X] \\ P &\longmapsto [(1 - X^2)P']' = \frac{d}{dX} \left[(1 - X^2) \frac{d}{dX} P \right]. \end{aligned}$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n := u|_{\mathbb{R}_n[X]}$ définit un endomorphisme.
2. Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint pour le produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$.
3. Justifier que u_n est diagonalisable et que ses valeurs propres sont $-k(k+1)$ pour $0 \leq k \leq n$.
4. On pose $P_n(X) = \frac{d^n}{dX^n} [(X^2 - 1)^n] = ((X^2 - 1)^n)^{(n)}$.
 - (a) Montrer que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
 - (b) En déduire que $(P_k)_{0 \leq k \leq n}$ est une base de vecteurs propres de u_n .

Mots clés : *Espaces préhilbertiens, réduction des endomorphismes autoadjoints*

Exercice 40 (★★★★☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice. On pose $C(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})\}$ sa classe de conjugaison. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si $C(A)$ est fermée.

Mots clés : *Polynôme minimal, polynômes annulateurs, Cayley-Hamilton*

Exercice 41 (★★★★★)

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice. On pose $C(A) = \{P^{-1}AP \mid P \in \text{GL}_2(\mathbb{R})\}$ sa classe de conjugaison. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si $C(A)$ est connexe par arcs.

Mots clés : *Réduction, connexité par arcs, théorème spectral (facultatif)*

Éléments de corrections - Réduction des endomorphismes

Exercice 1 (correction)

On remarque que 1 est une valeur propre évidente de A . La matrice $A - I$ est de rang 1 donc $\ker(A - I)$ de dimension 1 par le théorème du rang. L'autre valeur propre satisfait

$$\text{Tr}(A) = 1 + \lambda = 2$$

donc 1 est de multiplicité $2 > \dim \ker(A - I)$ donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 (correction)

Puisque M est inversible, 0 n'est pas une valeur propre. Donc son polynôme minimal μ n'est pas divisible par X donc son coefficient constant a n'est pas nul. On en déduit que $\frac{1}{a}M^{-1}\mu(M) = 0$ donc $M^{-1} = P(M)$ avec $P = -\frac{1}{a}(\mu - a)$.

On peut aussi faire un raisonnement similaire avec le polynôme caractéristique et le théorème de Cayley-Hamilton

Exercice 3 (correction)

1. Soit A telle que $A^3 + A = 0$. La matrice est donc annulée par le polynôme

$$P = X(X^2 + 1) = X(X - i)(X + i).$$

Donc les valeurs propres d'une telle matrice appartiennent à $\{0, -i, i\}$. Une condition nécessaire pour que A soit diagonalisable est que ses valeurs propres soient réelles. Donc il faut que 0 soit la seule valeur propre. Son polynôme minimal μ est alors X^m pour un certain $m \geq 1$. Cependant, par définition, on doit avoir $\mu|P$, i.e. $m \leq 1$. Donc $\mu = X$ et donc $A = 0$. Réciproquement, $A = 0$ est bien diagonalisable. Donc, une matrice réelle telle que $A^3 = -A$ est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0$.

2. On a $A^3 = -A$ et $A \neq 0$ donc d'après la question précédente A non diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 4 (correction)

Tout réel λ est une valeur propre. Chaque espace propre $\ker(f - \lambda \text{id})$ est la droite vectorielle des suites géométriques de raison λ .

Exercice 5 (correction)

On remarque que -1 est une valeur propre évidente. Puisque $M + I_3$ est de rang 1 la dimension de l'espace propre E_{-1} associé à -1 est 2 par le théorème du rang. La somme des valeurs propres étant égale à la trace de la matrice, la dernière valeur propre λ satisfait $-1 + -1 + \lambda = 0$ donc $\lambda = 2$. L'espace propre E_2 associé à 2 est de dimension ≥ 1 (car il ne peut être réduit à $\{0\}$) et de dimension ≤ 1 car $\dim E_1 \leq \dim \mathbb{R}^3 - \dim E_{-1} = 1$. La dimension de chaque espace propre est donc égale à la multiplicité des valeurs propres associées donc la matrice est diagonalisable. Si vous avez déjà vu qu'une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples alors on peut conclure qu'il s'agit de $\mu_M = (X + 1)(X - 2)$. Sinon on sait qu'il s'agit soit de $(X + 1)(X - 2)$ soit de $(X + 1)^2(X - 2)$ car il divise le polynôme caractéristique et possède les mêmes racines. Il suffit alors de calculer $(M + I_3)(M - 2I_3)$ pour conclure.

Exercice 6 (correction)

L'application $C \mapsto C^2$ définie sur les matrices est continue car chaque coefficient de C^2 est une expression continue des coefficients de C . Donc $A^{2^n} = (A^2)^n$ converge vers $B^2 = B$ donc $X(X - 1)$ est un polynôme annulateur scindé simple de B donc B diagonalisable et ses valeurs propres sont dans $\{0, 1\}$.

Exercice 7 (correction)

On remarque que $f_u^2(v) = f_u(uv) = u^2v$ et, par une récurrence élémentaire, $\forall k \geq 1, f_u^k(v) = u^k v$. On en déduit que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ on a $P(f_u)(v) = P(u)v$ ce qui prouve que si P annule u alors $P(f_u)$ est l'application nulle donc P annule f_u . Réciproquement, si P est un polynôme annulateur de f_u alors $\forall v \in \mathcal{L}(E), P(u)v = 0$. En particulier, pour $v = \text{id}_E$ on a $P(u) = 0$. Donc P annule u . Les idéaux des polynômes annulateurs de u et f_u étant égaux, ils sont engendrés par le même polynôme unitaire ; leurs polynômes minimaux qui sont donc égaux.

Exercice 8 (correction)

Soit A une matrice diagonalisable, i.e. $\exists P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = D$ diagonale. Donc

$$\begin{aligned} \gamma : [0; 1] &\longrightarrow M_n(\mathbb{K}) \\ t &\longmapsto tA \end{aligned}$$

est continue, à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonalisables car $\forall t, P^{-1}tAP = tD$ diagonale et $\gamma(0) = 0$ qui est diagonale. Donc l'ensemble est étoilé donc connexe par arc.

Il n'est pas convexe. En effet, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisable car diagonale et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisable car possède des valeurs propres distinctes. Alors $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pas diagonalisable car son polynôme minimal est $(X - 1)^2$ qui n'est pas scindé.

Exercice 9 (correction)

1. Les première et dernière colonnes forment une famille libre. La matrice A est donc de rang 2. D'après le théorème du rang on a alors $\dim \ker A = n - 2$ donc l'espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension $n - 2$.
2. Les première et dernière colonnes de $A + I_n$ sont identiques donc la matrice n'est pas de rang n donc -1 est bien une valeur propre.
3. La valeur propre -1 est de multiplicité au moins 1. Par ailleurs, la somme des valeurs propres est égale à la trace de la matrice. Donc λ , la dernière valeur propre satisfait $\lambda - 1 + (n - 2) \cdot 0 = 0$ donc $\lambda = 1$. On en déduit que 0 est de multiplicité $n - 2$, 1 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 1. Donc $\chi_A = X^{n-2}(X - 1)(X + 1)$. Le polynôme étant scindé dans $\mathbb{R}$ la matrice est trigonalisable.
4. Les multiplicités étant égales à la dimension de l'espace propre correspondant la matrice est bien diagonalisable. Son polynôme minimal est donc scindé à racines simples donc il s'agit de $\mu_A(X) = X(X - 1)(X + 1)$.

Exercice 10 (correction)

On remarque que 1 et X sont dans le noyau de f et que ces deux vecteurs engendrent le noyau. Ensuite pour $m \geq 2$ on a $f(X^m) = m \cdot (m - 1) \cdot X^{m-1}$ + termes de degré $\leq m - 1$. La matrice de f dans la base canonique est donc triangulaire supérieure et ses valeurs propres sont 0 avec multiplicité 2 et $m(m - 1)$ pour $2 \leq m \leq n$ de multiplicité 1. Puisque 0 est de même multiplicité que la dimension de l'espace propre qui lui est associé ($\ker f$) on en déduit que f est diagonalisable.

Exercice 11 (correction)

Soit P de degré $n \geq 0$ associé à la valeur propre λ . On a alors $f(P) = XP' = \lambda P$. En considérant le terme dominant on obtient $n = \lambda$. En considérant les autres coefficients on voit qu'ils sont tous nuls donc $P = X^n$ est un vecteur propre associé à la valeur propre n . Donc $\text{Sp}(f) = \mathbb{N}$ et $E_n = \ker(f - n \text{id}) = \text{Vect}(X^n)$.

Exercice 12 (correction)

1. On procède par analyse-synthèse.

Analyse Soit $x \in E$ et tentons de déterminer de quelle manière on peut l'écrire sous la forme $x = x_0 + y$ avec $x_0 \in \ker u$ et $y \in \text{im } u$. Si une telle écriture existe alors il existe $z \in E$ tel que $y = u(z)$. On aurait alors

$$u^{m-1}(x) = u^{m-1}(x_0) + u^m(z) = u(z) = y$$

et donc $x_0 = x - y = x - u^{m-1}(x)$. Ceci conclut l'analyse. On note dans un coin que si la synthèse aboutit alors on a la somme directe par unicité des solutions trouvées.

Synthèse Soit $x \in E$. On pose $x_0 = x - u^{m-1}(x)$ et $y = u^{m-1}(x)$. On a alors $x = x_0 + y$. On a bien $u(x_0) = u(x) - u^m(x) = 0$ donc $x_0 \in \ker u$. Par ailleurs, $m \geq 2$ donc $y \in \operatorname{im} u$.

2. Le polynôme $X^m - X$ est donc un polynôme annulateur de u . Or $X^m - X = X(X^{m-1} - 1)$ et $X^{m-1} - 1$ a pour racines les racines $m-1$ -èmes de l'unité, toutes distinctes et non nulles. Donc u est annulé par un polynôme scindé à racines simples donc est diagonalisable.

Exercice 13 (correction)

Soit λ une valeur propre et $v \neq 0$ un vecteur propre associé à cette valeur propre. On remarque qu'on a pour tout k , $A^k \cdot v = \lambda^k v$ (récurrence immédiate). On en déduit que

$$P(A) \cdot v = P(\lambda) \cdot v = 0$$

donc $P(\lambda) = 0$ (car $v \neq 0$).

Exercice 14 (correction)

On fait $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2$ (car $2 \Rightarrow 1$ est immédiat en prenant les dimensions). On note $n = \dim(E)$.

1 $\Rightarrow$ 2 On a $\operatorname{im} f^2 \subseteq \operatorname{im} f$ toujours vrai donc égalité par égalité des dimensions.

2 $\Rightarrow$ 3 On a toujours $\ker f \subseteq \ker f^2$ et, par le théorème du rang, $\dim(\ker f^2) + \operatorname{rg} f^2 = n = \dim(\ker f) + \underbrace{\operatorname{rg}(f)}_{=\operatorname{rg} f^2}$. Donc $\dim(\ker f^2) = \dim(\ker f)$ et on conclut comme au dessus.

3 $\Rightarrow$ 4 On commence par montrer que la somme est directe. Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{im} f$. Alors $\exists z \in E$, $f(z) = x$ et $f(x) = 0$ donc $f^2(z) = 0$ mais $\ker f = \ker f^2$ donc $z \in \ker f$ donc $x = 0$. Donc $\operatorname{im} f$ et $\ker f$ sont en somme directe et, par le théorème du rang, $\operatorname{im} f \oplus \ker f = E$.

4 $\Rightarrow$ 2 Il suffit de montrer que $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im} f^2$. Soit $y \in \operatorname{im} f$, i.e. $\exists x \in E$, $f(x) = y$. Par hypothèse $\exists z, w \in \ker f \times E$, $x = z + f(w)$ donc $y = f(z + f(w)) = f^2(w)$ donc $y \in \operatorname{im} f^2$.

Exercice 15 (correction)

Puisque X^2 est un polynôme annulateur f possède pour unique valeur propre 0. De plus le polynôme minimal de f est X ou X^2 . Si c'est X alors f est l'endomorphisme nul et $g = 0$ et v quelconque conviennent. Supposons donc que X^2 est le polynôme minimal de f . Puisque X^2 est scindé dans $\mathbb{R}$, f est trigonalisable. Dans une base bien choisie la matrice de f s'écrit donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$. Puisque $M^2 = 0$ on a $\alpha\beta = 0$ donc $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Dans chacun des cas on a $\operatorname{rg}(f) = 1$. Puisque f est de rang 1 il existe $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $\operatorname{im} f \in \operatorname{Vect}(v)$, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^3$, $\exists g(x) \in \mathbb{R}$, $f(x) = g(x)v$. La linéarité de g provient de celle de f .

Exercice 16 (correction)

- Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une valeur propre de A . Soit $V \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ un vecteur propre. On a $AV = \lambda V$ donc, en passant au conjugué $\overline{AV} = \overline{\lambda V}$. Puisque $\lambda \neq \bar{\lambda}$ par hypothèse alors $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A distincte de λ .
- Soit $V \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ un vecteur propre. On a $AV = \lambda V$ donc, en passant au conjugué $\overline{AV} = \overline{\lambda V}$. On a donc $V \neq \bar{V}$ sinon on aurait un même vecteur non nul dans deux espaces propres distincts ce qui est absurde. On a donc $V = W_1 + iW_2$ avec $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^2$ et $W_2 \neq 0$. On pose $\lambda = a + ib$. On a alors

$$AV = \lambda V \Leftrightarrow AW_1 + iAW_2 = aW_1 - bW_2 + i(bW_1 + aW_2) \Leftrightarrow \begin{cases} AW_1 = aW_1 - bW_2 \\ AW_2 = bW_1 + aW_2 \end{cases} \quad (1)$$

On remarque que la famille (W_1, W_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ car sinon on avait $W_1 = \gamma W_2$ on aurait $V = (\gamma + i)W_2$ et $\bar{V} = (\gamma - i)W_2$ et on aurait alors $V, \bar{V} \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(W_2)$ ce qui est absurde car ils doivent être dans des espaces propres distincts. On pose alors Q la matrice réelle dont les colonnes sont les vecteurs de la base (W_1, W_2) donc, d'après la relation (1)

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 17 (correction)

1. On a $u(X^k) = (X+1)^k = X^k +$ termes de degré $\leq k-1$. Donc la matrice A de u dans la base canonique est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Son polynôme caractéristique est donc $\chi_u(X) = (X-1)^n$.
2. D'après la question précédente u est trigonalisable (la base canonique est même une base qui le trigonalise). Elle n'est évidemment pas diagonale car, dans cette base, il y a des termes non-nuls au dessus de la diagonale (donc $\ker(u - \text{id}) = \text{Vect}(1)$ de dimension $1 < n$).
3. On remarque que $A - I_n$ est nilpotente, i.e. $(A - I_n)^n = 0$. Puisque A commute avec I_n on peut appliquer le binôme de Newton qui donne

$$(A - I_n)^n = A^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k A^k = 0$$

donc en termes d'endomorphismes on a

$$(u - \text{id})^n = u^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k u^k = 0.$$

On remarque qu'on a $(X^k)(u)(P) = u^k(P) = P(X+k)$ ce qui donne la réponse à la question pour $a_k = \binom{n}{k}(-1)^k$.

Exercice 18 (correction)

On commence par remarquer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = f^n + \dots + a_1 f + (-1)^n \det(f) \text{id} = 0$ donc, si f inversible¹

$$f \frac{1}{(-1)^{n+1} \det(f)} (f^{n-1} + \dots + a_1 \text{id}) = \text{id}$$

i.e. l'inverse de f est $f^{-1} = \frac{1}{(-1)^{n+1} \det(f)} (f^{n-1} + \dots + a_1 \text{id}) \in \mathbb{K}[f]$. On en déduit que si $P(u)$ est inversible alors son inverse est dans $\mathbb{K}[P(u)] \subseteq \mathbb{K}[u]$. On le note désormais $Q(u)$. On a alors $P(u) \circ Q(u) = \text{id}$ ce qui signifie que $PQ - 1$ est un polynôme annulateur de u donc il est dans l'idéal engendré par μ_u donc il existe $H \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ + Hu = 1$ donc P et u sont premiers entre eux d'après l'identité de Bézout. La réciproque fonctionne pareil.

Exercice 19 (correction)

1. On a

$$\begin{aligned} \Phi^2(u) &= \Phi(u + \text{Tr}(u) \text{id}) = u + \text{Tr}(u) \text{id} + \text{Tr}(u) \Phi(\text{id}) \\ &= u + \text{Tr}(u) \text{id} + \text{Tr}(u)(\text{id} + n \text{id}) = u + (n+2) \text{Tr}(u) \text{id} \\ &= (n+2)u + (n+2) \text{Tr}(u) \text{id} - (n+1)u \\ &= (n+2)\Phi(u) - (n+1) \text{id}_{\mathcal{L}(E)}(u). \end{aligned}$$

2. Le polynôme $X^2 - (n+2)X + n+1$ est annulateur de u . Par ailleurs, on a $X^2 - (n+2)X + n+1 = (X-1)(X-(n+1))$. Puisqu'il est scindé à racines simples Φ est diagonalisable. On a $u \in \ker(\Phi - \text{id}_{\mathcal{L}(E)})$ si, et seulement si $\text{Tr}(u) = 0$. On a donc $\ker(\Phi - \text{id}_{\mathcal{L}(E)}) = \ker(\text{Tr})$ qui est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ donc de dimension $n^2 - 1$. Enfin, on a $\Phi(\text{id}) = (n+1) \text{id}$ donc $\text{Vect}(\text{id}) \subseteq \ker(\Phi - (n+1) \text{id}_{\mathcal{L}(E)})$. Or puisque $\ker(\Phi - \text{id}_{\mathcal{L}(E)})$ et $\ker(\Phi - (n+1) \text{id}_{\mathcal{L}(E)})$ sont en somme directe on a $\dim(\ker(\Phi - (n+1) \text{id}_{\mathcal{L}(E)})) = 1$ donc

$$\mathcal{L}(E) = \ker(\Phi - \text{id}_{\mathcal{L}(E)}) \oplus \ker(\Phi - (n+1) \text{id}_{\mathcal{L}(E)}) = \ker(\text{Tr}) \oplus \text{Vect}(\text{id}).$$

3. Le déterminant de Φ est le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité, donc $\det(\Phi) = n+1$.

1. Le même argument fonctionne sans utiliser Cayley-Hamilton en prenant le polynôme minimal au lieu du polynôme caractéristique, il suffit alors de remarquer que le terme constant du polynôme minimal est un produit de valeurs propres (ces dernières sont non nulles car f inversible).

Exercice 20 (correction)

On remarque en effet que $(\Phi - \text{id}_{\mathcal{L}(E)})(u) = \text{Tr}(u) \text{id}_E$ qui est nul dès lors que $\text{Tr}(u) = 0$. On a donc $\ker(\Phi - \text{id}_{\mathcal{L}(E)}) = \ker \text{Tr}$. Puisque Tr est une forme linéaire son noyau est de dimension $\dim(\mathcal{L}(E)) - 1 = n^2 - 1$. Ainsi, 1 est valeur propre de multiplicité au moins $n^2 - 1$. On note λ la dernière valeur propre. Elle satisfait $\text{Tr}(\Phi) = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n^2-1 \text{ fois}} + \lambda$ donc $\lambda = \text{Tr}(\Phi) - n^2 + 1$. Il suffit donc de déterminer la trace de Φ . On fixe une base

$\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et une base u_{ij} de $\mathcal{L}(E)$ avec u_{ij} définie par $u_{ij}(e_j) = e_i$ (si on identifiait $\mathcal{L}(E)$ à $M_n(\mathbb{K})$ via l'isomorphisme $u \mapsto M_{\mathcal{B}, \mathcal{B}}(u)$) il u_{ij} seraient les matrices élémentaire $E_{ij} = (\delta_{ij})$. Ce qui nous intéresse c'est de savoir seulement les coefficients diagonaux de Φ dans la base (u_{ij}) c'est à dire pour tout (i, j) déterminer le coefficient en u_{ij} de $\Phi(u_{ij})$. On a $\Phi(u_{ij}) = u_{ij} + \text{Tr}(u_{ij}) \text{id}_E$. Si $i \neq j$ alors $\text{Tr}(u_{ij}) = 0$ donc le coefficient en u_{ij} de $\Phi(u_{ij})$ est 1. Sinon $\text{Tr}(u_{ii}) = 1$ et $\text{id}_E = u_{11} + \dots + u_{nn}$ donc le coefficient en u_{ii} de $\Phi(u_{ii})$ est 2. On a donc

$$\text{Tr}(\Phi) = \underbrace{1 + \dots + 1}_{n^2-n \text{ fois}} + \underbrace{2 + \dots + 2}_n = n^2 - n + 2n = n^2 + n = n^2 - 1 + \lambda \text{ donc } \lambda = n + 1.$$

On en déduit donc que la dernière valeur propre est $n+1$ avec multiplicité au moins 1 car c'est une valeur propre et au plus 1 car $\dim(\ker(\Phi - \text{id}_{\mathcal{L}})) = n^2 - 1$. On en déduit aussi que 1 est de multiplicité exactement $n^2 - 1$ donc Φ est diagonalisable et, en considérant son déterminant dans une base qui la diagonalise on a $\det(\Phi) = n + 1$.

Exercice 21 (correction)

Soit λ une valeur propre non nulle et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre de $u \circ v$, i.e. $u(v(x)) = \lambda x$. On a alors $(v \circ u)(v(x)) = v(u(v(x))) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$. Ainsi, on est tenté de dire $v(x)$ est un vecteur propre associé à λ . Pour cela il faudrait que $v(x)$ soit non nul. Si $v(x) = 0$ alors $u(v(x)) = \lambda x = 0$ ce qui impose $\lambda = 0$ (car la famille (x) est libre ou par l'absurde, attention à ne pas justifier « $\lambda x = 0$ donc $\lambda = 0$ » avec un argument d'intégrité). On en déduit que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

Il reste à traiter le cas où $\lambda = 0$ est une valeur propre. On remarque que l'espace propre associé est $\ker(u \circ v)$ qui est réduit à 0 si, et seulement si 0 n'est pas valeur propre et si, et seulement si $u \circ v$ inversible.

Ainsi on a

$$0 \text{ valeur propre de } u \circ v \Leftrightarrow \det(u \circ v) = 0 \Leftrightarrow \det(v \circ u) = 0 \Leftrightarrow 0 \text{ valeur propre de } v \circ u.$$

Exercice 22 (correction)

1. On propose deux méthodes pour cette question :

Méthode 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Le polynôme $\chi_A = \det(A - XI_n) \in \mathbb{K}[X]$ est de degré n donc non constant. Il possède donc au plus n racines. L'ensemble de ses racines étant fini il existe $t < \frac{\varepsilon}{\|I_n\|}$ tel que $\chi_A(t) \neq 0$ donc $A - tI_n \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$. On a bien

$$\|A - (A - tI_n)\| = t \|I_n\| < \varepsilon.$$

Méthode 2 : Soit A une matrice non inversible. Ceci est équivalent à dire que 0 est une valeur propre de A . On considère F un supplémentaire de $\ker A$ dans $\mathbb{K}^n$. Dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_d, e_{d+1}, \dots, e_n)$ de $\mathbb{K}^n$ obtenue comme concaténation de base $(e_1, \dots, e_d)$ de $\ker A$ et de F la matrice de l'endomorphisme induit par A est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & \star & \\ \vdots & \ddots & & \star \\ 0 & \dots & 0 & \\ & & 0 & B \end{pmatrix}$$

avec B la matrice de A dans la base $(e_{d+1}, \dots, e_n)$ de F qui est inversible car F est d'intersection nulle avec $\ker A$. On pose la suite de matrice inversibles

$$T_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & & \star & \\ \vdots & \ddots & & \star \\ 0 & \dots & \frac{1}{n} & \\ & & 0 & B \end{pmatrix}.$$

En notant $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ on a $PT_n P^{-1} \longrightarrow PT P^{-1} = A$.

2. On suppose que A est inversible. On a

$$\chi_{AB}(X) = \det(AB - XI_n) = \det(A) \det(B - XA^{-1}) = \det(B - XA^{-1}) \det(A) = \det(BA - XI_n) = \chi_{BA}.$$

3. Pour tout $\mathbb{K}$ -espace vectoriel V de dimension finie m , l'application $\det : \text{End}(V) \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue (polynôme en les coefficients lorsqu'on fixe une base qui permet d'identifier $\text{End}(V)$ à $M_m(\mathbb{K})$). De même l'application

$$\begin{aligned} M_n(\mathbb{K}_n[X]) &\longrightarrow M_n(\mathbb{K}_n[X]) \\ B &\longmapsto AB - I_n X \end{aligned}$$

est continue (il s'agit de la somme d'une application linéaire en dimension finie donc continue et d'une application constante).

Par composition $B \longmapsto \det(AB - XI_n)$ est continue. Par densité de $\text{GL}_n(\mathbb{K})$ dans $M_n(\mathbb{C})$, il existe $(B_n) \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ qui tend vers B . On a donc $\chi_{AB_n} = \det(AB_n - XI_n) \longrightarrow \det(AB - XI_n) = \chi_{AB}$. Pour les mêmes raisons qu'au dessus on a aussi $\chi_{B_n A} \longrightarrow \chi_{BA}$. Mais par la question précédente $\forall n \in \mathbb{N}$, $\chi_{AB_n} = \chi_{B_n A}$ et, par unicité de la limite on obtient bien que pour toute matrice $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 23 (correction)

On trigonalise A dans $\mathbb{C}$. Il existe donc une matrice $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice $T \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire telles que $A = P^{-1}TP$. Par télescopage on a

$$\exp(A) = P^{-1} \exp(T) P.$$

Or sur la diagonale de T on trouve les valeurs propres de A et $\exp(T)$ est toujours triangulaire et sur sa diagonale on a l'exponentielle des valeurs propres de A . Si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres on a donc

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(T)) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^n \lambda_i} = e^{\text{Tr}(A)}.$$

Exercice 24 (correction)

- Il suffit de montrer qu'il s'agit d'un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
- On pose $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit $g \in C_f$ ceci revient à dire que g commute avec f sur la base $\mathcal{B}$. Ainsi on a $\forall i, f(g(e_i)) = g(f(e_i)) = \lambda_i g(e_i)$, i.e. $g(e_i) \in E_{\lambda_i}$ donc $g(E_{\lambda_i}) \subseteq E_{\lambda_i}$. La commutativité et la stabilité pouvant se caractériser sur une base on peut remonter notre raisonnement étape par étape dans l'autre sens pour terminer la preuve.
- La question précédente prouve que l'application

$$\begin{aligned} \phi : C_f &\longrightarrow \bigoplus_{\lambda} \mathcal{L}(E_{\lambda}) \\ g &\longmapsto (g|_{E_{\lambda}})_{\lambda} \end{aligned}$$

est bien définie. Elle est injective car si $\phi(g) = 0$ alors g est nulle sur tous les espaces propres et la somme directe de ces derniers est E tout entier donc $g = 0$. Elle est surjective car étant donné $(g_{\lambda}) \in \bigoplus_{\lambda} \mathcal{L}(E_{\lambda})$ on a $g = \sum_{\lambda} g_{\lambda}$ qui commute avec f et qui satisfait $\phi(g) = (g_{\lambda})_{\lambda}$. Enfin, puisque f est diagonalisable on a $\dim E_{\lambda} = \alpha_{\lambda}$ pour tout λ . D'où $\dim \mathcal{L}(E_{\lambda}) = \alpha_{\lambda}^2$ puis la somme voulue par somme directe des espaces propres.

- D'après la question précédente on a $\dim C_g = n$. Il suffit donc de prouver que la famille $(\text{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1})$ est libre. Supposons qu'on ait une relation

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i = 0 \tag{2}$$

Soit λ une valeur propre et $v \in E_{\lambda} \setminus \{0\}$. Lorsqu'on applique v à l'endomorphisme (2) on obtient $(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i) \cdot v = 0$ donc $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i = 0$. Autrement dit, toutes les valeurs propres de f sont annulées par un polynôme de degré $\leq n-1$ qui a donc au plus $n-1$ racines ce qui est absurde. Donc la famille est libre et il s'agit d'une base.

Exercice 25 (correction)

1. Par le théorème du rang $\ker(A)$ est de dimension $n - 1$. On considère une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de $\ker(A)$ que l'on complète par un vecteur $v \notin \ker(A)$. Dans une telle base la matrice de A s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_n \end{pmatrix}.$$

donc $\text{Tr}(A) = c_n$ et on voit alors par un calcul immédiat que $B(B - \text{Tr}(B)I) = 0$ donc $PBP^{-1}(PBP^{-1} - \text{Tr}(PBP^{-1})I) = A(A - \text{Tr}(A)I) = 0$. J'en profite pour mentionner une autre très jolie (mais moins intuitive) preuve de cette question. Il est possible de prouver que si A est de rang 1 si, et seulement si il existe une matrice ligne L et une matrice colonne C telles que $A = CL$ (exercice). On a alors $A^2 = CLCL = C(LC)L = (LC)CL = (LC)A$ car le produit LC est un scalaire. Par ailleurs, $\text{Tr}(A) = \text{Tr}(CL) = \text{Tr}(LC) = LC$.

2. Puisque $X(X - \text{Tr}(A))$ est annulateur le polynôme minimal de A est soit X , soit $X - \text{Tr}(A)$ soit $X(X - \text{Tr}(A))$. Il ne peut être X car A de rang 1 donc non nulle, ça ne peut pas être $X - \text{Tr}(A)$ car $\text{Tr}(A)I$ est soit nulle soit inversible. Donc $\mu_A(X) = X(X - \text{Tr}(A))$ et A est diagonalisable si, et seulement si μ_A est scindé à racines simples, i.e. si, et seulement si $\text{Tr}(A) \neq 0$.

On suppose que $\text{Tr}(A) = 0$ et on considère $e_1 = Av$ un vecteur directeur de $\mathfrak{F}(A)$. Puisque $A^2 = 0$, $e_1 \in \ker(A)$. On complète la famille libre (e_1) en une base $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ de $\ker(A)$. Puisque $v \notin \ker(A)$ la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, v)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle A a bien la forme voulue.

3. La matrice est bien de rang 1 car $c_j = \frac{1}{j}c_1$ où c_j désigne la j -ème colonne de A . Sa trace est $1 + 1 + \dots + 1 = n \neq 0$ donc A est bien diagonalisable. Les relations sur les colonnes nous donnent une base de $\ker(A)$. En effet, on a $(1, 0, \dots, -j, 0, \dots, 0) \in \ker(A)$ et ces vecteurs forment une famille libre de $n - 1$ vecteurs. Enfin, on remarque que $(1, 2, \dots, n) \in \ker(A - nI_n)$ ce qui complète la base de vecteurs propres.

Exercice 26 (correction)

Les applications $P \mapsto P(X^2 + 1)$ et $Q \mapsto Q^{(n)}$ étant linéaires (à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ cependant) f est bien linéaire par composition. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\deg P(X^2 + 1) = 2 \deg P$ et donc $\deg P(X^2 + 1)^{(n)} = \min(0, 2 \deg P - n)$. Donc f définit bien un endomorphisme. Regardons à quoi elle ressemble sur les monômes X^m pour $0 \leq m \leq n$.

On a

$$\begin{aligned} f(X^m) &= \left((X^2 + 1)^m \right)^{(n)} \\ &= (X^{2m} + \text{termes de degré} < 2m)^{(n)} \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } 2m < n \\ 2m \cdot (2m - 1) \cdots (2m - n + 1) \cdot X^{2m-n} + \text{termes de degré} < 2m - n \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque $2m - n \leq m$ la matrice de f dans la base canonique est triangulaire supérieure et puisque $2m - n < m$ si $m < n$ elle n'a que des 0 sur la diagonale sauf pour la dernière colonne. On distingue maintenant deux cas. Si $n = 1$ alors la matrice de f est tout simplement $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est diagonale donc fin du problème. Sinon on considère $f(X^{n-1}) = 2(n-1) \cdot (2n-3) \cdots (n-1) \cdot X^{n-2} + \text{termes de degré} < 2m - n \neq 0$ donc $\text{Vect}(X^{n-1}, X^n) \cap \ker f = \{0\}$. Autrement dit, $\dim \ker f \leq n - 2$ or 0 est une valeur propre de multiplicité $n - 1$. Donc f n'est pas diagonale.

Exercice 27 (correction)

1. Puisque $J^2 = I$ on a $S^2(M) = J \cdot JMJ \cdot J = J^2MJ^2 = M$.
2. On fait une analyse-synthèse.

Analyse : Si une telle décomposition existe alors pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$ on a $M = M_1 + M_2$ avec $M_1 \in F$ et $M_2 \in G$. On a alors $S(M) = M_1 - M_2$ qui donne $M + S(M) = 2M_1$ et donc $M_1 = \frac{1}{2}(M + S(M))$ et $M_2 = \frac{1}{2}(M - S(M))$.

Synthèse : On a bien $S\left(\frac{1}{2}(M + S(M))\right) = \frac{1}{2}(M + S(M))$ et $S\left(\frac{1}{2}(M - S(M))\right) = \frac{1}{2}(S(M) - M) = -\frac{1}{2}(M - S(M))$ donc les matrices que l'on trouve sont bien des solutions.

Puisque partant d'une décomposition générale dans l'analyse on aboutit à une unique écriture des solutions la décomposition est unique et la somme est directe.

3. Les espaces F et G sont respectivement $\ker(S - \text{id})$ et $\ker(S + \text{id})$. On en déduit que -1 et 1 sont les seules valeurs propres de S et que S est diagonalisable (car décomposition de $M_2(\mathbb{R})$ en sous-espaces propres de S).
4. On voit facilement que I et J sont dans F et que $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont dans G et qu'elles sont linéairement indépendantes. On en déduit que $\dim F \geq 2$ et $\dim G \geq 2$ donc les deux sont de dimension 2.

Exercice 28 (correction)

On remarque d'abord que, puisque la première et la dernière colonne sont identiques M_z admet 0 pour valeur propre avec multiplicité au moins 1 car $\dim \ker M_z = 1$ par le théorème du rang. Le polynôme caractéristique est $\chi_z(X) = X(X^2 - zX - 2)$ donc 0 est toujours de multiplicité 1. Si $X^2 - zX - 2$ est à racines simples M_z est diagonalisable. Autrement on a $\Delta = z^2 + 8 = 0$, i.e. $z = \pm 2i\sqrt{2}$ et la valeur propre correspondante

est alors $\lambda = \pm i\sqrt{2}$. On a $M_{\pm 2i\sqrt{2}} - \pm i\sqrt{2}I_3 = \begin{pmatrix} \mp i\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \pm i\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \mp i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 (de rang au plus 2 puisqu'elle est non inversible par

définition et de rang au moins 2 car deux colonnes sont libres). Donc $\dim \ker(M_{\pm 2i\sqrt{2}} - \pm i\sqrt{2}I_3) = 1$ par le théorème du rang. Or $\pm i\sqrt{2}$ de multiplicité $2 \neq 1$ donc

$$M_z \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow z \notin \{2i\sqrt{2}, -2i\sqrt{2}\}.$$

Exercice 29 (correction)

Le polynôme caractéristique de M_z est $\chi_z(X) = X^3 - z(X + 1)$. Une condition nécessaire pour que M_z ne soit pas diagonalisable est que $\chi_z(X)$ ait une racine double ou triple. Les racines de $\chi'_z(X) = 3X^2 - z$ sont $\pm\alpha$ avec $\alpha^2 = \frac{z}{3}$. On a $\chi_z(\alpha) = z\left(\frac{\alpha}{3} - \alpha - 1\right) = -\frac{z}{3}(2\alpha + 3)$. Donc une condition nécessaire pour que M_z ne soit pas diagonalisable est que $z = 0$ ou $\alpha = -\frac{3}{2}$. Dans le premier cas $z = 0$ on a évidemment M_z non diagonalisable (triangulaire non nulle avec une seule valeur sur la diagonale). Dans le second cas $\alpha^2 = \frac{z}{3} = \frac{9}{4}$, i.e. $z = \frac{27}{4}$ et la racine multiple est $-\frac{3}{2}$. La matrice $M_{27/4} + \frac{3}{2}I_3$ est de rang 2 car elle ne peut pas être de rang 3 puisque $-\frac{3}{2}$ est une valeur propre et possède deux colonnes qui forment une famille libre. Donc son noyau est de dimension 1 pourtant la multiplicité de $-\frac{3}{2}$ est au moins 2 donc $M_{27/4}$ n'est pas diagonalisable. En résumé

$$M_z \text{ diagonalisable} \Leftrightarrow z \notin \left\{0, \frac{27}{4}\right\}.$$

Exercice 30 (correction)

1. Les deux première colonnes forment une famille libre, les deux suivantes sont évidemment liées donc A est de rang 2. Par le théorème du rang A le noyau de A est de dimension 2. Autrement dit, 0 est une valeur propre de multiplicité au moins 2 donc $\chi_A = X^2(X - \lambda)(X - \mu)$.
2. La trace de A est la somme des valeurs propres donc $\lambda + \mu = k$; On peut faire de même avec A^2 dont la trace est $k^2 + 6$ (inutile de calculer les coefficients hors diagonale) et dont les valeurs propres sont les carrés des valeurs propres de A donc λ^2, μ^2 et 0 d'où le système.
On a $(\lambda + \mu)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu$ on en déduit que $\lambda\mu = -3$ et donc que λ et μ sont les racines du polynôme de degré 2, $P = X^2 - kX - 3$. Ces dernières sont $\frac{k \pm \sqrt{k^2 + 12}}{2}$ (attention k étant complexe on commet un petit abus en notant $\sqrt{k^2 + 12}$ il faut comprendre qu'on fixe une des racines de $k^2 + 12$ puisque, contrairement aux réels, dans le cas complexe on ne peut en choisir une canoniquement).
3. La matrice est diagonalisable si et seulement si les valeurs propres sont de multiplicité la dimension de l'espace propre associé. Il faut donc que λ et μ soient tous deux différents de 0 sinon la multiplicité sera plus grande que la dimension à savoir 2. On voit bien dans le système de la question 2. que ni l'un ni l'autre ne peut valoir 0 (sans quoi $6 = 0$). Donc on peut écarter ce cas. Si λ et μ sont distinctes il n'y a pas de problème.

Il reste à traiter le cas où $\lambda = \mu$, i.e. $\Delta = \sqrt{k^2 + 12} = 0$ donc $k = \pm 2i\sqrt{3}$. On ne traite que le cas $k = 2i\sqrt{3}$ car l'autre est similaire. On

remarque qu'alors on a $\lambda = \mu = i\sqrt{3}$ et on a $A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Cette dernière est évidemment une matrice de

rang ≥ 3 (les colonnes 1, 3 et 4 forment une famille libre) et de rang ≤ 3 car, par définition de λ la matrice n'est pas inversible. Il s'agit donc d'une valeur propre de multiplicité 2 dont l'espace propre est de dimension 1 (l'espace propre associé est $\text{Vect} \begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$). La matrice n'est donc pas diagonalisable. Enfin, on peut conclure que A est diagonalisable si, et seulement si, $k \notin \{\pm 2i\sqrt{3}\}$.

Exercice 31 (correction)

1. (a) Puisque M est triangulaire on peut lire ses valeurs propres sur la diagonale qui sont 6, 3 et 2. Ces trois valeurs propres étant distinctes

M est bien diagonalisable. On trouve comme vecteurs propres $v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivement.

- (b) D'après la question précédente on a $M = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc, par télescopage on a $M^n = PD^nP^{-1}$ ce qui donne

$$M^n = \begin{pmatrix} 6^n & 6^n - 3^n & 6^n - 4 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n \\ 0 & 3^n & 4 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

2. (a) On a, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0) \mathbb{P}(X_n = 0)}_{=1} + \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1) \mathbb{P}(X_n = 1)}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 2) \mathbb{P}(X_n = 2)}_{=0} \\ &= x_n + \frac{1}{2} y_n \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1}{2} y_n + \frac{2}{3} z_n \\ z_{n+1} &= \frac{1}{3} z_n \end{aligned}$$

En conclusion $U_{n+1} = \frac{1}{6} M U_n$.

- (b) On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = \frac{1}{6^n} M^n U_0$ et on a $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par hypothèse. Donc $U_n =$

$$\begin{pmatrix} 1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

- (c) On a donc bien $x_n \rightarrow 1$ et $y_n, z_n \rightarrow 0$, la probabilité que les boules blanches disparaissent tend bien vers 0.

Exercice 32 (correction)

1. La matrice $M(1, 0) + I_n$ est la matrice avec seulement des 1 en entrée. Elle est donc de rang 1 et son noyau est de dimension $n - 1$ d'après le théorème du rang. On en déduit que -1 est une valeur propre de multiplicité au moins $n - 1$. On note λ la dernière valeur propre. On considérant la trace, on a $-1 \times (n - 1) + \lambda = 0$ donc $\lambda = n - 1$. Donc les valeurs propres de $M(1, 0)$ sont -1 avec multiplicité $n - 1$ et $n - 1$ avec multiplicité 1 donc $P_{1,0}(X) = (X - (n - 1))(X + 1)^n$.

2. On a

$$\begin{aligned} P_{a,b}(X) &= \det(XI_n - M(a, b)) = \det(XI_n - bI_n - aM(1, 0)) \\ &= \det\left(a\left(\frac{X-b}{a}I_n - M(1, 0)\right)\right) = a^n \det\left(\frac{X-b}{a}I_n - M(1, 0)\right) \\ &= a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right). \end{aligned}$$

Donc μ racine de $P_{a,b}$ si et seulement si $\frac{\mu-b}{a} = n-1$ i.e. $\mu = b + (n-1)a$ ou $\mu = b - a$. De plus, puisque $b - a = b + (n-1)a$ équivaut à $a = 0$ les multiplicités sont respectivement 1 et $n-1$.

3. La matrice $M(a, b) - (b-a)I_n$ est la matrice $a(1)_{1 \leq i, j \leq n}$, la matrice avec que des a en entrée. La matrice $M(a, b) - (b + (n-1)a)I_n$ est la même mais avec des $-(n-1)a$ sur la diagonale. Le produit est facile à calculer ; les entrées sont toutes $\underbrace{1 + 1 + \dots + 1}_{n-1 \text{ fois}} - (n-1) = 0$.
4. Si $a = 0$ alors $M(a, b)$ est diagonale (donc diagonalisable). Sinon $Q_{a,b}(X)$ est un polynôme annulateur de $M(a, b)$ à racines simples donc $M(a, b)$ est diagonalisable.
5. On écrit le reste $R(X) = \alpha X + \beta$ et $T \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$X^k = TQ_{a,b} + R.$$

En évaluant en $(b-a)$ on a $(b-a)^k = \alpha(b-a) + \beta$ et en évaluant en $b + (n-1)a$ on a $(b + (n-1)a)^k = \alpha(b + (n-1)a) + \beta$. En soustrayant ces deux équations on a

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{1}{n} ((b + (n-1)a)^k - (b-a)^k) \\ \beta &= \frac{n+1}{n} (b-a)^k - \frac{1}{n} (b + (n-1)a)^k. \end{aligned}$$

On a donc

$$M(a, b)^k = T(M(a, b))Q_{a,b}(M(a, b)) + R(M(a, b)) = R(M(a, b)) = \alpha M(a, b) + \beta I_n$$

(simplifiez les calculs si ça vous amuse !).

Exercice 33 (correction)

On remarque que $\Phi^2(A) = A$ donc Φ est une symétrie par rapport à $\ker(\Phi - \text{id})$ parallèlement à $\ker(\Phi + \text{id})$ donc de polynôme minimal $X^2 - 1$ (ce n'est ni l'identité ni l'opposé de l'identité). L'espace $\ker(\Phi - \text{id})$ (resp. $\ker(\Phi + \text{id})$) est l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) donc de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ (resp. de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$). Donc, dans une base de vecteur propres la matrice de Φ s'écrit comme une diagonale avec $n(n+1)/2$ valeurs 1 sur la diagonale et $n(n-1)/2$ valeurs -1 . Son déterminant est donc $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ qui vaut 1 si et seulement si $n \equiv 0, 1 \pmod{4}$.

Exercice 34 (correction)

- Il s'agit d'une récurrence élémentaire.
- On peut développer $\det(XI_3 - M)$ par rapport à la 1ère colonne. Une racine λ satisfait donc $\left(\frac{\lambda-t}{1-t}\right)^3 = 1$ donc dans la parenthèse c'est 1, j ou j^2 .
- Il suffit de vérifier que pour chacun on a $Mv_i = \lambda_i v_i$.
- En élevant la relation à la puissance n on a $D^n = P^{-1}M^nP$ et D^n est la matrice diagonale avec sur la diagonale $1^n = 1, \lambda_2^n$ et λ_3^n . On peut vérifier que λ_2 et λ_3 sont de module < 1 donc D^n tend vers la matrice $D_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc M^n tend vers $PD_\infty P^{-1}$ qui est celle qu'on veut. J'en profite pour préciser une astuce de flemmard.e. Ici D_∞ est évidemment de rang 1 donc $L = PD_\infty P^{-1}$ l'est aussi. Par conséquent il suffit de calculer la première colonne de L qui est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis un coefficient seulement de chaque autre colonne (on trouve 1) puis de se rappeler que ces deux autres colonnes sont engendrées par la première.
- On a alors a_n, b_n et c_n qui tendent tous vers $\frac{a_0+b_0+c_0}{3}$, l'isobarycentre du triangle de départ. La limite ne dépend pas du paramètre t choisi au départ.

Exercice 35 (correction)

- On a 1 valeur propre évidente car la matrice $M - I_n$ est de rang 1. Par le théorème du rang l'espace propre associé est de dimension $n - 1$. On note λ la valeur propre de M qui est encore inconnue. Elle doit vérifier

$$\text{Tr}(M) = 0 = \lambda + 1 + \dots + 1 = \lambda + n - 1$$

donc $\lambda = -n + 1$. Puisque $-n + 1 \neq 1$ la dimension des espaces propres coïncide avec la multiplicité des valeurs propres donc la matrice est diagonalisable (lorsque vous l'aurez vu le théorème spectral permet de conclure immédiatement que M est diagonalisable en constatant que M est symétrique réelle).

- D'après la question précédente le polynôme caractéristique de M vérifie $\chi_M(X) = \det(XI_n - M) = (X + n - 1)(X - 1)^n$. Par ailleurs, par définition du déterminant

$$\det(XI_n - M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{i, \sigma(i)}$$

avec $a_{i, \sigma(i)} = X$ si $\sigma(i) = i$ et 1 sinon. Donc on a bien

$$\det(XI_n - M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X^{v(\sigma)}.$$

- On a $\Sigma_1 = \chi_M(1) = 0$, puis $\Sigma_2 = \chi'_M(1) = 0$ si $n \geq 3$ car alors 1 est une racine de χ_M de multiplicité $n - 1 \geq 2$ et si $n = 2$, $\chi'_M(1) = 2$. Enfin

$$\Sigma_3 = \int_0^1 \chi_M(t) dt = \int_0^1 (t - 1)^n dt + n \int_0^1 (t - 1)^{n-1} dt = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + (-1)^n = (-1)^n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

- Le coefficient constant de χ_M correspond aux permutations sans point fixe donc aux éléments de $\mathfrak{D}_n$. En identifiant les coefficients constants des deux polynômes à gauche et à droite de l'égalité obtenue en question 2 on obtient

$$\text{Card} \{ \sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1 \} - \text{Card} \{ \sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1 \} = (-1)^{n-1} (n - 1).$$

Exercice 36 (correction)

- On se rappelle que les colonnes d'une matrice forment une base si, et seulement si elle est inversible. Il suffit donc d'énumérer les bases de $E = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Puisque E est de cardinal p^2 on a $p^2 - 1$ choix pour le premier vecteur de la base (tout vecteur non nul convient). Pour le second vecteur on doit le choisir de telle sorte qu'il ne soit pas colinéaire au premier, i.e. pas sur la même droite. Une droite de E étant de cardinal p on a donc $p^2 - p$ choix pour le second. On en déduit que $q = (p^2 - 1)(p^2 - p)$.
- Puisque $\text{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un groupe de cardinal q pour toute matrice inversible $A^q = I_2$ donc $A^{q+2} = A^2$ par le théorème de Lagrange. Considérons alors A non inversible. Ceci signifie que son noyau est non nul, i.e. que 0 est une valeur propre. L'autre valeur propre a est alors un élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. En effet, le polynôme caractéristique de A est de la forme $\chi_A = X^2 - aX \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$. Si $a = 0$ alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton $A^2 = 0$ donc $A^{q+2} = A^2 = 0$. Sinon on remarque que, d'après le petit théorème de Fermat $a^{p-1} = 1$ donc, en passant à la puissance $(p+1)(p^2 - p)$ on a $a^q = 1$ donc a est une racine de $X^q - 1$. On en déduit que $\chi_A \mid X^2(X^q - 1)$ donc que $A^2(A^q - I_2) = 0$.
- De la même façon que pour la première question on a $q = (p^3 - 1)(p^3 - p)(p^3 - p^2)$ (le dernier vecteur choisi de ne doit pas être dans le plan engendré par les deux premiers). La relation reste toujours vraie pour $A \in \text{GL}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ par le théorème de Lagrange mais elle n'est plus vraie en général pour les matrices non inversibles. Un contre-exemple est donné par une matrice de polynôme minimal $\mu_A = X(X - 1)^2$ comme, par exemple, celui de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En effet, on peut montrer que $X^2(X^q - 1)$ n'est pas un polynôme annulateur car 1 n'est pas une racine double de $X^q - 1$. En effet, c'est bien une racine mais sa dérivée est qX^{q-1} qui ne s'annule qu'en 0 car $q \neq 0 \pmod p$.

En fait la relation est vraie pour les matrices inversibles, pour les nilpotentes et pour les diagonalisables.

Exercice 37 (correction)

1. Soit $g \in G$ un élément. D'après le théorème de Lagrange $g^n = e$. On en déduit que $\rho(g^n) = \rho(g)^n = \rho(e) = I_n$. Donc $\rho(g)$ est annulé par le polynôme $X^n - 1$ dont les racines sont les racines n -ème de l'unité qui sont toutes distinctes. Donc tous les éléments de l'image sont annulés par un polynôme scindé à racines simples donc sont diagonalisables.
2. L'image d'un groupe commutatif est toujours commutatif. Il suffit donc de montrer que des matrices diagonalisables qui commutent sont diagonalisables dans une même base. On va le faire plus généralement pour des endomorphismes.

On commence par le cas de deux endomorphismes f et g .

Par hypothèse, $E = \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(f)} E_\lambda$ avec $E_\lambda = \ker(f - \lambda \text{id})$. Soit $\lambda \in \text{Sp}(f)$ une valeur propre de f . On veut montrer que E_λ stable par g . Soit $v \in E_\lambda$ on a

$$f(g(v)) \underbrace{=}_{\text{car } f \circ g = g \circ f} g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$$

donc $g(v) \in E_\lambda$. Donc $g_\lambda = g|_{E_\lambda}$ est un endomorphisme de E_λ et, puisque g est diagonalisable, alors g_λ l'est aussi. On peut donc pour chaque λ considérer une base $B_\lambda = (v_{1,\lambda}, \dots, v_{\alpha_\lambda,\lambda})$ de E_λ qui diagonalise g_λ . En concaténant les bases B_λ on obtient une base de E dans laquelle

- f est diagonal car tous les vecteurs de B sont dans des espaces propres de f .
- g est diagonal car tous les vecteurs de B sont des vecteurs propres de g .

Si on a plus de deux endomorphismes $f_1, \dots, f_n$ alors on diagonalise successivement f_2 sur chaque espace propre E_λ de f_1 puis on diagonalise f_3 sur chaque espace propre de $f_2|_{E_\lambda} = f_3|_{E_\lambda}$ et ainsi de suite, on diagonalise chaque endomorphisme suivant sur l'intersection des espaces propres précédents.

Exercice 38 (correction)

1. On a

$$\begin{aligned} \|V(f)\|_2^2 &= \int_0^1 \left(\int_0^x f(t) dt \right)^2 dx \leq \int_0^1 x \int_0^x f(t)^2 dt dx \text{ par Cauchy-Schwartz} \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 f(t)^2 dt dx \leq \|f\|_2^2 \end{aligned}$$

Donc V est bien continu est sa norme subordonnée est plus petite que 1. Supposons que V admette une valeur propre λ alors il existe $f \neq 0$ telle que $V(f) = \lambda f$. Puisque f est continue $V(f)$ est de classe C^1 et donc f aussi (si $\lambda \neq 0$). On a alors $V(f)'(x) = f(x) = \lambda f'(x)$ qui donne $f(x) = f(0)e^{x/\lambda}$ mais $f(0) = V(f)(0) = 0$ donc $f = 0$ ce qui est absurde. Même conclusion si $\lambda = 0$.

2. On a

$$\begin{aligned} \langle V(f), g \rangle &= \int_0^1 \int_0^x f(t) dt g(x) dx = [V(f)V(g)]_0^1 - \int_0^1 f(x)V(g)(x) dx \text{ par IPP} \\ &= \int_0^1 f(x) dx \int_0^1 g(t) dt - \int_0^1 f(x)V(g)(x) dx = \int_0^1 f(x) \left(\int_0^1 g(t) dt - \int_0^x g(t) dt \right) dx \\ &= \int_0^1 f(x) \int_x^1 g(t) dt dx \end{aligned}$$

Donc $V^*(g)(x) = \int_x^1 g(t) dt$. On a alors $V^*(f)' = -f$.

3. Soit λ une valeur propre (positive) de $V \circ V^*$ et f un vecteur propre. De la même façon que pour la première question on peut montrer que $\lambda \neq 0$ donc $\lambda > 0$. On a $(V \circ V^*)(f) = \lambda f$ qui implique que f est de classe C^2 . On a, par continuité de V , $(V \circ V^*)(f)' = V(V^*(f)') = -V(f) = \lambda f'$ puis, en dérivant encore, $-f = \lambda f''$. On en déduit que $f(x) = a \cos(\omega x) + b \sin(\omega x)$ avec $\omega^2 = \frac{1}{\lambda}$. On a alors

$$\lambda f(x) = V \circ V^*(f)(x) = \int_0^x \int_t^1 f(u) du dt = \lambda f(x) + \left(\frac{a}{\omega} \sin(\omega) - \frac{b}{\omega} \cos(\omega) \right) x - a\lambda.$$

Donc $a\lambda = 0$ donc $a = 0$ donc $-\frac{b}{\omega} \cos(\omega) = 0$. Puisque $f \neq 0$, $\cos(\omega) = 0$, i.e. $\exists n \in \mathbb{Z}, \omega = \frac{\pi}{2} + n\pi$ donc $\lambda = \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}$. Réciproquement, chaque $\lambda = \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}$ est une valeur propre.

Exercice 39 (correction)

1. On a facilement que pour $\deg(P) \leq n$, $\deg(u(P)) \leq n$.
2. On a en faisant deux IPP

$$\langle u(P), Q \rangle = \int_{-1}^1 ((1-x^2)P'(x))' Q(x) dx = \underbrace{[(1-x^2)P'(x)Q(x)]_{-1}^1}_{=0} - \int_{-1}^1 (1-x^2)P'(x)' Q'(x) dx$$

puis en refaisant une IPP on a bien $\langle u(P), Q \rangle = \langle P, u(Q) \rangle$.

3. On propose deux justifications

Méthode 1 : Tout endomorphisme réel symétrique est diagonalisable en base orthonormée par le théorème spectral.

Méthode 2 (si le théorème spectral n'a pas encore été vu) : Puisque $u(\mathbb{R}_n[X]) \subseteq \mathbb{R}_n[X]$ la matrice de u dans la base canonique est triangulaire et puisque $u(X^k) = -k(k+1)X^k + \dots$ les valeurs sur la diagonale sont $-k(k+1)$ qui sont donc les valeurs propres de u . Puisqu'elles sont toutes distinctes u est bien diagonalisable.

4. (a) Remarquons que -1 et 1 sont des racines de $(X^2 - 1)^n$ de multiplicité n donc pour tout $k < n$, $[(x^2 - 1)^n]^{(k)}$ s'annule en -1 et 1 . Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a

$$\begin{aligned} \langle P, Q \rangle &= \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^n]^{(n)} Q(x) dx \\ &= \underbrace{[(x^2 - 1)^n]^{(n-1)} Q}_{=0} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^n]^{(n-1)} Q' dx \\ &\vdots \\ &= \underbrace{[(x^2 - 1)^n]^{(n-k)} Q^{(k-1)}}_{=0} \Big|_{-1}^1 - \int_{-1}^1 [(x^2 - 1)^n]^{(n-k)} Q^{(k)} dx \end{aligned}$$

Pour $k = n$ cela donne bien 0 puisque Q est de degré $n-1$ au plus.

- (b) On remarque que $\deg P_n = n$ donc $\text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On le montre par récurrence sur n . On a bien $u(P_0) = 0$ donc P_0 vecteur propre associé à la valeur propre 0. Supposons que $(P_0, \dots, P_{n-1})$ soit une base de vecteurs propres de u_{n-1} . On sait par ailleurs que les espaces propres sont en somme directe orthogonale et que ce sont des droites car les valeurs propres sont distinctes. Soit Q_n un vecteur propre de u_n associé à la valeur propre $-n(n+1)$. Puisque P_n est orthogonal à $\text{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})$ on a $P_n \in \text{Vect}(Q_n)$ (attention c'est vrai seulement par orthogonalité des sommes !!). Donc P_n vecteur propre de u_n .

Exercice 40 (correction)

$\Rightarrow$ Supposons A diagonalisable et (A_k) une suite de matrice de la forme $A_k = P_k^{-1} A P_k$ convergeant vers une matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$. Puisque pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $P \in \text{GL}_n(\mathbb{C})$, $Q(P^{-1} A P) = P^{-1} Q(A) P$ les matrices A_k ont toutes le même polynôme minimal μ qui est scindé à racines simples puisque A est diagonalisable. On en déduit que $\mu(A_k) \rightarrow \mu(B) = 0$. Donc B est également diagonalisable. Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\chi(X) := \det(A - X I_n) = \det(P_k^{-1} A P_k - X I_n) = \det(A_k - X I_n) \rightarrow \det(B - X I_n).$$

Donc B est diagonalisable et possède les mêmes valeurs propres que A avec les mêmes multiplicités. Les matrices A et B sont donc toutes les deux semblables à la même matrice diagonale, elles sont donc conjuguées, i.e. $B \in C(A)$. Donc, par caractérisation séquentielle, $C(A)$ est fermé.

$\Leftarrow$ Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ dont la classe de conjugaison est fermée. Puisque A est une matrice complexe elle est trigonalisable (son polynôme caractéristique est scindé par le théorème fondamental de l'algèbre). On écrit alors $P^{-1} A P = D + T$ avec D diagonale et T triangulaire supérieure stricte. Soit $t > 0$ et D_t la matrice diagonale $\text{diag}(1, t, \dots, t^{n-1})$. On va montrer que $D_t^{-1}(D + T)D_t \rightarrow D$ qui est dans l'adhérence de la classe de conjugaison de A . Puisque $C(A)$ est fermée ceci prouvera alors que A possède une matrice diagonale dans sa classe de conjugaison, i.e. qu'elle est diagonale. Soit $1 \leq i < j \leq n$ et E_{ij} la matrice élémentaire dont le coefficient (i, j) est 1 et 0 ailleurs. Un calcul rapide montre que $D_t^{-1} E_{ij} D_t = t^{j-i-1} \rightarrow 0$. On a alors

$$(P D_t)^{-1} (P D_t) = D_t^{-1} D D_t + D_t^{-1} T D_t = D + D_t^{-1} T D_t \rightarrow D$$

en écrivant T comme combinaison linéaire de E_{ij} et par ce qui précède.

Exercice 41 (correction)

On pose

$$\begin{aligned}\Phi_A : \quad \text{GL}_2(\mathbb{R}) &\longrightarrow C(A) \\ P &\longmapsto P^{-1}AP.\end{aligned}$$

Il s'agit d'une application continue par continuité du produit matriciel et du passage à l'inverse.

⇒ Soit A une matrice diagonalisable. On commence par montrer que $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs dans lesquelles se trouvent I_2 et $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En effet, on peut commencer par constater que $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs car $\det(\text{GL}_2(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs. Si $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ était connexe par arcs son image par une application continue serait elle aussi connexe par arcs. On remarque tout d'abord que I et $-I$ sont reliées par le chemin $t \in [0, 1] \mapsto R_{t\pi}$ où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ désigne la matrice de rotation d'angle θ . Ensuite, on considère une matrice P de déterminant strictement positif. On considère alors deux cas :

Si P ne possède aucune valeur propre négative. On considère alors le chemin $t \in [0, 1] \mapsto tP + (1-t)I_2$, s'il existe $t \in]0, 1]$ tel que $\det(tP + (1-t)I_2) = 0$ alors $\det(P + \frac{1-t}{t}I_2) = 0$ ce qui implique que $-\frac{1-t}{t}$ est une valeur propre de P ce qui est exclu.

Sinon. Si P possède une valeur propre négative alors l'autre l'est aussi car leur produit est un réel positif. Dans ce cas $-I_2P$ a ses deux valeurs propres positives et on peut relier P à $-P$ puis $-P$ à I_2 .

Si P est de déterminant négatif alors J_2P est de déterminant positif et est donc reliée continûment à I_2 par un chemin γ . Alors $J_2\gamma$ est un chemin continu de P à J_2 . On en déduit que $\text{GL}_2(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs $\text{GL}_2^+(\mathbb{R}) = \{P \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det P > 0\}$ et $\text{GL}_2^-(\mathbb{R}) = \{P \in \text{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det P < 0\}$.

Puisque A est diagonalisable, on peut trouver une matrice de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ dans $C(A)$. On a alors $\Phi_A(P) = D$ et $\Phi_A(J_2P) = D$ donc l'image par Φ_A de $\text{GL}_2^+(\mathbb{R})$ et celle de $\text{GL}_2^-(\mathbb{R})$ possède une intersection non vide. Donc $\Phi_A(\text{GL}_2(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs comme union de deux connexes par arcs ayant une intersection non vide.

⇐ On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $\Phi_A(I_2) = A$ et $\Phi_A(J_2) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ toutes les deux dans $C(A)$. On peut donc les relier par un chemin continu $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ telle que $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = \Phi_A(J_2)$. On propose alors deux conclusions. La première est beaucoup plus courte mais utilise le théorème spectral.

Méthode 1 : L'application $f : t \mapsto b(t) - c(t)$ est continue car γ est continue et satisfait $f(0) = b - c$ et $f(1) = -b + c = -f(0)$ donc f s'annule par le théorème des valeurs intermédiaires. On en déduit qu'il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $\gamma(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha' \end{pmatrix} \in C(A)$. Donc A est conjuguée à une matrice symétrique réelle donc diagonalisable (en base orthonormée) d'après le théorème spectral.

Méthode 2 : On a alors $c(0) = c$ et $c(1) = -c$ et c continue donc, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_0 \in [0, 1]$ tel que $c(t_0) = 0$, i.e. $\gamma(t_0)$ est triangulaire supérieure. On peut alors, sans perte de généralité, supposer que $c = 0$. On a alors

$$\Phi_A \left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & b + t(d-a) \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Donc si $d \neq a$ on construit un chemin de A vers $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Si $d = a$ alors on est ramené au cas où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

On remarque que $T := \Phi_A \left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. On considère $t \in [0, 1] \mapsto A(t)$ un chemin continu de $C(A)$ tel que $A(0) = A$ et $A(1) = T$. En écrivant pour tout t $A(t) = \Lambda(t) + \Gamma(t)$ avec $\Lambda(t)$ symétrique et $\Gamma(t)$ antisymétrique. Les fonctions Λ et Γ sont toutes les deux continues car il s'agit des projections de $t \mapsto A(t)$ sur l'espace des matrices symétriques et antisymétrique respectivement. On remarque que

- $\Lambda(0) = \Lambda(1) = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & a \end{pmatrix}$ et $\Gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 & b/2 \\ -b/2 & 0 \end{pmatrix} = -\Gamma(1)$.
- L'espace des matrices antisymétriques 2×2 est de dimension 1 engendré par $\Gamma(0)$ si $b \neq 0$ (si $b = 0$ alors A est déjà diagonale).

On peut donc réécrire $A(t) = \Lambda(t) + \lambda(t)\Gamma(0)$ avec $\lambda(0) = 1$ et $\lambda(1) = -1$ et λ continue car une application vectorielle est continue si et seulement si toutes ses coordonnées sont continues. On en déduit que λ s'annule en un certain t_0 . On a alors $A(t_0) = \Lambda(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha' \end{pmatrix}$.

Puisqu'il s'agit d'un conjugué de A elle a la même trace que A à savoir $2a$ et le même déterminant a^2 donc $\begin{cases} \alpha + \alpha' = 2a \\ \alpha\alpha' - \beta^2 = a^2 \end{cases}$. Donc α et α' sont racines réelles de $X^2 - 2aX + a^2 + \beta^2$ de discriminant $\Delta = 4a^2 - 4(a^2 + \beta^2) = -4\beta^2$ donc $\beta = 0$ et $\alpha = \alpha' = a$. Donc $A(t_0) = aI_2$.

Il se trouve que si $b \neq 0$ alors la matrice A n'est pas diagonalisable, donc ce dernier cas que l'on traite n'arrive jamais.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : fabien.narbonne@posteo.net

Site internet : <https://fabiennarbonne.fr>