Probabilités

Il s'agit d'une liste d'exercices corrigés que j'utilise pour les colles que je dispense au lycée Chateaubriand, destinée aux étudiant·e·s de deuxième année de classe préparatoire. Cette liste est mise à leur disposition dès que les chapitres correspondants ont été abordés.

Si vous travaillez sur cette liste au cours de l'année, il se peut que certains chapitres n'aient pas encore été étudiés. Lorsque la résolution d'un exercice fait appel à des notions qui ne sont abordées que plus tard dans l'année, je précise les outils utilisés sous forme de mots-clés. Si vous n'êtes pas encore familier·ère avec ces notions, n'hésitez pas à passer à l'exercice suivant.

De nombreux exercices et leurs corrigés proviennent de ma propre création. Il est donc possible qu'il subsiste des coquilles, des erreurs ou des pistes d'amélioration. Je procède d'ailleurs régulièrement à des corrections. Si vous avez des suggestions d'amélioration ou si certains arguments vous semblent peu clairs, n'hésitez pas à me contacter. Mes coordonnées figurent en bas de la dernière page du document.

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

On considère n variables aléatoires $B_1, \dots, B_n$ indépendantes et suivant des lois de Bernoulli de même paramètre p. On pose $X = B_1 + \cdots + B_n$. Donner la loi de X et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 2 (★★☆☆☆) - Approximation d'une loi de Poisson par des binomiales

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) telle que X_n suit une loi binomiale de paramètre $B(n, p_n)$ avec $np_n \to \lambda \in \mathbb{R}$ et Y qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow \mathbb{P}(Y = k)$.

Exercice 3 (★☆☆☆☆)

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs $0 < p, q < 1$. On pose $Z = \max(X, Y)$ et $Z' = \min(X, Y)$. Donner les lois de Z et Z' puis dire si elles sont indépendantes.

Mots clés :

Exercice 4 (★☆☆☆☆)

On appelle tribu des boréliens notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles ouverts. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est aussi engendrée par les intervalles fermés.

Mots clés : *Tribus*

Exercice 5 (★★☆☆☆)

Soit p un nombre premier. On munit $M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de la probabilité uniforme. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\right) = p^{\frac{-n(n+1)}{2}} (p^n - 1)\left(p^{n-1} - 1\right) \cdots (p - 1).$$

Mots clés : *Corps* $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$

Exercice 6 (★★☆☆☆)

On considère pour tout entier $n \geq 2$ des variables indépendantes $B_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n+1}\right)$ de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n+1}$. On considère X la variable aléatoire représentant le rang de la première réussite.

La variable X a-t-elle une espérance ? Si oui la calculer.

Mots clés : *Espérance de variable aléatoire dans un ensemble infini*

Exercice 7 (★☆☆☆☆)

On considère un corps K ayant un nombre fini d'éléments q et X une variable de loi uniforme sur $K \setminus \{0\}$. On note $S_K = \left\{x^2 \in K \mid x \in K \setminus \{0\}\right\}$ l'ensemble des carrés non nuls.

Montrer que X^2 suit une loi uniforme sur S_K. En déduire que si $2 = 1_K + 1_K$ est non nul dans K on a $\#S_K = \frac{q-1}{2}$ et que si $2 = 0_K$ alors $S_K = K \setminus \{0\}$.

Mots clés : *Corps*

Exercice 8 (★★★☆☆)

On a n feuilles originales et n photocopies que l'on souhaite agrafer à leur originale. Malheureusement, on a tout mélangé et, puisqu'on a un travail terriblement ennuyeux, on décide de mettre le tout dans une boite et à chaque étape on tire deux feuilles au hasard dans la boite. Si ces deux feuilles sont une originale et sa copie on les agrafe et on continue. Sinon on replace les deux feuilles dans la boite et on recommence. On note T_n le nombre d'étape nécessaires pour vider la boite. Lorsqu'on remet des feuilles dans la boite on suppose le prochain tirage indépendant du précédent. On pose

- A_n : « les deux premières feuilles piochées ne sont pas agrafées ».
- $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Calculer a_n
2. On souhaite traiter le cas $n = 2$.
   (a) Comment appelle-t-on la loi de $T_2 - 1$?
   (b) Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a $\mathbb{P}(T_2 = k) = (1 - a_2)a_2^{k-2}$.
3. Cas $n = 3$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(T_3 = 2)$ et $\mathbb{P}(T_3 = 3)$.
   (b) Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a
   $$\mathbb{P}(T_3 = k + 1) = (1 - a_3)\mathbb{P}(T_2 = k) + a_3\mathbb{P}(T_3 = k).$$
   (c) En déduire que pour tout
   $$k \geq 2, \mathbb{P}(T_3 = k) = \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_2^{k-2} - a_3^{k-2}\right).$$
4. Cas général.
   (a) Montrer que $T_n = t_n + T_{n-1}$ où t_n suit une loi géométrique de paramètre $1 - a_n$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}[T_n]$ *(ne pas faire cette question si l'espérance d'une variable de loi géométrique n'a pas encore été vue en cours).*

Mots clés : *Loi géométrique*

Exercice 9 (★★★★☆)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier et $p \in]0; 1[\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Une particule se déplace sur un axe $[0, N]$ en partant d'un entier $n \in \{0, \ldots, N\}$. À chaque instant elle saute d'une unité à droite avec probabilité p ou à gauche avec probabilité $q = 1 - p$. Lorsque la particule atteint 0 ou N elle y reste à jamais. On pose q_n (resp. p_n) la probabilité que la particule atteigne 0 (resp. N) en partant de n. Tous les déplacements sont supposés indépendants des précédents.

1. Donner q_0 et q_N puis montrer que pour tout $1 \leq n \leq N - 1$ on a
   $$q_n = pq_{n+1} + qq_{n-1}.$$
2. En déduire l'expression de q_n en fonction de n.
3. Que vaut $p_n + q_n$?
4. Quelle est la probabilité pour que la particule ne s'arrête jamais lorsqu'elle part de n ?
5. On suppose que $p > \frac{1}{2}$ et N pair montrer qu'alors $q_{N/2} \to 0$ lorsque N devient grand.

Exercice 10 (★★★☆☆)

1. Soit $a \geq 0$ et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante. Montrer que pour une variable aléatoire positive Z on a
$$\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[\varphi(Z)]}{\varphi(a)}.$$
2. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente telle que $\forall n \geq 0, u_n \geq 0$ et $\sum_{n\geq 0} n^2 u_n$ converge aussi. Montrer que
$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Mots clés : *Inégalité de Markov*

Exercice 11 (★★★☆☆)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère X_n une variable de loi géométrique de paramètre $1 - p_n = \frac{1}{n}$. On pose $Y_n = \max(X_n, n)$.

1. Déterminer la fonction génératrice $G_{Y_n}(t)$ de Y_n.
2. Donner un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$ de $\mathbb{E}\left[Y_n\right]$.

Mots clés : *Série génératrice*

Exercice 12 (★★★☆☆)

On considère une urne contenant 2 boules blanches et une boule rouge. On tire successivement des boules dans l'urne. Si on tire une boule blanche on la retire définitivement. Si on tire la boule rouge on la replace dans l'urne. On pose X_n le nombre de boules blanches au n-ème tirage. On pose $x_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $y_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $z_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. On pose $M = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Étude de M.
   (a) Montrer que M est diagonalisable et déterminer une base de chacun de ses espaces propres.
   (b) Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (a) Déterminer une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $U_{n+1} = AU_n$.
   (b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
   (c) Que peut-on dire du comportement asymptotique de x_n, y_n et z_n ? Est-ce surprenant ?

Mots clés : *Réduction, Probabilité*

Exercice 13 (★★★★☆) Dés truqués I

Une menuisière souhaite tailler deux dés à 6 faces numérotés de 1 à 6. Elle aimerait piper les dés de telle sorte que le résultat de la somme suive une loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$ (on ne demande pas que les dés soient pipés de la même façon). Dans cet exercice on veut déterminer si le projet de la menuisière est réalisable et, si c'est le cas, quelles sont les lois possibles pour chacun des dés. On notera X et Y les variables aléatoires représentant le résultat de chacun des dés.

1. Montrer qu'un polynôme de degré impair admet toujours une racine réelle.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $P_X \in \mathbb{R}_5[X]$ (resp. $P_Y \in \mathbb{R}_5[X]$) tels que le série génératrice de X (resp. de Y) vérifie
$$G_X(t) = tP_X(t) \text{ (resp. } G_Y(t) = tP_Y(t)).$$
3. On considère une variable aléatoire U qui suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{2, \ldots, 12\}$. Montrer que la série génératrice de U vérifie
$$G_U(t) = \frac{t^2}{11} \cdot \frac{t^{11} - 1}{t - 1}.$$
4. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + t + t^2 + \cdots + t^{10} > 0$ (on pourra décrire les racines complexes du polynôme).

5. En déduire que le projet de la menuisière est irréalisable.
6. On suppose désormais que X représente un dé à 7 faces numéroté de 1 à 7 et que le dé Y est un dés standard à 6 faces non truqué.
   (a) Montrer qu'il est possible de truquer X de telle sorte que $X + Y$ suive une loi uniforme. Donner alors la loi de X.
   (b) Quelle forme aurait un tel « dé »?

Mots clés : *Séries génératrices*

Exercice 14 (★★★★★) Dés truqués II

Une menuisière souhaite réaliser deux dés équilibrés à 6 faces numérotés par des réels. Elle aimerait que le résultat de la somme de ces dés renumérotés suive la même loi que le résultat de la somme de deux dés équilibrés classiques. Dans cet exercice on veut déterminer si le projet de la menuisière est réalisable et, si c'est le cas, toutes les solutions possibles. On notera X et Y les variables aléatoires représentant le résultat de chacun des dés et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$ et $\beta_1 < \cdots < \beta_s$ avec $1 \leq s, r \leq 6$ les valeurs distinctes prises respectivement par X et Y.

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et $1 = n_1 < \cdots < n_r$ et $1 = m_1 < \cdots < m_s$ des entiers tels que
$$\forall i, \alpha_i = n_i + \gamma \text{ et } \forall j, \beta_j = m_j - \gamma.$$
En déduire qu'on peut se ramener au cas où les α_i et les β_j sont des entiers positifs.
2. Montrer que les séries génératrices G_X et G_Y de X et de Y vérifient
$$G_X(t)G_Y(t) = \left(\frac{t^2}{6} \cdot \frac{t^6 - 1}{t - 1}\right)^2.$$
3. En déduire toutes les possibilités pour numéroter chacun des dés.
4. Y a-t-il d'autres possibilités si on n'impose plus que X et Y soient équilibrés ?

Mots clés : *Série génératrice*

Exercice 15 (★★★★☆)

On considère N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuée, indépendantes entre elles, indépendante de N et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on notera $G_X(t)$ la fonction génératrice commune des variables X_i.

Théorème de la composition : On veut montrer qu'avec les notation ci-dessus les fonctions génératrices G_{S_N}, G_N et G_X vérifient
$$G_{S_N}(t) = G_N(G_X(t)).$$

1. Soit A un évènement d'un univers Ω. Montrer que l'indicatrice de A définie par
$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$
suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.
2. Montrer que $t^{S_N} = \sum_{n\geq 1} t^{S_n}\mathbb{1}_{\{N=n\}}$.
3. Conclure.

Applications : On vous propose un jeu. Vous disposez de deux pièces déséquilibrées de probabilités respectives de faire pile $0 < q < p < 1$. Le jeu se déroule ainsi :

- Choisissez une pièce et lancez-la jusqu'à tomber sur face. Notez alors le rang de l'obtention de la première face que vous appelez N.
- Vous effectuez ensuite N lancers avec l'autre pièce.
- Votre score final est le nombre de piles obtenus avec la seconde pièce.

Vous avez le choix de la pièce. Expliquez, en fonction de p et q comment choisir la première pièce pour maximiser votre score.

Mots clés : *Séries génératrices*

Exercice 16 (★★★★☆)

On considère $m+1$ personnes, numérotées de 0 à m, assises côte à côte. À l'instant 0 la personne numéro 0 commence à propager une rumeur. À chaque instant chaque personne au courant de la rumeur a une probabilité $0 < p < 1$ d'en informer son voisin. On note T le temps nécessaire pour que les m personnes soient au courant de la rumeur. Calculer l'espérance de T.

On pourra introduire les variables

$$t_i = \text{ Temps nécessaire pour que } i \text{ personnes soient au courant sachant que } i-1 \text{ personnes sont au courant.}$$

On suppose ensuite que chaque personne au courant de la rumeur a une probabilité $0 < q < 1$ d'oublier la rumeur. Que vaut alors l'espérance de T ?

Mots clés : *Espérance de variable aléatoire dans un ensemble infini*

Exercice 17 (★★★★☆)

On considère un sac contenant N cordes. On choisit successivement deux extrémités libres que l'on noue entre elles jusqu'à ce qu'elles soient toutes nouées. Donner l'espérance du nombre de boucles et un équivalent de cette espérance lorsque $N \to +\infty$.

Mots clés : *Dénombrement*

Exercice 18 (★★★★☆)

Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $\Omega = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que l'on considère comme un espace probabilisé avec la probabilité uniforme. Pour tout $d \in \mathbb{Z}$, $D_d = d\left(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\right)$, l'ensemble des classes des multiples de d modulo n.

1. Calculer $\mathbb{P}(D_d)$ pour tout $d \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que si $d_1, \dots, d_r$ sont premiers entre eux deux à deux alors $D_{d_1}, \dots, D_{d_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. On pose $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs premiers de n. Montrer que

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

où $\varphi(n)$ désigne l'indicatrice d'Euler de n.

Mots clés : *Anneaux $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*

Exercice 19 (★★★★★) - Inspiré de X-ENS Sujet A 2024

On pose $n \geq 2$ et $\mathfrak{S}_n$, le groupe des permutations de $\{1, \dots, n\}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on pose $\varepsilon(\sigma)$ sa signature et $\nu(\sigma)$ son nombre de points fixes. Enfin, on appelle dérangement une permutation sans point fixe, on note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$ et on admet que $\#\mathfrak{D}_n = n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$. On pose

$$M = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M. *Il est possible de le déterminer sans aucun calcul de déterminant. Observez bien la matrice avant de vous lancer dans des calculs laborieux.*
2. En déduire que
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X^{\nu(\sigma)} = (X-1)^{n-1}(X+n-1).$$
3. On pose $K_1 = \left\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\right\}$ et $K_{-1} = \left\{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\right\}$. Montrer que
$$\#K_1 = \#K_{-1} + (-1)^n(n-1).$$

4. On considère $\left(\mathfrak{D}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{D}_n)\right)$ muni de la probabilité uniforme et Y_n définie sur cet espace probabilisé par $Y_n(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$. Montrer que
$$\left|\mathbb{P}(Y_n = 1) - \frac{1}{2}\right| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e}{2(n-1)!}.$$

Mots clés : *Réduction, probabilités*

Exercice 20 (★★☆☆☆)

Soit $n \geq 1$ un entier, E un ensemble à $2n$ éléments et A et B une partition de E en deux ensembles de $m \leq n$ et $2n - m$ éléments respectivement. On considère Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $\Omega = \{F \in \mathcal{P}(E) \mid \#F = n\}$. À l'aide de la variable $X = \#A \cap Z$ déterminer la valeur des sommes
$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{2n-m}{n-k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Mots clés : *Dénombrement*

Exercice 21 (★★★☆☆)

Soit $n \geq 1$ un entier, E un ensemble à $2n$ éléments et A et B une partition de E en deux ensembles de n éléments. On considère Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $\Omega = \{F \in \mathcal{P}(E) \mid \#F = n\}$. Déterminer la loi le $X = \max\{\#A \cap Z, \#B \cap Z\}$.
Mots clés : *Dénombrement*

Exercice 22 (★★★★★) - Nombre moyen de cycles

On considère $n \geq 1$ un entier et $\left(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n), \mathbb{P}\right)$ avec $\mathbb{P}$ la loi de probabilité uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. On pose $X : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire qui a une permutation σ donne son nombre de cycle dans sa décomposition en cycles à supports disjoints. On considérera que les points fixes sont des cycles de longueur 1. Par exemple $X(\mathrm{id}) = n$. On souhaite calculer l'espérance et la variance de X. Pour cela on pose $a_{n,k}$ le nombre de permutations admettant k cycles dans sa décomposition et $A_{n,k} = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} x^k$. On pose $a_{0,0} = 1$ et, pour $k \geq 1$, $a_{0,k} = 0$.

1. Montrer que, pour $1 \leq k \leq n$, on a
$$a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + (n-1)a_{n-1,k}.$$
Indication : on pourra séparer les cas des permutations ayant k cycles qui fixent n et les autres.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}, A_n(x) = (x+n-1)(x+n-2)\cdots(x+1)x$.
3. En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$.

Mots clés : *Dénombrement, permutations*

Éléments de corrections - Probabilités

Exercice 1 (correction)

L'univers de X est $\{0, \dots, n\}$ et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{A\subseteq\{1,\dots,n\},\#A=k} \left\{B_i = 1, \forall i \in A / \text{ et } B_j = 0, \forall j \notin A\right\}\right) \\
&= \sum_{A,\#A=k} \mathbb{P}\left(\left\{B_i = 1, \forall i \in A / \text{ et } B_j = 0, \forall j \notin A\right\}\right) && \text{(par disjonction des événements)} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} && \text{(par indépendances des } B_i\text{).}
\end{aligned}$$

On reconnaît donc une loi binomiale de paramètre (n, p).

Par linéarité de l'espérance on a $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[B_i] = np$. Par indépendance des B_i on a $\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(B_i) = np(1-p)$.

Exercice 2 (correction)

On a, par définition, $\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k}$. Or $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n\to+\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$. D'autre part, $(1-p_n)^{n-k} = e^{(n-k)\ln(1-p_n)} = e^{(n-k)(-p_n+o(p_n))} \to e^{-\lambda}$. En conclusion, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{(np_n)^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Exercice 3 (correction)

Les deux variables Z et Z' sont à valeurs dans $\{0, 1\}$. Elles suivent donc des lois de Bernoulli de paramètre respectifs $\mathbb{P}(\max(X, Y) = 1)$ et $\mathbb{P}(\min(X, Y)) = 1$. On calcule ces deux quantités. On a $\{\max(X, Y) = 1\} = \{X = 1\} \cup \{Y = 1\}$ donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\max(X, Y) = 1) &= \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = p + q - pq. \\
\mathbb{P}(\min(X, Y) = 1) &= \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = pq.
\end{aligned}$$

On a $\mathbb{P}((Z = 0) \cap (Z' = 1)) = 0$ car le premier évènement survient quand $X = 0$ et $Y = 0$ et le second lorsque $X = 1$ et $Y = 1$ ce qui sont évidemment des évènements incompatibles. Pourtant $P(Z = 0) = 1 - p - q + pq = (1-p)(1-q) \neq 0$ et $P(Z' = 1) = pq \neq 0$. Donc les variables ne sont pas indépendantes.

Exercice 4 (correction)

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ la tribu engendré par les intervalles fermés. Soit $a < b \in \mathbb{R}$ alors $[a, b] =]-\infty, a[^c \cap]b, +\infty[^c$ donc $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par ailleurs, par stabilité par union dénombrable $[a, +\infty[= \bigcup_{n\in\mathbb{N}^*}[a, a+n]$ donc les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ et, de même ceux de la forme $]-\infty, a]$ sont des éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ donc

$$]a, b[=]-\infty, b]^c \cap [a, +\infty[^c \in \mathcal{F}(\mathbb{R}).$$

donc on a l'inclusion réciproque.

Exercice 5 (correction)

On rappelle qu'une matrice $M \in M_n(K)$ est inversible si et seulement si ses colonnes forment une base de K^n lorsque K est un corps. On note $K = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Tirer au hasard une matrice suivant une loi uniforme revient à tirer au hasard ses coefficients ou alors ses colonnes dans K^n. On a donc $p^n - 1$ choix pour la première colonne c_1 (tous les vecteurs hormis le vecteur nul peuvent faire parti d'une base). Pour que la famille reste libre on doit prendre le second vecteur dans $K^n \setminus \mathrm{Vect}(c_1)$ ce qui laisse $p^n - p$ choix. Par récurrence, on obtient $p^n - p^{k-1}$ choix pour le k-ème vecteur ce qui fait au final

$$\mathbb{P}(\mathrm{GL}_n(K)) = \frac{(p^n-1)(p^n-p)\cdots\left(p^n-p^{n-1}\right)}{p^{n^2}} = \frac{p^{1+2+\cdots+n-1}(p^n-1)\left(p^{n-1}-1\right)\cdots(p-1)}{p^{n^2}} = p^{\dfrac{n(n-1)}{2}-n^2}(p^n-1)\left(p^{n-1}-1\right)\cdots(p-1)$$

Donc on a bien $\mathbb{P}(\mathrm{GL}_n(K)) = p^{\frac{-n(n+1)}{2}}(p^n-1)\left(p^{n-1}-1\right)\cdots(p-1)$.

Exercice 6 (correction)

On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X = n)$. On a

$$\{X = n\} = \left(\bigcap_{k=0}^{n-1}\{B_k = 0\}\right) \cap \{B_n = 1\}.$$

Donc, $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$ et, par indépendance des B_k, on a pour $n \geq 1$

$$\mathbb{P}(X = n) = \left(1 - \frac{1}{1+1}\right)\cdots\left(1 - \frac{1}{n}\right)\cdot\frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Donc l'espérance existe si et seulement si la série $\left(\sum_{n\geq 1}\frac{1}{n+1}\right)$ converge ce qui n'est pas le cas donc X n'a pas d'espérance.

Exercice 7 (correction)

Soit $x \in K \setminus \{0\}$. On a

$$\mathbb{P}(X^2 = x^2) = \mathbb{P}((X-x)(X+x) = 0) = \mathbb{P}((X = x) \text{ ou } (X = -x)).$$

Par intégrité de K. Or $x = -x \Leftrightarrow 2 = 0 \in K$ on en déduit donc que les évènements $X = x$ et $X = -x$ sont disjoints si et seulement si $2 \neq 0$ autrement ils sont égaux. Donc si $2 \neq 0$

$$\mathbb{P}(X^2 = x^2) = \mathbb{P}(X = x) + \mathbb{P}(X = -x) = \frac{2}{q-1}$$

ce qui ne dépend pas de x donc X^2 est uniforme et $\#S_K = \frac{q-1}{2}$. Autrement $\mathbb{P}(X^2 = x^2) = \frac{1}{q-1}$ donc X^2 est uniforme sur $S_K = K \setminus \{0\}$.

Exercice 8 (correction)

1. On calcule la probabilité de l'évènement contraire. Lorsqu'on tire 2 feuilles, la seconde à une probabilité $\frac{1}{2n-1}$ d'être celle associée à la première. Donc $a_n = 1 - \frac{1}{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1}$.
2. Cas $n = 2$.
   (a) Le premier bon tirage suit une loi géometrique de paramètre $1 - a_2$. Le tirage suivant est alors composé du second couple de feuilles. On a donc $T_2 - 1$ qui suit une loi géométrique
   (b) En déduit de la question précédente que $\mathbb{P}(T_2 - 1 = k - 1) = (1 - a_2)a_2^{k-2}$.
3. Cas $n = 3$.
   (a) On a $\mathbb{P}(T_3 = 2) = 0$ car il faut au minimum trois tirages pour agrafer les trois couples et $\mathbb{P}(T_3 = 3) = (1 - a_3)(1 - a_2)$ car il faut avoir agrafer les deux premières puis les deux suivantes.

(b) Les évènements A_3 et $\overline{A_3}$ forment un système complet. On a alors, par la formule des probabilités totales

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_3 = k+1) &= \mathbb{P}(T_3 = k+1|A_3)\mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(T_3 = k+1|\overline{A_3})\mathbb{P}(\overline{A_3})\\ &= \mathbb{P}(T_3 = k)\mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(T_2 = k)\mathbb{P}(\overline{A_3})\\ &= a_3\mathbb{P}(T_3 = k) + (1-a_3)\mathbb{P}(T_2 = k).\end{aligned}$$

L'égalité $\mathbb{P}(T_3 = k+1|A_3) = \mathbb{P}(T_3 = k)$ provient de l'hypothèse d'indépendance lorsqu'on replace les feuilles et $\mathbb{P}(T_3 = k+1|\overline{A_3}) = \mathbb{P}(T_2 = k)$ du fait qu'on se retrouve ramené au cas 2 lorsqu'on agrafe les deux premières feuilles.

(c) On fait une récurrence. C'est vrai au rang $k = 2$ (et $k = 3$ mais ça n'a aucune importance). Soit $k \geq 2$ tel que $\mathbb{P}(T_3 = k) = \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right)$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_3 = k+1) &= a_3\mathbb{P}(T_3 = k) + (1-a_3)\mathbb{P}(T_2 = k)\\ &= a_3\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(a_3^{k-2} - a_2^{k-2}\right) + (1-a_3)(1-a_2)a_2^{k-2} && \text{(d'après l'HR et la question 2.a)}\\ &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[a_3^{k-1} - a_3a_2^{k-2} + (a_3-a_2)a_2^{k-2}\right] && \text{(en factorisant par}\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2})\\ &= \frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(a_3^{k-1} - a_2^{k-1}\right)\end{aligned}$$

4. Cas général.

(a) Après le premier tirage d'un couple originale+photocopie on est ramené au cas $n-1$. Le temps avant le premier bon tirage suit une loi géométrique de paramètre $1-a_n$.

(b) On a alors par récurrence $T_n = \sum_{j=3}^n t_j + T_2 = 1 + \sum_{j=2}^n t_j$ avec t_j qui suit une loi géométrique de paramètre $1-a_j$ et on se rappelle que $T_2 - 1 \sim t_2$. On a alors

$$\mathbb{E}[T_n] = \sum_{j=2} \frac{1}{\frac{1}{2j-1}} + 1 = \sum_{j=1}^{n} 2j-1 = n^2.$$

Exercice 9 (correction)

1. On a, par hypothèse, $q_0 = 1$ et $q_N = 0$. Soit $1 \leq n \leq N-1$. On pose les évènements

$$P_{k,j} = \{\text{La particule est en } j \text{ à l'instant } k\}.$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}q_n &= \mathbb{P}(\text{La particule atteint } 0|P_{1,n})\\ &= \mathbb{P}(\text{La particule atteint } 0 \text{ et } P_{2,n-1}|P_{1,n}) + \mathbb{P}(\text{La particule atteint } 0 \text{ et } P_{2,n+1}|P_{1,n}))\\ &= \underbrace{\mathbb{P}(\text{La particule atteint } 0|P_{1,n} \text{ et } P_{2,n-1})}_{=\mathbb{P}(\text{La particule atteint } 0|P_{1,n-1})}\underbrace{\mathbb{P}(P_{2,n-1}|P_{1,n})}_{q} + \underbrace{\mathbb{P}(\text{La particule atteint } 0|P_{1,n} \text{ et } P_{2,n+1})}_{=\mathbb{P}(\text{La particule atteint } 0|P_{1,n+1})}\underbrace{\mathbb{P}(P_{2,n+1}|P_{1,n})}_{q}\\ &= pq_{n+1} + qq_{n-1}.\end{aligned}$$

Le passage de la deuxième ligne à la troisième provenant de la formule $\mathbb{P}(A \cap B|C) = \mathbb{P}(A|B \cap C)\mathbb{P}(B|C)$ (écrire les définitions).

2. On reconnaît une suite définie par récurrence linéaire. On la résout en posant $q_n = r^n$ ce qui donne $pr^2 - r + q = 0$ ayant pour solutions réelles distinctes $r_1 = \frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2p}$ et $r_2 = \frac{1+\sqrt{1-4pq}}{2p}$. En effet, la fonction $p \in]0;1[\mapsto 4p(1-p)$ a son maximum en $p = \frac{1}{2}$ et ce dernier vaut 1 donc le discriminant vaut 1. On en déduit que pour tout n on a $q_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$. Grâce aux conditions $q_0 = 1$ et $q_N = 0$ on trouve $\lambda = \frac{r_2^N}{r_2^N - r_1^N}$ et $\mu = \frac{-r_1^N}{r_2^N - r_1^N}$.

3. L'espace des solutions des suites vérifiant la relation de récurrence de la question 1 est un espace vectoriel de dimension 2 dont 1 et (q_n) sont solutions et donc forment une base. On remarque alors que puisque (p_n) est aussi solution on doit avoir deux constantes α et β telles que pour tout n, $p_n = \alpha + \beta q_n$. Mais puisque $p_0 = 0 = 1 - q_0$ et $p_N = 1 = 1 - q_N$ on a $\alpha = 1$ et $\beta = -1$ donc $p_n + q_n = 1$.

4. La probabilité pour que la particule ne s'arrête jamais en partant de n est $1-(p_n+q_n)=0$ d'après la question précédente.
5. L'hypothèse $p>\frac{1}{2}$ implique que $r_1<1$ et $r_2>1$. On en déduit que

$$q_{N/2}=\frac{r_2^N r_1^{N/2}-r_1^N r_2^{N/2}}{r_2^N-r_1^N}\sim\frac{(r_2\sqrt{r_1})^N-(r_1\sqrt{r_2})^N}{r_2^N}\sim\sqrt{r_1}^N-\left(\frac{r_1}{\sqrt{r_2}}\right)^N\longrightarrow 0.$$

Exercice 10 (correction)

1. Puisque φ est croissante on a pour tout $\omega\in\Omega$, $Z(\omega)\geq a\Rightarrow\varphi(Z(\omega))\geq\varphi(a)$ ce qui revient à avoir l'inclusion d'évènements $\{Z\geq a\}\subseteq\{\varphi(Z)\geq\varphi(a)\}$ donc

$$\mathbb{P}(Z\geq a)\leq\mathbb{P}(\varphi(Z)\geq\varphi(a))\underset{\text{(Markov)}}{\leq}\frac{\mathbb{E}[\varphi(Z)]}{\varphi(a)}.$$

2. On pose $\ell=\sum_{k=0}^{+\infty}u_n$. Puisque tous les u_n sont positifs on a $\frac{u_n}{\ell}$ qui définit une probabilité sur $\mathbb{N}$. On peut appliquer la question précédente à $\varphi(t)=t^2$, $a=N\in\mathbb{N}$ et Z qui suit la loi définie par u_n. On a donc

$$\mathbb{P}(Z\geq N)=\sum_{n=N}^{+\infty}\frac{u_n}{\ell}\leq\frac{\mathbb{E}[Z^2]}{N^2}=\frac{\sum_{n=0}^{+\infty}n^2u_n}{N^2}$$

donc on a bien $u_n=O\left(\frac{1}{N^2}\right)$.

Exercice 11 (correction)

1. On commence par calculer $\mathbb{P}(Y_n=k)$ pour tout $k\in\mathbb{N}$. Puisque pour tout $\omega\in\Omega$, $Y_n(\omega)\geq n$ on a $\mathbb{P}(Y_n=k)=0$ pour $k<n$. Par ailleurs, $\mathbb{P}(Y_n=k)=\mathbb{P}(X_n=k)=(1-p_n)p_n^{k-1}$. Enfin, $\max(n,X)=n$ si et seulement si $X\leq n$. Donc $\mathbb{P}(Y_n=n)=\sum_{k=1}^{n}\mathbb{P}(X_n=k)=1-p_n^n$. On en déduit que

$$\begin{aligned}G_{Y_n}(t)&=(1-p_n^n)t^n+\sum_{k=n+1}^{+\infty}(1-p_n)p_n^{k-1}t^k\\&=(1-p_n^n)t^n+(1-p_n)p_n^nt^{n+1}\sum_{k=0}^{+\infty}(p_nt)^k\\&=(1-p_n^n)t^n+\frac{(1-p_n)p_n^nt^{t+1}}{1-p_nt}.\end{aligned}$$

2. On calcule l'espérance de Y_n qui est, si elle existe, $G'_{Y_n}(1)$. On a

$$\begin{aligned}G'_{Y_n}(t)&=n(1-p_n^n)t^{n-1}+(1-p_n)p_n^n\frac{(n+1)(1-p_nt)t^n+p_nt^{n+1}}{(1-p_nt)^2}\\&=n(1-p_n^n)t^{n-1}+(1-p_n)p_n^nt^n\frac{(n+1)(1-p_nt)+p_nt}{(1-p_nt)^2}\\&=n(1-p_n^n)t^{n-1}+(1-p_n)p_n^nt^n\frac{n(1-p_nt)+1}{(1-p_nt)^2}\end{aligned}$$

que l'on évalue en 1 ce qui donne

$$\mathbb{E}[Y_n]=G'_{Y_n}(1)=n(1-p_n^n)+np_n^n+\frac{p_n^n}{1-p_n}=n+n\left(1-\frac{1}{n}\right)^n\underset{+\infty}{\sim}(1+e^{-1})n.$$

Exercice 12 (correction)

1. (a) Puisque M est triangulaire on peut lire ses valeurs propres sur la diagonale qui sont $6, 3$ et 2. Ces trois valeurs propres étant distinctes M est bien diagonalisable. On trouve comme vecteurs propres $v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivement.

   (b) D'après la question précédente on a $M = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Donc, par téléscopage on a $M^n = PD^nP^{-1}$ ce qui donne

$$M^n = \begin{pmatrix} 6^n & 6^n - 3^n & 6^n - 4 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n \\ 0 & 3^n & 4 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

2. (a) On a, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0)}_{=1} \mathbb{P}(X_n = 0) + \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1)}_{=\frac{1}{2}} \mathbb{P}(X_n = 1) + \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 2)}_{=0} \mathbb{P}(X_n = 2) \\ &= x_n + \frac{1}{2} y_n \end{aligned}$$

   De même

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1}{2} y_n + \frac{2}{3} z_n \\ z_{n+1} &= \frac{1}{3} z_n \end{aligned}$$

   En conclusion $U_{n+1} = \frac{1}{6} M U_n$.

   (b) On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{6^n} M^n U_0$ et on a $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par hypothèse. Donc $U_n = \begin{pmatrix} 1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}$.

   (c) On a donc bien $x_n \to 1$ et $y_n, z_n \to 0$, la probabilité que les boules blanches disparaissent tend bien vers 0.

Exercice 13 (correction)

1. Soit $P(t) = a_m t^m + a_{m-1} t^{m-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}_m[X]$ de degré m, i.e. $a_m \neq 0$. Alors $P(t) \sim a_m t^m$ en $\pm\infty$. Par imparité de m les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont respectivement $+\infty$ et $-\infty$ si $a_m > 0$ ou le contraire si $a_m < 0$. Un polynôme de degré 5 étant continu, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires ce qui donne la surjectivité de P donc l'existence d'une racine.
2. On a

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k) t^k = t \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k) t^{k-1}.$$

   Pareil pour Y.

3. Par définition on a

$$\begin{aligned} G_U(t) &= \sum_{k=2}^{12} \frac{1}{11} t^k \\ &= \frac{t^2}{11} \sum_{k=0}^{10} t^k \\ &= \frac{t^2}{11} \cdot \frac{t^{11}-1}{t-1}. \end{aligned}$$

4. On a $\Phi(t) = 1 + t + \cdots + t^{10} = \frac{t^{11}-1}{t-1}$ donc les racines de Φ sont les racines 11-ème de l'unité (sauf 1) qui sont $e^{i\frac{2k\pi}{11}}$, $1 \leq k \leq 10$. Or

$$e^{i\frac{2k\pi}{11}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{11} \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2k \in 11\mathbb{Z} \underset{\text{(Gauss)}}{\Leftrightarrow} k \in 11\mathbb{Z}.$$

Donc Φ n'a pas de racine réelle donc est de signe constant par la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires. Donc Φ du signe de $\Phi(0) = 1$.

5. Supposons par l'absurde qu'on puisse piper X et Y de telle sorte que la somme suive une loi uniforme. Puisque X et Y sont indépendantes et que la fonction génératrice détermine la loi on doit alors

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = t^2 P_X(t)P_Y(t) = G_U(t) = \frac{t^2}{11}\left(1 + t + \cdots + t^{10}\right)$$

ceci est équivalent à $P_X(t)P_Y(t) = \frac{1}{11}(1 + t + \cdots + t^{10})$ donc P_X et P_Y doivent être de degré exactement égal à 5 donc doivent admettre une racine réelle chacun. Il s'agirait donc de racines réelles de Φ ce qui est absurde car Φ n'admet aucune racine réelle. Donc on ne peut pas piper les dés de cette façon.

6. (a) On a alors $X + Y$ à valeurs dans $\{2, \dots, 13\}$. Une variable aléatoire uniforme U sur cet ensemble a pour fonction génératrice

$$G_U(t) = \frac{t^2}{12} \cdot \frac{t^{12}-1}{t-1} = \frac{t^2}{12} \cdot \frac{(t^6+1)(t^6-1)}{t-1}.$$

Par ailleurs, la fonction génératrice de Y (de loi uniforme sur $\{1, \dots, 6\}$ est $G_Y(t) = \frac{t}{6} \cdot \frac{t^6-1}{t-1}$. Donc

$$\begin{array}{rrl} & G_{X+Y}(t) & = G_U(t) \\ \Leftrightarrow & G_X(t)\frac{t}{6} \cdot \frac{t^6-1}{t-1} & = \frac{t^2}{12} \cdot \frac{(t^6+1)(t^6-1)}{t-1} \\ \Leftrightarrow & G_X(t) & = \frac{t}{2}\left(t^6+1\right) = \frac{1}{2} \cdot t + \frac{1}{2} \cdot t^7. \end{array}$$

(b) Donc cela revient à dire que X est un « dé »vérifiant

$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 7) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(X = 6) = 0.$$

On représenterait plus classiquement X par une pièce équilibrée avec un côté numéroté 1 et l'autre 7.

Exercice 14 (correction)

À venir.

Exercice 15 (correction)

1. Il s'agit d'une variable aléatoire ne prenant que les valeurs 0 et 1. Il s'agit donc, par définition, d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli. Son paramètre p est $\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$ (on a l'égalité des évènements $\{\mathbb{1}_A = 1\} = A$ par définition de $\mathbb{1}_A$).

2. Soit $\omega \in \Omega$. On note $n_0 = N(\omega)$. On a alors $t^{S_N}(\omega) = t^{S_{n_0}(\omega)}$. D'autre part, puisque $\mathbb{1}_{\{N=n\}}(\omega) = 0$ pour $n \neq n_0$ et 1 sinon, on a bien $\sum_{n\geq 0} t^{S_n}\mathbb{1}_{\{N=n\}} = t^{S_N}$.

3. On a

$$\begin{aligned}
G_{S_N}(t) &= \mathbb{E}[t^{S_n}] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} t^{S_n}\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] && \text{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[t^{S_n}\right]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N=n\}}] && \text{(linéarité de l'espérance et indépendance de } S_n \text{ et } N\text{)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} G_{S_n}(t)\mathbb{P}(N=n) && \text{(espérance d'une Bernoulli)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)(G_X(t))^n && \text{(indépendance des } X_i\text{)} \\
&= G_N(G_X(t)).
\end{aligned}$$

4. On note P_1 la première pièce et P_2 la seconde que l'on assimile à des Bernoulli avec 0 pour face et 1 pour pile. On suppose qu'on choisit la première pièce pour compter le nombre de piles jusqu'à tomber sur une face que l'on note N et la seconde pour compter le total de piles ensuite que l'on note S_N. Il suffira d'inverser p et q dans les résultats que l'on trouvera pour comparer avec l'autre cas. La variable N suit une loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}(P_1 = 0) = 1-q$. On a donc, d'après la première partie de l'exercice,

$$G_{S_N}(t) = G_N(G_{P_2}(t)) = G_N((1-p)+pt).$$

Ce qui nous intéresse c'est l'espérance de S_N, i.e. $G'_{S_N}(1)$. Or on a

$$G'_{S_N}(1) = pG'_N(1) = \frac{p}{1-q}.$$

Si on avait choisi l'autre pièce pour commencer l'espérance du nombre de piles final serait $\frac{q}{1-p}$. Il nous reste donc à résoudre

$$\begin{array}{rrl}
 & \frac{p}{1-q} & \leq \frac{q}{1-p} \\
\Leftrightarrow & p(1-p) & <\leq (1-q) \\
\Leftrightarrow & p-q & \leq p^2 - q^2 \\
\Leftrightarrow & 0 & \leq (p-q)(p+q-1) \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{r} p \geq q \\ p+q \geq 1 \end{array}\right. & \text{ou } \left\{\begin{array}{r} p \leq q \\ p+q \leq 1 \end{array}\right.
\end{array}$$

donc dans ces cas il vaut mieux choisir la seconde pièce pour commencer et dans les autres cas il vaut mieux choisir la première.

Exercice 16 (correction)

À venir.

Exercice 17 (correction)

On note B_n le nombre de boucles formées après k étapes.

À la n-ème étape on a noué $2(n-1)$ extrémités entre elles, il en reste alors $2(N-n+1)$ disponibles. On en choisit une au hasard. Cette extrémité appartient à une composante qui n'est pas une boucle car les boucles n'ont aucune extrémité disponible. Cette composante possède une unique autre extrémité et la seule façon de créer une nouvelle boucle est de choisir cette extrémité, ceci avec probabilité $\frac{1}{2N-2n+1}$. Formellement on peut poser les évènements

A_n : « On forme une boucle à l'étape n ».

On a alors le nombre de boucle formées à n étapes qui vaut $\sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{A_i}$. Donc l'espérance du nombre de boucle à la fin des N étapes est

$$\mathbb{E}[B_N] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{A_n}\right] = \sum_{n=1}^N \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_n}\right] = \sum_{n=1}^N \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2N-2n+1} = \sum_{n=1}^N \frac{1}{2n-1}.$$

Il s'agit d'une série divergente de terme général $\frac{1}{2n-1} \sim \frac{1}{2n}$ donc

$$\mathbb{E}[B_N] = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n).$$

Exercice 18 (correction)

1. On commence par remarquer que si $\operatorname{pgcd}(n,d) = 1$ alors, d'après l'identité de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $nu + dv = 1$ donc $\overline{dv} = 1 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et donc
$$D_{vd} = \left\{ \overline{vdk} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z} \right\} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subseteq D_d$$
donc $D_d = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On peut alors faire le cas général. On pose $\delta = \operatorname{pgcd}(n,d)$ et $d = \alpha\delta$ et $n = \beta\delta$. On a alors $\operatorname{pgcd}(\alpha, n) = 1$ donc
$$D_d = d\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \delta\alpha\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \delta\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = D_\delta.$$
Enfin, $D_\delta = \left\{ \overline{0}, \overline{\delta}, \overline{2\delta}, \dots, \overline{(\beta-1)\delta} \right\}$ car $\beta\delta = n = 0 \mod n$ et toutes les classes sont distinctes. Donc, par définition de la probabilité uniforme on a
$$P(D_d) = \frac{\beta}{n} = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\operatorname{pgcd}(n,d)}.$$
2. On note $\delta_i = \operatorname{pgcd}(n, d_i)$. On a $D_{d_1} \cap \dots \cap D_{d_r} = D_{\delta_1} \cap \dots \cap D_{\delta_r}$ et les δ_i sont aussi premiers entre eux deux à deux. Pour $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{m} \in D_{\delta_1} \cap \dots \cap D_{\delta_r}$ on a $\forall 1 \leq i \leq r, \delta_i \mid m$. Mais les δ_i étant premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss, $\delta_1 \cdots \delta_r \mid m$. D'où l'on déduit que $\overline{m} \in D_{\delta_1 \cdots \delta_r}$. On a alors $D_{\delta_1} \cap \dots \cap D_{\delta_r} = D_{\delta_1 \cdots \delta_r}$ (l'autre inclusion est immédiate). Finalement,
$$\mathbb{P}\left(D_{d_1} \cap \dots \cap D_{d_r}\right) = \mathbb{P}\left(D_{\delta_1} \cap \dots \cap D_{\delta_r}\right) = \mathbb{P}\left(D_{\delta_1 \cdots \delta_r}\right) = \frac{1}{\delta_1 \cdots \delta_r} = \frac{1}{\delta_1} \cdots \frac{1}{\delta_r} = \mathbb{P}\left(D_{d_1}\right) \cdots \mathbb{P}\left(D_{d_r}\right).$$
3. On considère l'évènement $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, l'ensemble des inversibles modulo n qui est de cardinal $\varphi(n)$. On a $\overline{m} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq r, \overline{m} \notin D_{p_i}$, i.e. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \bigcap_{i=1}^r D_{p_i}^c$. Or deux évènements sont indépendants si, et seulement si leurs complémentaires sont aussi indépendants. On en déduit que
$$\mathbb{P}\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right) = \frac{\varphi(n)}{n} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^r D_{p_i}^c\right) = \prod_{i=1}^r \mathbb{P}\left(D_{p_i}^c\right) = \prod_{i=1}^r \left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Exercice 19 (correction)

1. On a 1 valeur propre évidente car la matrice $M - I_n$ est de rang 1. Par le théorème du rang l'espace propre associé est de dimension $n-1$. Donc 1 est de multiplicité au moins $n-1$ dans le polynôme caractéristique. On note λ la valeur propre de M qui est encore inconnue. Elle doit vérifier
$$\operatorname{Tr}(M) = 0 = \lambda + 1 + \dots + 1 = \lambda + n - 1$$
donc $\lambda = -n + 1$. On en déduit que $\chi_M(X) = (X-1)^{n-1}(X+n-1)$.
2. D'après la question précédente le polynôme caractéristique de M vérifie $\chi_M(X) = \det(XI_n - M) = (X+n-1)(X-1)^n$. Par ailleurs, par définition du déterminant
$$\det(XI_n - M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{i,\sigma(i)}$$
avec $a_{i,\sigma(i)} = X$ si $\sigma(i) = i$ et 1 sinon. Donc on a bien
$$\det(XI_n - M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X^{\nu(\sigma)}.$$
3. Le coefficient constant de χ_M correspond aux permutations sans point fixe donc aux éléments de $\mathfrak{D}_n$. En identifiant les coefficients constants des deux polynômes à gauche et à droite de l'égalité obtenue en question 2 on obtient
$$\operatorname{Card}\left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\right\} - \operatorname{Card}\left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\right\} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

4. On a alors
$$\mathbb{P}(Y_n=1)=\frac{\#K_1}{\mathfrak{D}_n}=\frac{\#K_{-1}+(-1)^n(n-1)}{\mathfrak{D}_n}=\mathbb{P}(Y_n=-1)+\frac{(-1)^n(n-1)}{\mathfrak{D}_n}.$$
En ajoutant $\mathbb{P}(Y_n=1)$ de part et d'autre on obtient alors
$$2\mathbb{P}(Y_n=1)=1+\frac{(-1)^n(n-1)}{\mathfrak{D}_n}\text{ donc }\left|\mathbb{P}(Y_n=1)-\frac{1}{2}\right|=\frac{n-1}{2\cdot n!\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}}.$$
Or $\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k!}\longrightarrow e^{-1}$. D'où $\left|\mathbb{P}(Y_n=1)-\frac{1}{2}\right|\sim\frac{e}{2(n-1)!}$.

Exercice 20 (correction)

L'ensemble Ω est de cardinal $\binom{2n}{n}$. Soit $k\in\{0,\dots,m\}$. Pour que $X=k$ il faut et il suffit de choisir k éléments dans A et $n-k$ dans B ce qui correspond à $\binom{m}{k}\binom{2n-m}{n-k}$ choix parmi les $\binom{2n}{n}$ possibilités. Autrement dit,
$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\binom{2n-m}{n-k}=\binom{2n}{n}.$$
Le cas particulier $m=n$ donne
$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^2=\binom{2n}{n}.$$

Exercice 21 (correction)

On pose T la variable aléatoire $T=\#A\cap Z$ et Y la variable de Bernoulli $\mathbb{1}_{\#A\cap Z\geq\#B\cap Z}$ de paramètre $\mathbb{P}(\#A\cap Z\geq\#B\cap Z)=\frac{1}{2}$. La variable T est à valeurs dans $\{0,\dots,n\}$ et on a $\mathbb{P}(T=k)=\frac{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}}=\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$. Car Z est uniforme sur un ensemble à $\binom{2n}{n}$ éléments et pour que $\#A\cap Z=k$ il faut et il suffit de choisir k éléments dans A et $n-k$ dans B. Enfin, on remarque que $\#B\cap Z=n-T$ donc $X=YT+(1-Y)(n-T)$ qui est à valeurs dans $X(\Omega)=\left\{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor,n\right\}$ d'où l'on déduit grâce au système complet $\{Y=0\},\{Y=1\}$ que $\forall k\in X(\Omega)$,
$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X=k)&=\mathbb{P}((YT+(1-Y)(n-T)=k)\cap(Y=1))+\mathbb{P}((YT+(1-Y)(n-T)=k)\cap(Y=0))\\&=\mathbb{P}((T=k)\cap(Y=1))+\mathbb{P}((T=n-k)\cap(Y=0))\\&=\mathbb{P}(T=k)+\mathbb{P}(T=n-k)&&\text{car }\left\{\begin{array}{ll}\{Y=1\}&\subseteq\{T=k\}\\\{Y=0\}&\subseteq\{T=n-k\}\end{array}\right.\\&=2\mathbb{P}(T=k)=2\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}.\end{aligned}$$

Exercice 22 (correction)

À venir.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : `fabien.narbonne@posteo.net` **Site internet :** `https://fabiennarbonne.fr`