Intégrales impropres et intégrales à paramètre

Il s'agit d'une liste d'exercices corrigés que j'utilise pour les colles que je dispense au lycée Chateaubriand, destinée aux étudiant·e·s de deuxième année de classe préparatoire. Cette liste est mise à leur disposition dès que les chapitres correspondants ont été abordés.

Si vous travaillez sur cette liste au cours de l'année, il se peut que certains chapitres n'aient pas encore été étudiés. Lorsque la résolution d'un exercice fait appel à des notions qui ne sont abordées que plus tard dans l'année, je précise les outils utilisés sous forme de mots-clés. Si vous n'êtes pas encore familier·ère avec ces notions, n'hésitez pas à passer à l'exercice suivant.

De nombreux exercices et leurs corrigés proviennent de ma propre création. Il est donc possible qu'il subsiste des coquilles, des erreurs ou des pistes d'amélioration. Je procède d'ailleurs régulièrement à des corrections. Si vous avez des suggestions d'amélioration ou si certains arguments vous semblent peu clairs, n'hésitez pas à me contacter. Mes coordonnées figurent en bas de la dernière page du document.

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$.

Exercice 2 (★☆☆☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\cos(t^\alpha)-1} dt$ en fonction du paramètre $\alpha > 0$.

Exercice 3 (★☆☆☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+t)} dt$

Exercice 4 (★★☆☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ puis la calculer.

Exercice 5 (★★★☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) dt$.

Exercice 6 (★★★☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

Exercice 7 (★★★☆☆)

Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}$$

puis la calculer (on admettra que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Mots clés :*Inversion série intégrale*

Exercice 8 (★★★★☆)

Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1} dt$ puis la calculer.
Mots clés :*Inversion série intégrale*

Exercice 9 (★★★☆☆)

On considère E le sous espace vectoriel de $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ engendré par cos et sin . On pose

$$\Phi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & e^x \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t} dt \end{array}$$

1. Justifier que Φ est bien définie et qu'il s'agit d'un endomorphisme.
2. Donner la matrice de Φ dans la base $(\sin, \cos)$.
3. L'endomorphisme Φ est-il diagonalisable ?

Mots clés :*Réduction, intégrale impropre*

Exercice 10 (★★★☆☆)

On considère

$$f : \begin{array}{rcl} \left]0; \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(\sin t). \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie et qu'elle est intégrable.
2. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$.
   (a) Montrer que $I = J$.
   (b) Calculer I (on pourra considérer $I + J$).

Exercice 11 (★★★★☆)

On pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt.$$

1. Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a
$$I_n = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}.$$
3. On pose $J_n = nI_n$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1}.
4. Calculer J_1. En déduire la valeur de J_n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
6. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.

Exercice 12 (★★★★★)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, bornée telle que $f(0) = 0$. On pose

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{ntf\left(\frac{t}{n}\right)}{\left(1+t^2\right)^2} dt.$$

Montrer que u_n est bien définie pour tout n puis calculer $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

Exercice 13 (★★☆☆☆)

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ bornée. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx$.

Mots clés :*Intégrales à paramètres*

Exercice 14 (★★★★☆) Inspiré de CCINP 2023 (PSI)

On souhaite calculer $W_n = \int_0^\pi \sin^{2n}(t)\,\mathrm{dt}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^\pi \cos(x\sin(t))\,\mathrm{dt}\ . \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe C^2 et calculer f' et f''.
3. On pose $h(x,t) = \cos(t)\sin(x\sin(t))$. Justifier que pour tout x la fonction $h(x,\cdot)$ est dérivable et calculer $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$.
4. En déduire que f est solution de l'équation différentielle
$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{E}$$
5. On suppose qu'il existe une solution de E développable en série entière sur un voisinage de 0 qu'on écrit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrer qu'alors $a_1 = 0$ et que $\forall n \geq 2, a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2}$.
6. Montrer que f est développable en série entière sur un voisinage de 0 et exprimer ses coefficients en fonction de W_n.
7. En déduire que f est l'unique solution de E vérifiant $f(0) = \pi$.
8. En déduire l'expression de W_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Mots clés :*Intégrales à paramètres, équation différentielle, série entière*

Exercice 15 (★★★★☆)

On souhaite calculer la valeur de l'intégrale
$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t\left(1+t^2\right)} dt.$$

Pour cela on pose la fonction

$$g: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)} dt. \end{array}$$

1. Vérifier que g est bien définie et montrer qu'elle est de classe C^1.
2. Montrer que $g'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$.
3. En déduire la valeur de I.

Mots clés :*Intégrales à paramètres*

Exercice 16 (★★★★☆)

Soit
$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}\,\mathrm{dt}$$

1. Donner l'ensemble de définition de f et montrer qu'elle est paire.
2. Montrer que f est de classe C^2. Calculer f'' et en déduire l'expression de $f(x)$ pour tout x dans son ensemble de définition.

Mots clés :*Intégrales à paramètres*

Exercice 17 (★★★★☆)

On souhaite calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt.$$

On pose

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)} dt. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 et en déduire l'expression de l'intégrale cherchée. *(On admettra que $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$).*

Mots clés :*Intégrales à paramètres*

Exercice 18 (★★★★☆)

Étudier la fonction définie par

$$f: x \longmapsto \int_0^1 t^{tx} \,\mathrm{dt}$$

(domaine de définition, continuité, variations, allure du graphe).

Mots clés :*Intégrales à paramètres*

Exercice 19 (★★★★★)

On veut déterminer toutes les fonctions continues $f: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant l'équation

$$f(x) = 1 + \int_0^x (t+x) f(x-t) \,\mathrm{dt}\,.$$

Supposons qu'une telle solution f existe.

1. On pose $F(x) = \int_0^x f(u) \,\mathrm{du}$. Montrer que f est de classe C^1 et que F est solution du problème de Cauchy suivant

$$(S): \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y'' - xy' - 2y = 0. \end{cases}$$

2. Déterminer la solution de ce système (on pourra la chercher sous la forme d'une série entière).
3. Conclure.

Mots clés :*Intégrales à paramètres, équations différentielles, séries entières*

Exercice 20 (★★★★☆)

Justifier l'existence puis calculer

$$\int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{dx}\,.$$

(On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Mots clés : *Intégrales impropres*

Exercice 21 (★★★★★)

On veut calculer $I = \int_0^{+\infty} \ln(t) e^{-t} dt$.

1. Montrer que I est bien définie (que l'intégrale existe).
2. On pose $v_n = \int_0^n \ln(t) \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$. Montrer que $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$.
3. On pose $u_n = \int_0^1 \ln(x)\,(1-x)^n\,dx$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2} u_n - \frac{1}{(n+2)^2}$.
   (b) En déduire que $u_n = \frac{-1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)$.
4. Montrer que $I = -\gamma$ où γ désigne la constante d'Euler, i.e.

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

Mots clés : *Intégrales impropre, inversion limite intégrale*

Exercice 22 (★★★★☆)

On considère le sous-espace vectoriel [1] $E = \text{Vect}\,(\sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \ldots, \sin(nx), \cos(nx))$ de l'espace des fonctions continues 2π-périodiques.

1. Calculer la dimension de E.
   Indication : on pourra montrer que la famille est orthogonale pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.
2. On pose

$$\Phi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & E \\ f & \longmapsto & \left(x \mapsto e^x \int_x^{+\infty} f(t)e^{-t}dt\right). \end{array}$$

   (a) Montrer que Φ est bien définie et qu'il s'agit d'un endomorphisme.
   (b) Étudier la diagonalisabilité de Φ.

Mots clés : *Intégrales impropres, espaces préhilbertien, réduction*

Exercice 23 (★★★★☆)

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt,\ J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt,\ I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

1. Montrer que ces trois intégrales existent.
2. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} J_n - I_n = 0$.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} J_n = I$. En déduire la valeur de I.

Mots clés : *Intégrales à paramètres*

1. Pour ne pas alourdir les notations on s'est permis d'omettre les $x \mapsto$ dans la définition des fonctions.

Éléments de corrections - Intégrales impropres et intégrales à paramètre

Exercice 1 (correction)

En $+\infty$, $\frac{1}{t^2} \to 0$ donc on peut utiliser un équivalent. On a alors $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim \frac{1}{t^2}$ de signe constant localement. Donc $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable en $+\infty$. En 0, $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est bornée sur l'intervalle borné $]0;1]$ donc son intégrale converge.

Exercice 2 (correction)

On utilise le développement à l'ordre 2 du cos en 0. On a $\cos(x^\alpha) = 1 + x^{2\alpha} + o(x^{3\alpha})$ ce qui donne

$$\frac{1}{\cos(t^\alpha) - 1} = \frac{1}{x^{2\alpha}(1 + o(x^\alpha))} \sim \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

qui converge si et seulement si $2\alpha < 1$ donc $\alpha < \frac{1}{2}$.

Exercice 3 (correction)

On a $\frac{1}{\ln(1+t)} \sim \frac{1}{t}$ de signe constant et d'intégrale divergente en 0 donc notre intégrale diverge.

Exercice 4 (correction)

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est de signe constant localement aux bornes de l'intervalle d'étude donc on peut utiliser des o, O et équivalents pour déterminer son intégrabilité. On a $\sqrt{t}\frac{\ln t}{1+t^2} \sim \sqrt{t}\ln(t) \underset{0}{\to} 0$ donc $\frac{\ln t}{1+t^2} = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc f intégrable en 0. Par ailleurs, $t^{3/2}f(t) \sim \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\to} 0$ donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc est intégrable en l'infini. En faisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ donc l'intégrale est nulle.

Exercice 5 (correction)

On peut faire les développements limités suivants en $+\infty$

$$\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right)\right) \qquad = -\frac{1}{t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right)$$

dont l'intégrale converge car localement de signe constant.

Pour l'autre borne on peut faire le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{t}$ qui ramène au problème équivalent de l'étude de

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}_{=\sin u}\right) \frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - u\right)^2} du$$

en 0. On a $\ln(\sin u) = \ln(u + o(u)) = \ln(u) + o(1)$ qui converge (car $\sqrt{u}\ln u \to 0$ par exemple).

Exercice 6 (correction)

Aucun problème en 0. Pour l'étude en $+\infty$ on fait le changement de variable $u = t^2$ (bijectif et C^1 sur $\mathbb{R}^+$) qui ramène à l'étude de la convergence en $+\infty$ de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}} du.$$

On n'est toujours pas sorti d'affaire mais presque. Pour prouver que l'intégrale converge on peut soit utiliser la règle d'Abel (hors programme donc il faut savoir la redémontrer) soit on peut s'en sortir avec une intégration par partie en remarquant que l'intégrale de $\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)'$ sera convergente. On intègre donc par partie en posant $U = \frac{1}{\sqrt{u}}$ et $V' = \sin(u)$ (on enlève le 2 au dénominateur qui ne nous embête pas pour étudier la convergence). On a alors

$$\int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}} du = \left[\frac{1-\cos u}{\sqrt{u}}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos u}{2u^{3/2}} du = \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{1-\cos u}{2u^{3/2}} du.$$

Le premier terme tend vers 0 en l'infini et le second converge car l'intégrale est absolument convergente. Attention au fait qu'on doit choisir $V = 1 - \cos u$ comme primitive de $\sin u$ pour que $\lim\limits_{0} UV \neq \infty$.

Exercice 7 (correction)

On peut écrire

$$\frac{t}{e^t - 1} = \frac{te^{-t}}{1 - e^{-t}} = te^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} te^{-(n+1)t}.$$

Par ailleurs, pour tout n la fonction $te^{-(n+1)t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$ (car c'est un $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ par exemple). De plus, en intégrant par partie pour éliminer le t, on a

$$\int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t} dt = \left[\frac{-t}{n+1} e^{-(n+1)t}\right]_0^{+\infty} + \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Puisque $f_n(t) = te^{-(n+1)t}$ est positive et que son intégrale est le terme général d'une série convergente l'inversion série-intégrale est légale. On a donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} te^{-(n+1)t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 8 (correction)

Pas de problème de convergence en 0 et en $+\infty$ notre fonction est équivalence à e^{-t} positive et d'intégrale convergente donc tout converge bien. On a par ailleurs $\frac{1}{e^t+1} = e^{-t}\frac{1}{1+e^{-t}}$ et $e^{-t} < 1$ pour $t > 0$ donc on a le développement suivant $e^{-t}\frac{1}{1+e^{-t}} = e^{-t} \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-nt} = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} (-1)^n e^{-(n+1)t}$ dont le terme général est intégrable en valeur absolue donc on peut faire l'inversion série intégrale ce qui donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+e^t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2).$$

Exercice 9 (correction)

1. On a $\left|\sin(t)e^{-t}\right| \leq e^{-t}$ (de même pour cos à la place de sin) donc les intégrales généralisées sont absolument convergentes donc convergentes. Donc par linéarité de l'intégrale, Φ est linéaire.

On a en intégrant par partie avec $u' = \sin(t)$ et $v = e^{-t}$

$$\begin{aligned} f(\sin)(x) &= e^x \left(\left[-\cos(t)e^{-t} \right]_x^{+\infty} - \int_x^{+\infty} \cos(t)e^{-t}dt \right) \\ &= \cos(x) - f(\cos)(x). \end{aligned}$$

De même on trouve $f(\cos)(x) = -\sin(x) + f(\sin)(x)$ ce qui donne $f(\sin) = \frac{\sin+\cos}{2}$ et $f(\cos) = \frac{\cos-\sin}{2}$. Ceci prouve que Φ est bien à valeurs dans E c'est donc un endomorphisme.

2. D'après la question précédente la matrice de f dans la base $(\sin, \cos)$ est $M = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
3. La matrice M admet deux valeurs propres distinctes qui sont $\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc elle est diagonalisable.

Exercice 10 (correction)

1. Le seul problème qu'on peut rencontrer est en 0 car en $\pi/2$ la limite est finie. Si on se refuse de composer des équivalents (bien que ce soit légal pour le ln) on a

$$\ln(\sin t) = \ln(t + o(t)) = \ln(t(1 + o(1)) = \ln(t) + \ln(1 + o(1)) = \ln(t) + o(1)$$

qui est intégrable (car $\sqrt{t}\ln(t) \to 0$ par exemple).

2. (a) Changement de variables $u = \pi/2 - t$.
   (b) On a

$$2I = I + J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(t)\cos(t))dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))dt - \frac{\pi}{2}\ln(2).$$

Le changement de variable $u = 2t$ donne alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(2t))dt = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \ln(\sin(u))du = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin(u))du = I$$

la dernière égalité provenant du fait que $x = \pi/2$ est un axe de symétrie de $\sin t$ et donc de $\ln(\sin(t))$ sur $]0;\pi[$. Au final $I = -\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

Exercice 11 (correction)

1. Fixons n. On a $\frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} \sim e^{-t}$ qui est intégrable **et positive**. Donc I_n converge bien.
2. On fait une intégration par parties avec $u' = e^{nt}$ ("donc" $u = \frac{1}{n}e^{nt}$) et $v = \frac{1}{(1+e^t)^{n+1}}$ (donc $v' = \frac{-(n+1)e^t}{(1+e^t)^{n+2}}$). On a alors

$$I_n = \left[\frac{1}{n}e^{nt}\frac{1}{(1+e^t)^{n+1}}\right]_0^{+\infty} + \frac{n+1}{n}\int_0^{\infty} \frac{e^{(n+1)t}}{(1+e^t)^{n+2}}dt.$$

Ce qui donne $I_n = -\frac{1}{n2^{n+1}} + \frac{n+1}{n}I_{n+1}$. Il suffit alors de considérer cette relation au rang $n - 1$.

3. On a $J_n = \frac{1}{2^n} + J_{n-1}$.
4. Soit on remarque que $J_0 = 0 \cdot I_0 = 0$ donc $J_1 = 1/2$. Sinon par le calcul direct on a $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt = \int_0^{+\infty} \frac{u'}{u^2}dt$ avec $u = 1 + e^t$ donc une primitive est $\frac{-1}{u}$ donc

$$J_1 = \left[\frac{-1}{1+e^t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$

Par téléscopage on a $J_n - J_1 = \sum_{k=2}^n \frac{1}{2^k}$ donc $J_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$.

5. Immédiat.
6. **Méthode 1 :** En faisant le changement de variables $u = e^t$ on a $I_0 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{u(u+1)}du = \left[\ln\left(\frac{u}{u+1}\right)\right]_1^{\infty} = \ln(2)$.

   Méthode 2 : En écrivant $\frac{1}{1+e^t} = e^{-t}\frac{1}{1+e^{-t}} = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-nt}$ et en faisant soigneusement une inversion série intégrale on obtient $I_0 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Exercice 12 (correction)

On pose $g_n(t) = \frac{ntf\left(\frac{t}{n}\right)}{(1+t^2)^2}$. La fonction f est continue en 0 donc pas de problème d'intégrabilité en cette borne. Puisque f est bornée c'est un $O(1)$. Donc on a $\frac{ntf\left(\frac{t}{n}\right)}{(1+t^2)^2} = O\left(\frac{t}{(1+t^2)^2}\right)$ lorsque $t \to +\infty$ qui est intégrable car $\sim \frac{1}{t^2}$.

Puisque f est C^1 en 0 on a $f(u) = f'(0)u + o(u) = f'(0)u + u\varepsilon(u)$ avec $\varepsilon(u) \underset{u\to 0}{=} 0$. En appliquant cela à t **fixé** pour n grand on a $\lim g_n(t) = g(t) = \frac{f'(0)t^2}{(1+t^2)^2}$. On a donc la convergence simple de la suite (g_n) mais ça ne suffit pas.

On veut réussir à dominer g_n indépendamment de n. Pour cela on aimerait montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $f(x) \le Mx$. Puisque f est supposée bornée $\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = 0$, i.e. il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \ge x_0, |f(x)| \le x$ (définition de la limite avec $\varepsilon = 1$). Par ailleurs, la fonction f est C^1 sur le segment $[0, x_0]$ donc, avec M' un majorant de $f'_{|[0,x_0]}$ par le théorème des accroissements finis appliqué à l'intervalle $[0, x]$ on a $|f(x) - f(0)| \le M'(x - 0)$, i.e. $|f(x)| \le M'x$. Avec $M = \max M', 1$ on a bien $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \le Mx$. On en déduit que

$$g_n(t) \le \frac{Mt^2}{(1+t^2)^2}$$

et cette dernière fonction est indépendante de n et intégrable on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Il ne reste plus qu'à calculer la limite. On fait une intégration par partie de $\int_0^\infty \frac{2t^2}{(1+t^2)^2}dt$ avec $u = t$ et $v' = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ qui se primitive en $\frac{-1}{1+t^2}$ (en effet, v' de la forme $\frac{U'}{U^2}$). Cela donne

$$\int_0^\infty \frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2}dt = \underbrace{\left[\frac{-t}{1+t^2}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2}dt}_{=\frac{\pi}{2}\text{ (car primitive Arctan)}} .$$

On peut enfin conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{ntf\left(\frac{t}{n}\right)}{\left(1+t^2\right)^2}dt = \frac{\pi}{4}f'(0).$$

Exercice 13 (correction)

En appliquant le changement de variable $y = xn$ on a $\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{y}{n}\right)}{1+y^2}dy$. Il s'agit donc simplement de justifier l'inversion limite intégrale. Par hypothèse $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \le M$ donc l'intérieur de l'intégrale est dominé par $\frac{M}{1+y^2}$ qui est intégrable et ne dépend pas de M donc $\lim_{n\to\infty} \int \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+y^2}dy = f(0)\frac{\pi}{2}$.

Exercice 14 (correction)

On pose $g(x,t) = \cos(x\sin(t))$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur le segment $[0;\pi]$ donc intégrable.
2. On a bien à t fixé $x \mapsto g(x,t)$ de classe C^∞ et toutes les conditions de continuité par morceaux des dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ en t. On a en plus la domination $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \le 1$ donc on peut dériver sous le signe intégral, i.e.

$$f'(x) = -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{dt}$$
$$f''(x) = -\int_0^\pi \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{dt}\ .$$

3. On a $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x\cos^2(t)\cos(x\sin(t))$.

4. En remplaçant $\sin^2(t)$ par $1-\cos^2(t)$ dans l'expression de $xf''(x)$ on a

$$xf''(x)+f'(x)+xf(x)=\int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{dt}=[h(x,t)]_0^\pi=0.$$

5. Avec $g(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ solution de E, puisqu'une série entière converge normalement sur son disque ouvert de convergence on peut dériver terme à terme et on a

$$xg''(x)+g'(x)+xg(x)=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1}+(n+1)^2a_{n+1})x^n=0.$$

Par unicité du développement en série entière sur le disque de convergence on a bien $a_1=0$ et $\forall n\geq 2, a_n=\frac{-a_{n-2}}{n^2}$.

6. On a $\forall u\in\mathbb{R}, \cos(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ donc, sous réserve de pouvoir intervertir série et intégrale on a

$$f(x)=\int_0^\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\sin(t)^{2n}\,\mathrm{dt}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}W_n x^{2n}$$

Puisqu'on a $\int_0^\pi\left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sin^{2n}(t)\right|\mathrm{dt}\leq\frac{\pi}{(2n)!}$ par la majoration $\sin^{2n}(t)\leq 1$ sur $[0;\pi]$ et que $\frac{\pi}{(2n)!}$ est le terme général d'une série entière de rayon de convergence infinie alors l'interversion est bien légale et le rayon de convergence du développement de f au voisinage de 0 est infini.

7. On remarque qu'une solution g développable en série entière au voisinage de 0 a ses coefficients totalement déterminés par $g(0)=a_0$. En effet, la relation de récurrence donne $a_{2n+1}=0$ pour tout n inconditionnellement à cause de la condition $a_1=0$ et de même les termes d'indice pair son fixés par le choix de a_0. Donc f est bien l'unique solution satisfaisant $f(0)=\pi$ sur son disque de convergence qui est $\mathbb{R}$.

8. En considérant les premiers termes de a_{2n} vérifiant la relation de récurrence

$$\begin{cases} a_0 &= \pi \\ a_1 &= 0 \\ a_n &= \frac{-a_{n-2}}{n^2}, \forall n\geq 2 \end{cases}$$

on prouve facilement par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}, a_{2n+1}=0$ et $a_{2n}=(-1)^n\frac{\pi}{2^{2n}(n!)^2}$. En identifiant a_{2n} à $(-1)^n\frac{W_n}{(2n)!}$ grâce à la question 6) on a

$$\forall n\in\mathbb{N}, W_n=\pi\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Exercice 15 (correction)

1. À x fixé la fonction $t\mapsto\frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est un $O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ en $+\infty$ et $\sim x$ en 0 donc elle est bien intégrable aux bornes.

Ensuite, on a $f(x,t)=\frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est bien C^1 par rapport à x et sa dérivée est

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)=\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$$

qui est bien continue par morceaux. Enfin, l'inégalité $\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}\leq\frac{1}{1+t^2}$ fournit une domination qui permet d'intervertir dérivée et intégrale. On en déduit que

$$g'(x)=\int_0^{+\infty}\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}dt.$$

En faisant un développement en éléments simples (remarquez que par parité il n'y a pas de termes en x et on obtient les termes constants par un système en remplaçant x par 0 pour obtenir une équations puis en multipliant par t^2 puis la limite en $+\infty$ pour la seconde) on trouve la relation pour tout $x\neq 1$

$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}=\frac{x^2}{x^2-1}\cdot\frac{1}{1+x^2t^2}-\frac{1}{x^2-1}\cdot\frac{1}{1+t^2}.$$

On a alors

$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1} \cdot \frac{1}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{1+t^2} \right) dt$$
$$= \frac{x^2}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} dt - \frac{1}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{x^2}{x^2-1} \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x^2-1} \frac{\pi}{2}$$
$$= \frac{\pi}{2(x+1)}.$$

L'expression de g' est aussi valable en $x = 1$ par continuité de g'.

2. On en déduit que g est **une** primitive de g' donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x+1) + \alpha$. On a $g(0) = \alpha = 0$ donc $g(x) = \frac{\pi}{2} \ln(x+1)$ pour tout x dans l'ensemble de définition. Par parité de la fonction sous l'intégrale on a $I = 2g(1) = \pi \ln(2)$.

Exercice 16 (correction)

1. Le fait que f est paire est immédiat. On pose $f(x,t) = \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}$. On a $|f(x,t)| \leq 2t^{-2}e^{-t}$ intégrable en $+\infty$. Par ailleurs $\frac{1-\cos(xt)}{t^2} = \frac{x}{2} + o(t)$ pour $t \to 0$ en faisant un DL_3 de $t \mapsto \cos(xt)$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t} e^{-t}$ qui est continue par morceaux et intégrable (faire un DL_1 en 0) et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$ dominée par $\varphi(t) = e^{-t}$. Donc
$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt) e^{-t}\,\mathrm{d}t\,.$$
Pour le calcul on passe par les complexes en écrivant que $\cos(xt) = \mathfrak{R}(e^{ixt})$. On a $\int_0^\infty e^{(ix-1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{-1+ix}\left[e^{(ix-1)t}\right]_0^\infty = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}$ donc $f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$ donc $f'(x) = \arctan(x) + c$ mais $f'(0) = 0$ donc $c = 0$ et enfin, par intégration par partie $f(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + d$. Mais $f(0) = 0$ donc $d = 0$ donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Exercice 17 (correction)

À venir

Exercice 18 (correction)

On a $f(x,t)\colon t \mapsto t^{tx} = e^{tx\ln(t)}$ définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prolongeable par continuité en $t = 0$. Donc son intégrale existe toujours sur le segment $[0,1]$ donc f définie sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $0 < t < 1$

$$x < y$$
$$\Leftrightarrow\ t^{tx} > t^{ty}$$

car $\ln(t) < 0$. Donc f est strictement décroissante. Par ailleurs, $\forall t \in]0,1[, t^{tx} = (t^t)^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(x,t)$ dominée par 1 lorsque $x > 0$ donc, par le théorème de convergence dominée on peut intervertir limite et intégrale et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Soient $0 < a < b < 1$. L'encadrement

$$a^{-xa} \leq t^{-tx} \leq b^{-xb}$$

pour $x < 0, a \leq t \leq b$ montre la convergence uniforme de $1/f(x,t)$ vers 0 sur le segment $[a,b]$ lorsque $x \to -\infty$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M_n, \forall x < M_n, \forall t \in [a,b], t^{-tx} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow n < t^{tx}.$$

Donc $\int_0^1 t^{tx}\,\mathrm{d}t \geq \int_a^b t^{tx}\,\mathrm{d}t \geq (b-a)n$ pour $x \leq M_n$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 19 (correction)

1. En faisant le changement de variable $u = x - t$ on a
$$f(x) = 1 + 2x \int_0^x f(u)\,\mathrm{du} - \int_0^x u f(u)\,\mathrm{du}\,.$$
Puisque f est continue alors la partie droite de l'équation est de classe $\mathcal{C}^1$ comme somme de primitives de fonctions continues. Donc f est elle-même de classe $\mathcal{C}^1$.
En faisant une intégration par partie de $\int_0^x u f(u)\,\mathrm{du}$ en dérivant u et en primitivant $f(u)$ en $F(u)$ on obtient $F'(x) = f(x) = 1 + 2xF(x) - (xF(x) - \int_0^x F(u)\,\mathrm{du})$ et en dérivant (légal car f est $\mathcal{C}^1$) on a
$$F''(x) = 2F(x) + xF'(x).$$
Enfin, on a $F(0) = 0$ et $F'(0) = f(0) = 1$.
2. On suppose qu'on peut écrire $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ sur un petit voisinage de 0. Le fait de satisfaire l'équation différentielle donne
$$2a_2 - 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2} - (n+2)a_n)x^n = 0$$
qui donne, par unicité du développement en série entière, $a_2 = a_0$ et $\forall n \geq 1, a_{n+2} = \frac{1}{n+1}a_n$. Par hypothèse, $a_0 = F(0) = 0$ et $a_1 = F'(1) = 1$. On en déduit par une récurrence immédiate que $a_{2n} = 0$ pour tout n et que $a_{2n+1} = \frac{1}{2^n n!}$. Donc $F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n n!} x^{2n+1} = x \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n = xe^{x^2/2}$. Réciproquement $x \mapsto xe^{x^2/2}$ est bien solution du système de Cauchy et cette solution est unique donc on a bien $F(x) = xe^{x^2/2}$ sur le disque de convergence de la série qui est $\mathbb{R}$.
3. On en déduit que si f est solution de l'équation de départ alors $f(x) = F'(x) = (1+x^2)e^{x^2/2}$. Vérifions qu'il s'agit bien d'une solution. On pose $g(x) = (1+x^2)e^{x^2/2}$ et
$$h(x) = 1 + \int_0^x (t+x)(1+(x-t)^2)e^{(x-t)^2/2}\,\mathrm{dt} = 1 + 2x\int_0^x (1+u^2)e^{u^2/2}\,\mathrm{du} - \int_0^x u(1+u^2)e^{u^2/2}\,\mathrm{du}\,.$$
Puisque $h(0) = g(0) = 1$ elles sont égale si et seulement si leur dérivées sont égales. On a $g'(x) = (3+x^2)xe^{x^2/2}$ et $h'(x) = 2\int_0^x (1+u^2)e^{u^2/2}\,\mathrm{du} + (x+x^3)e^{x^2/2}$. Puisque $g'(0) = h'(0) = 0$ ces dernières sont égales si et seulement si leur dérivées sont égales. On a $g''(x) = (3+6x^2+x^4)e^{x^2/2} = h''(x)$. Donc c'est bon ; $f(x) = (1+x^2)e^{x^2/2}$ est l'unique solution à notre équation de départ.

Exercice 20 (correction)

On a l'encadrement $0 \leq x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \leq 1$ donc l'intégrande est bien intégrable en 0 et elle est continue par morceaux.
Grâce à la relation de Chasles on écrit
$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{dx} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{dx}\,.$$
Pour $\frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}$ on a $k \leq \frac{1}{x} < k+1$ donc $\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor = k$. On a alors
$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{dx} = \sum_{k=1}^{n} k \int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} x\,\mathrm{dx} = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{2k+1}{k(k+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k(k+1)}$$
la dernière ligne étant obtenue en séparant écrivant le numérateur $2k+1 = k + (k+1)$. Par ailleurs $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ce qui donne, par un télescopage puis un changement de variable,
$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(k+1)^2}\right) + 1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=2}^{n+1} \frac{1}{k^2}\right) + 1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{n+1}\right).$$
En prenant la limite on a alors
$$\int_0^1 x\left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{dx} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 21 (correction)

1. Par croissance comparée $\ln(t)e^{-t} = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ en 0 et $\ln(t)e^{-t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ donc intégrable aux deux bornes (et continue entre les deux).
2. La suite de fonction $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0;n]}(t)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ est continue par morceaux et, par l'inégalité $\ln(1-u) \leq -u$ on a $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leq e^{-t}$ ce qui permet de dominer f_n par $\varphi(t) = e^{-t}$ qui est intégrable et donc d'intervertir limite et intégrale.
3. (a) On fait une intégration par partie dans u_{n+1} en primitivant 1 en x et en dérivant $\ln(x)(1-x)^{n+1}$.

$$\begin{aligned} u_{n+1} = \int_0^1 1 \times \ln(x)(1-x)^{n+1}\,\mathrm{dx} &= \left[x\ln(x)(1-x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 x\left(\frac{1}{x}(1-x)^{n+1} - (n+1)\ln(x)(1-x)^n\right)\mathrm{dx} \\ &= -\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,\mathrm{dx} + (n+1)\int_0^1 x\ln(x)(1-x)^n\,\mathrm{dx} \\ &= -\frac{1}{n+2} + (n+1)\int_0^1 (x-1+1)\ln(x)(1-x)^n\,\mathrm{dx} \\ &= -\frac{1}{n+2} - (n+1)\underbrace{\int_0^1 \ln(x)(1-x)^{n+1}\,\mathrm{dx}}_{u_{n+1}} + (n+1)\underbrace{\int_0^1 \ln(x)(1-x)^n\,\mathrm{dx}}_{u_n}. \end{aligned}$$

Ce qui donne bien $(n+2)u_{n+1} = -\frac{1}{n+2} + (n+1)u_n$.

(b) En posant $w_n = (n+1)u_n$ on a $w_{n+1} = w_n - \frac{1}{n+2}$. Donc, par télescopage, $w_n - w_0 = \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{k+2}$ mais $w_0 = u_0 = -1$ donc $w_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$, d'où le résultat.

4. On a par changement de variable $x = \frac{t}{n}$, $v_n = \int_0^1 n\ln(nx)(1-x)^n\,\mathrm{dx} = n\left(u_n + \frac{\ln(n)}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right) \sim -\gamma$.

Exercice 22 (correction)

1. On considère $k \geq 1$ un entier. On a pour tout $\ell \in \mathbb{N}$, $\langle\cos(\ell x), \sin(kx)\rangle = 0$ car il s'agit de l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique. Par ailleurs,

$$\langle\sin(\ell x), \sin(kx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\ell x)\sin(kx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos((\ell - k)x) - \cos((k+\ell)x))\,dx = 0$$

car il s'agit de fonctions 2π-périodiques de moyenne nulle. La famille étant libre car orthogonale $\dim(E) = 2n$.

2. (a) Les éléments de E étant tous bornés il est clair que $f(t)e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$. Donc Φ est au moins à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. La linéarité est claire par linéarité de l'intégrable. Il reste à montrer que Φ est bien à valeurs dans E. On pose $k \in \{1, \dots, n\}$. Par une intégration par partie on a

$$\Phi(\sin(kx)) = \sin(kx) + k\Phi(\cos(kx)) \text{ et } \Phi(\cos(kx)) = \cos(kx) - k\Phi(\sin(kx)).$$

En d'autres termes, $\begin{pmatrix}\Phi(\sin(kx)) \\ \Phi(\cos(kx))\end{pmatrix}$ est solution du système

$$\begin{pmatrix}1 & -k \\ k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X \\ Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(kx) \\ \cos(kx)\end{pmatrix}.$$

On peut alors inverser le système ce qui donne $\begin{cases}\Phi(\sin(kx)) &= \dfrac{1}{1+k^2}(\sin(kx) + k\cos(kx)) \\ \Phi(\cos(kx)) &= \dfrac{1}{1+k^2}(-k\sin(kx) + \cos(kx))\end{cases}$. Ceci donne aussi la matrice de Φ dans la base donnée de E qui est une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont de la forme $A_k = \dfrac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix}1 & k \\ -k & 1\end{pmatrix}$.

(b) On remarque que pour tout $k \geq 1$, $\sqrt{1+k^2}A_k$ est la matrice d'une isométrie. Il s'agit donc soit d'une symétrie orthogonale soit d'une rotation. Puisque son déterminant est $1 > 0$ il s'agit d'une rotation. Puisque $k \neq 0$ l'angle de la rotation n'est ni 0 ni π donc aucun des blocs n'est diagonalisable. Donc Φ n'est pas diagonalisable.

Exercice 23 (correction)

1. On a $\sin((2n+1)t) \sim_0 t$ ce qui prouve que $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \sim_0 \dfrac{t}{t} \sim_0 1$ donc la fonction est intégrable en 0, elle est bien définie en $\pi/2$ donc pas de soucis. De même pour $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{t}$. Pour I on fait une intégration par partie avec $u = \dfrac{1}{u}$ et $v' = \sin(u)$ (on choisit pour primitive $v = -\cos(u) + 1$) ce qui donne
$$\int_0^x \frac{\sin(u)}{u} du = \frac{-\cos(x)+1}{x} - \int_0^x \frac{-\cos(u)+1}{u^2} du.$$
On a bien convergence lorsque $x \to +\infty$ car $\dfrac{-\cos(u)+1}{u^2} = O\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ et tout est bien défini en 0 en prenant un DL_2 du $\cos(u)$.

2. Grâce à la formule $\sin(p) - \sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$ on a pour tout $n \geq 1$
$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\cos(2nt)dt = 2\int_0^{\pi/2}\cos(2nt)dt = 0.$$
On en déduit que $I_n = I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.

   On peut aussi utiliser la formule $\sin(x) = \dfrac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$ et factoriser le numérateur dans l'intégrale pour simplifier le dénominateur mais c'est plus fastidieux.

3. On a $I_n - J_n = \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t)\left(\dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t}\right)dt$. On pose $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t - \sin(t)}{t\sin(t)}$ qui est prolongeable par continuité en 0 et dérivable en 0 car $\varphi(t) = \dfrac{t}{6} + o(t)$ (en faisant un DL_3 de sin au numérateur et un DL_1 de sin au dénominateur dans $\dfrac{t-\sin(t)}{t\sin(t)}$). D'autre part, on a la limite en 0 suivante $\varphi'(t) \to \dfrac{1}{6}$ qui prouve que φ est de classe C^1. On peut alors faire une intégration par partie
$$\begin{aligned} I_n - J_n &= \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t)\,\varphi(t)dt \\ &= \left[\frac{-1}{2n+1}\cos((2n+1)t)\varphi(t)\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\cos((2n+1)t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt} \\ &= \int_0^{\pi/2}\cos((2n+1)t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt} \\ |I_n - J_n| &\leq \frac{1}{2n+1}||\varphi'||_{\infty,[0,\pi/2]} \to 0. \end{aligned}$$
Ceci prouve que $\lim J_n = \dfrac{\pi}{2}$

4. Par un changement de variable $u = (2n+1)t$ on
$$J_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u} du \to I.$$
Donc $I = \lim J_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : `fabien.narbonne@posteo.net` **Site internet :** `https://fabiennarbonne.fr`