Dénombrement et familles sommables

Il s'agit d'une liste d'exercices corrigés que j'utilise pour les colles que je dispense au lycée Chateaubriand, destinée aux étudiant·e·s de deuxième année de classe préparatoire. Cette liste est mise à leur disposition dès que les chapitres correspondants ont été abordés.

Si vous travaillez sur cette liste au cours de l'année, il se peut que certains chapitres n'aient pas encore été étudiés. Lorsque la résolution d'un exercice fait appel à des notions qui ne sont abordées que plus tard dans l'année, je précise les outils utilisés sous forme de mots-clés. Si vous n'êtes pas encore familier·ère avec ces notions, n'hésitez pas à passer à l'exercice suivant.

De nombreux exercices et leurs corrigés proviennent de ma propre création. Il est donc possible qu'il subsiste des coquilles, des erreurs ou des pistes d'amélioration. Je procède d'ailleurs régulièrement à des corrections. Si vous avez des suggestions d'amélioration ou si certains arguments vous semblent peu clairs, n'hésitez pas à me contacter. Mes coordonnées figurent en bas de la dernière page du document.

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux sous-ensembles dénombrables. On pose

$$C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que C est dénombrable.

Exercice 2 (★★☆☆☆)

On dit qu'un complexe z est un entier algébrique s'il est racine d'un polynôme unitaire $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que l'ensemble des entiers algébriques est dénombrable.

Exercice 3 (★★☆☆☆)

Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$ en fonction du paramètre α.

Exercice 4 (★★☆☆☆)

Les espaces vectoriels suivants admettent-ils une base dénombrable ?

- $\mathbb{R}[X]$
- $\mathbb{R}(X)$

Exercice 5 (★★☆☆☆)

Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux sous-ensembles dénombrables. On pose

$$C = \{P(a, b) \mid a \in A, b \in B, P \in \mathbb{Q}[X, Y]\}.$$

Montrer que C est dénombrable.

Exercice 6 (★★★★☆)

Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, n'est pas dénombrable.

Exercice 7 (★★★★☆)

Soit G un groupe commutatif ayant un nombre au plus dénombrable de générateurs.

1. Montrer que G est dénombrable.
2. Est-ce toujours vrai si on enlève l'hypothèse de commutativité ?

Mots clés : *Groupes*

Exercice 8 (★★★★★)

On considère $M_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme $||\cdot||$. On considère une famille $\left(B(M_j, r_j)\right)_{j\in J}$ de boules ouvertes de rayon strictement positif et toutes disjointes deux à deux.
Montrer que J est dénombrable.

Mots clés : *Densité*

Exercice 9 (★★★★★)

Soit F un ensemble, $E \subseteq F$ un sous-ensemble infini et $D \subseteq F$ un sous-ensemble dénombrable. Montrer qu'il existe une bijection

$$E \cup D \simeq E.$$

Éléments de corrections - Dénombrement et familles sommables

Exercice 1 (correction)

On a une application surjective

$$\begin{array}{rcl} A \times B & \longrightarrow & A + B \\ (a, b) & \longmapsto & a + b. \end{array}$$

Or l'ensemble $A \times B$ est dénombrable comme produit cartésien fini d'ensembles dénombrables. Donc $A + B$ est dénombrable comme image par une application surjective d'un ensemble dénombrable.

Exercice 2 (correction)

On note A l'ensemble des entiers algébriques. On a

$$A = \bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d} (X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_d)^{-1}(\{0\})$$

Puisqu'un polynôme de degré d a au plus d racines l'ensemble $\bigcup_{(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d} (X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_d)^{-1}(\{0\})$ est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis.

Enfin, puisque l'union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable on a le résultat attendu.

Exercice 3 (correction)

Méthode 1 : changement de variables. On décompose $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en tranches obliques ;

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{p+q=N} (p, q).$$

On a donc

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{q \in \mathbb{N}} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{N \in \mathbb{N}} \sum_{p+q=N} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{N \in \mathbb{N}} \sum_{p+q=N} \frac{1}{(N+1)^\alpha} = \sum_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}$$

qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ donc si et seulement si $\alpha > 2$.

Méthode 2 : force brute. La série $\sum_{q \in \mathbb{N}} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{n \geq p+1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ (il s'agit de la série des restes d'une série de Riemann). Une comparaison série-intégrale donne l'équivalent

$$\sum_{n \geq p+1} \frac{1}{n^\alpha} \underset{p \to \infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Il suffit alors de réappliquer le critère de Riemann à la série $\sum_{p \in \mathbb{N}} u_p$ où $u_p = \sum_{q \in \mathbb{N}} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} \sim \frac{1}{p^{\alpha-1}}$. La conclusion est (heureusement) la même que pour la première méthode.

Exercice 4 (correction)

— La famille $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. Donc oui.

— On montre que la famille $\left(\frac{1}{X-a}\right)_{a \in \mathbb{R}}$ est libre. Ceci prouvera que, si $\mathbb{R}(X)$ admet une base, cette dernière est de cardinal non dénombrable.

Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ des réels distincts et $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{\lambda_1}{X - a_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X - a_n} = 0.$$

On peut multiplier par $X - a_1$ puis évaluer en a_1 ce qui donne $\lambda_1 = 1$. On prouve de la même façon que $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc la famille est bien libre.

Exercice 5 (correction)

On remarque déjà que

$$\mathbb{Q}[X,Y] = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \left\{ \sum_{i\leq n, j\leq m} a_{ij} X^i Y^j \right\}$$

qui est dénombrable car $\left\{ \sum_{i\leq n, j\leq m} a_{ij} X^i Y^j \right\}$ est dénombrable, par exemple car l'application

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Q}^{nm} & \longrightarrow \left\{ \sum_{i\leq n, j\leq m} a_{ij} X^i Y^j \right\} \\ a_{ij} & \longmapsto \sum_{i\leq n, j\leq m} a_{ij} X^i Y^j \end{array}$$

est surjective.

On a alors

$$C = \bigcup_{a\in A} \bigcup_{b\in B} \bigcup_{P\in\mathbb{Q}[X,Y]} \{P(a,b)\}$$

dénombrable comme union de dénombrables.

Exercice 6 (correction)

Supposons par l'absurde qu'il existe une surjection $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et considérons l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$. Il s'agit d'une partie de $\mathbb{N}$ donc, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(m) = A$. On a alors $m \in A \Leftrightarrow m \notin A$ ce qui est absurde.
Cette preuve se généralise plus généralement à n'importe quel ensemble E pour prouver que E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas équipotent, i.e qu'il n'existe pas de bijection entre les deux. L'argument utilisé est souvent appelé paradoxe du barbier ou paradoxe de Russel

Exercice 7 (correction)

1. On note $(g_i)_{i\in I}$ des générateurs de G. Par hypothèse, I est au plus dénombrable. On a alors une application surjective

$$\begin{array}{ll} \mathbb{Z}^{(I)} & \longrightarrow G \\ (k_i)_{i\in I} & \longmapsto \prod_{i\in I} g_i^{k_i}. \end{array}$$

La question est donc de savoir si $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ est dénombrable. Pour cela on montre que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ l'est. En effet, si on note $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ l'ensemble des nombres premiers on a une application

$$\begin{array}{ll} \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} & \longrightarrow \mathbb{N}^* \\ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto \prod_{n\in\mathbb{N}} p_n^{\alpha_n} \end{array}$$

L'application est bien définie car les familles (α_n) ont un nombre fini de valeur non-nulles et elle est injective par unicité de la décomposition en facteur premier des entiers (en fait il s'agit même d'une bijection mais ça ne nous intéresse pas trop). On en déduit que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ est dénombrable et donc $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ l'est aussi puisque $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont en bijection.

2. Si G n'est plus supposé commutatif on a toujours un morphisme surjectif

$$\begin{array}{ll} \left(\mathbb{Z}^{(I)}\right)^{(\mathbb{N})} & \longrightarrow G \\ ((k_{ij})_{i\in I})_{j\in\mathbb{N}} & \longmapsto \prod_{j\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i\in I} g_i^{k_i j} \right). \end{array}$$

mais puisque $\mathbb{Z}^{(I)}$ est dénombrable alors $\left(\mathbb{Z}^{(I)}\right)^{(\mathbb{N})}$ l'est aussi donc G est toujours dénombrable.

Exercice 8 (correction)

On remarque que $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{C}$. On en déduit immédiatement que $M_n(\mathbb{Q}(i))$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$ pour la norme $||\cdot||_\infty$ donc pour la norme $||\cdot||$ car $M_n(\mathbb{C})$ étant de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ceci nous permet de sélectionner une matrice $T_j \in B(x_j, r_j)$ dans chaque boule.

On pose alors l'application

$$\begin{array}{lll} \varphi : & J & \longrightarrow M_n(\mathbb{Q}(i)) \\ & j & \longmapsto T_j. \end{array}$$

Cette application est injective car les boules sont supposées deux à deux disjointes. On a donc une injection de J dans $M_n(\mathbb{Q}(i))$. Maintenant, $\mathbb{Q}(i) \simeq \mathbb{Q}^2$ donc $M_n(\mathbb{Q}(i)) \simeq (\mathbb{Q}^2)^{n^2}$ qui est un produit cartésien fini d'ensemble dénombrable donc est dénombrable. En conclusion, J s'injecte dans un ensemble dénombrable donc est lui même dénombrable.

Exercice 9 (correction)

Puisque E est infini il possède un sous-ensemble infini dénombrable D'. On pose alors $\widetilde{D} = D' \cup (D \setminus E)$. L'union de deux ensembles dénombrables étant dénombrable on a une bijection $\psi : \widetilde{D} \longrightarrow D'$. On définit alors

$$\begin{array}{rrl} \varphi : & E \cup D & \longrightarrow E \\ & x \in \widetilde{D} & \longmapsto \psi(x) \\ & x \notin \widetilde{D} & \longmapsto x \end{array}$$

Il s'agit bien d'une bijection car

φ **injective :** Soient $x, y \in E \cup D$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Si x, y sont tous les deux dans $\widetilde{D}$ ou tous les deux à l'extérieur alors $x = y$ par injectivité de ψ ou de l'identité. Supposons donc que $x \in \widetilde{D}$ et $y \notin \widetilde{D}$ alors $\varphi(x) = \psi(x) = y$ ce qui ne se produit pas car ψ est à valeurs dans D' et $y \notin \widetilde{D}$ donc $y \notin D'$ puisque $D' \subseteq \widetilde{D}$.

φ **surjective :** Soit $y \in E$, si $y \in D'$ alors, par surjectivité de ψ il existe $x \in \widetilde{D}$ tel que $\varphi(x) = \psi(x) = y$. Sinon $y \notin D'$ et, bien sûr, $y \in E$ donc $y \notin D \setminus E$ donc $y \notin \widetilde{D}$. D'où $\varphi(y) = y$.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : `fabien.narbonne@posteo.net` **Site internet :** `https://fabiennarbonne.fr`