# Espaces préhilbertiens

Il s'agit d'une liste d'exercices corrigés que j'utilise pour les colles que je dispense au lycée Chateaubriand, destinée aux étudiant·e·s de deuxième année de classe préparatoire. Cette liste est mise à leur disposition dès que les chapitres correspondants ont été abordés.

Si vous travaillez sur cette liste au cours de l'année, il se peut que certains chapitres n'aient pas encore été étudiés. Lorsque la résolution d'un exercice fait appel à des notions qui ne sont abordées que plus tard dans l'année, je précise les outils utilisés sous forme de mots-clés. Si vous n'êtes pas encore familier·ère avec ces notions, n'hésitez pas à passer à l'exercice suivant.

De nombreux exercices et leurs corrigés proviennent de ma propre création. Il est donc possible qu'il subsiste des coquilles, des erreurs ou des pistes d'amélioration. Je procède d'ailleurs régulièrement à des corrections. Si vous avez des suggestions d'amélioration ou si certains arguments vous semblent peu clairs, n'hésitez pas à me contacter. Mes coordonnées figurent en bas de la dernière page du document.

## Exercice 1 (★☆☆☆☆)

Montrer à l'aide d'un produit scalaire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\cos(x) + \sin(x)| \leq \sqrt{2}.$$

Que peut-on dire lorsqu'il y a égalité ?

## Exercice 2 (★★☆☆☆)

On munit $\mathbb{R}^{2n}$ de son produit scalaire canonique. On considère $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice $2n \times 2n$ composée de 1 sur l'antidiagonale.

1. Justifier que $J$ est la matrice d'une symétrie orthogonale dont on précisera les éléments caractéristiques et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de $J$.
2. Déterminer la projection de $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $\ker(J - I_n)$.

## Exercice 3 (★★☆☆☆)

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Calculer la distance de $X^2$ à l'espace $F = \text{Vect}(1, X)$.

## Exercice 4 (★★☆☆☆)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme $||\cdot||_2$ issue du produit scalaire canonique (celui pour lequel la base canonique $(1, X, \ldots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ forme une base orthonormée), i.e. $\left|\left|\sum_{k=0}^{n} c_k X^k\right|\right|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} c_k^2}$. On pose pour tout $f \in E^*$,

$$|||f||| = \sup_{P \in E \setminus \{0\}} \frac{|f(P)|}{||x||_2}$$

la norme subordonnée induite par $||\cdot||_2$ .On considère $a \in \mathbb{R}$ et

$$f_a : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$$

Montrer que $|||f_a||| = \sqrt{\frac{1-a^{2(n+1)}}{1-a^2}}$ pour $|a| \neq 1$ et $|||f_a||| = \sqrt{n+1}$ sinon.

**Mot clés :** *Norme subordonnée*

## Exercice 5 (★★☆☆☆)

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que $M$ est la matrice d'une isométrie directe de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
2. Calculer $M^3$ et en déduire ses valeurs propres possibles.
3. Quel est son polynôme minimal ? La matrice $M$ est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$ ?
4. Déterminer les éléments caractéristiques de l'isométrie $M$ (axe de rotation, plan stable et angle de rotation).

**Mots clés :** *Isométries de* $\mathbb{R}^3$

## Exercice 6 (★★☆☆☆)

On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & i\,\overline{z} \end{array}$$

Montrer que $f$ est une isométrie vectorielle du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et la décrire.

## Exercice 7 (★★★☆☆)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.

1. Montrer que $f : E \to E$ est autoadjoint de rang 1 si et seulement si $\exists a \in E \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) = \lambda \langle a, x\rangle a$.
2. On pose $a \in E \setminus \{0\}$ et $f$ l'endomorphisme défini par

$$f(x) = x + \langle x, a\rangle a.$$

Déterminer les espaces propres de $f$.

**Mot clés :** *Théorème spectral, réduction*

## Exercice 8 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Central PC 2015

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $f$ un endomorphisme orthogonal de $E$. On pose $g = f - \mathrm{id}_E$ .

1. Montrer que $\mathrm{im}\, g = (\ker g)^{\perp}$ .
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère

$$p_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{id}_E + f + \cdots + f^n\right).$$

Montrer que pour tout $x \in E$, $p_n(x)$ converge vers $p(x)$, le projeté orthogonal de $x$ sur $\ker g$.

## Exercice 9 (★★★☆☆)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, $H, K$ deux hyperplans de $E$ et $s_H$ et $s_K$ les deux réflexions orthogonales associées à ces deux hyperplans. Montrer que $s_H$ et $s_K$ commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^{\perp} \subset K$.

## Exercice 10 (★★★☆☆)

On considère 3 droites vectorielles distinctes $D_1, D_2$ et $D_3$ du plan $\mathbb{R}^2$. Décrire les triangles ayant pour médiatrices ces trois droites.

Expliquer comment en construire un.

**Mots clés :** *Classification des isométries de* $\mathbb{R}^2$

## Exercice 11 (★★★★☆)

Montrer qu'une isométrie $f$ d'un espace euclidien $(E, \langle \ , \ \rangle)$ de dimension finie $n$ est la composée d'au plus $n$ réflexions.

*(Indication : On pourra procéder par récurrence. Pour l'hérédité on pourra fixer un point quelconque $x \in E \setminus \{0\}$ et traiter séparément d'abord le cas $f(x) = x$ et puis se ramener au premier cas lorsque $f(x) \neq x$).*

**Mots clés :** *Réflexions, supplémentaire stable*

## Exercice 12 (★★★★☆)

On munit $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on pose $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une isométrie. On veut montrer par récurrence sur la dimension $n$ qu'il existe des espaces $V, W, P_1, \dots, P_r \subseteq E$ en somme directe orthogonale avec $\dim(P_i) = 2$ tels que $f_{|V} = \mathrm{id}_V$, $f_{|W} = -\mathrm{id}_W$ et $f_{|P_i}$ rotation.

1. Traiter les cas $n = 1$ et $n = 2$.
2. Soit $n \geq 3$. On suppose que le résultat qu'on souhaite montrer est vrai pour toute isométrie de $\mathbb{R}^k$ pour $k \leq n-1$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une isométrie.
   (a) Justifier qu'il suffit de trouver un espace $F \subseteq \mathbb{R}^n$ non trivial et stable par $f$ pour conclure.
   (b) Traiter le cas où $f$ a une valeur propre réelle.
   (c) On suppose que toutes les valeurs propres de $f$ sont complexes et on en fixe une $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ainsi qu'un vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n$ associé à $\lambda$.
      i. Montrer que $\overline{\lambda}$ est aussi un vecteur propre de $f$ et que $\overline{x}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.
      ii. On pose $F = \mathrm{Vect}\left(\frac{x+\overline{x}}{2}, \frac{x-\overline{x}}{2i}\right)$. Montrer que $F$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par $f$.

**Mots clés :** *Classification des isométries de* $\mathbb{R}^2$

## Exercice 13 (★★★★☆) Matrice de Gram

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien [1] et $\mathcal{F} = (x_1, \dots, x_p)$ une famille de vecteurs de $E$. On pose $\mathrm{Gram}(\mathcal{F}) = \left(\left\langle x_i, x_j\right\rangle\right)_{1 \leq i,j \leq p} \in M_p(\mathbb{R})$, appelé *matrice de Gram* de la famille, et $G(\mathcal{F}) = \det(\mathrm{Gram}(\mathcal{F}))$ son *déterminant de Gram.*

1. (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est libre si, et seulement si $G(\mathcal{F}) \neq 0$.
   (b) **(Application)**. Montrer que si $E$ contient des vecteurs $(e_1, \dots, e_{n+1})$ tous à même distance les uns des autres, i.e. $\forall i \neq j, \forall k \neq \ell, \left|\left|e_i - e_j\right|\right| = ||e_k - e_\ell|| \neq 0$ alors $\dim(E) \geq n$.
2. On suppose que $(x_1, \dots, x_p)$ est libre.
   (a) Montrer que $\forall x \in E, d(x, \mathrm{Vect}(\mathcal{F}))^2 = \frac{\mathrm{G}(x,\mathcal{F})}{\mathrm{G}(\mathcal{F})}$.
   (b) **(Application)**. On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire
   $$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\,.$$
   Calculer $d(X^2, \mathrm{Vect}(1, X))$.

1. On peut remplacer euclidien par préhilbertien si on veut.

## Exercice 14 (★★★★☆)

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $P, Q \in E, \langle P, Q\rangle = \int_0^{+\infty} e^{-x} P(x)Q(x)dx$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est bien défini et qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Calculer $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx$ pour tout $m \geq 0$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n) \subseteq E$ et $\mathcal{H}_n = \mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$. Pour tout $k \geq 1$ on pose $H_k(X) = \frac{1}{k!}(X+1)\cdots(X+k)$ et $H_0 = 1$ (appelés polynômes de Hilbert).
   (a) Montrer que $\mathcal{H}_n^{\perp} \cap E_n$ est un sous-espace vectoriel de $E_n$ de dimension 1.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $(b_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que
   $$(X-1)\cdots(X-n) = \sum_{k=0}^{n} b_k H_k(X). \tag{1}$$
   (c) On pose $g(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!} X^k$. Montrer que $\mathcal{H}_n^{\perp} \cap E_n = \mathrm{Vect}(g)$.
   (d) Montrer que $\langle g, g\rangle = ||g||_2^2 = n!(n+1)!$.
   (e) Calculer $d(1, \mathcal{H}_n)$.

**Mot clés :** *Projection, intégrale impropre*

## Exercice 15 (★★★★★) Groupe des isométries du tétraèdre

On considère $(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit $T$ un tétraèdre régulier, i.e. l'enveloppe convexe de 4 points $A_1, A_2, A_3, A_4$ tous à même distance deux à deux, on les appelle *sommets* du tétraèdre. On suppose que l'isobarycentre des $A_i$ est $0 \in \mathbb{R}^3$. On considère $\mathrm{Isom}(T)$ l'ensemble des isométries préservant $T$, i.e.

$$\mathrm{Isom}(T) = \left\{ f \in O_3(\mathbb{R}) \mid f(T) = T \right\}.$$

On admet que 3 sommets quelconques forment toujours une base de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $A, B \in E$ distincts. Montrer que $\{M \in E, ||A-M|| = ||B-M||\} = \mathrm{Vect}(B-A)^{\perp} + \frac{1}{2}(A+B)$.
   (b) Montrer que les 4 sommets sont de même norme et qu'il s'agit des points de $T$ de norme maximale.
2. Montrer que $\mathrm{Isom}(T)$ est un groupe.
3. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{Isom}(T)$ l'isométrie $f$ induit une bijection de l'ensemble de $S$ vers $S$ avec $S = \left\{A_1, A_2, A_3, A_4\right\}$ l'ensemble des sommets.
4. On pose l'application
   $$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathrm{Isom}(T) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(S) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ & f & \longmapsto & f_{|S} \end{array}$$
   (a) Montrer que $\varphi$ est un isomorphisme de groupes.
   (b) Montrer que $\forall f \in \mathrm{Isom}(T), \varepsilon(\varphi(f)) = \det(f)$ où $\varepsilon$ est la signature d'une permutation.

**Mot clés :** *Groupes finis, isométries, convexité*

## Exercice 16 (★★★★★)

On considère $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(x)Q(x)\,\mathrm{dx}\,.$$

On définit l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccl} u : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & \left[(1-X^2)P'\right]' = \frac{d}{dX}\left[(1-X^2)\frac{d}{dX}P\right]. \end{array}$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n \coloneqq u_{|\mathbb{R}_n[X]}$ définit un endomorphisme.
2. Montrer que $u$ est un endomorphisme autoadjoint pour le produit scalaire $\langle \cdot , \cdot \rangle$.
3. Justifier que $u_n$ est diagonalisable et que ses valeurs propres sont $-k(k+1)$ pour $0 \leq k \leq n$.
4. On pose $P_n(X) = \frac{d^n}{dX^n}\left[(X^2-1)^n\right] = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.
   (a) Montrer que $P_n$ est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (b) En déduire que $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de vecteurs propres de $u_n$.

**Mots clés :** *Espaces préhilbertiens, réduction des endomorphismes autoadjoints*

## Exercice 17 (★★★★★)

Soit $E = C^0([0,1],\mathbb{R})$ et $V$ l'endomorphisme de $E$ défini par $V(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\mathrm{dt}$. On munit $E$ du produit scalaire

$$\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{dt}\,.$$

1. Montrer que $V$ est continu et qu'il ne possède pas de valeur propre.
2. Déterminer l'adjoint $V^*$ de $V$ et calculer $V^*(f)'$.
3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $V \circ V^*$.

**Mots clés :** *Espaces préhilbertiens, continuité des applications linéaires*

# Éléments de corrections - Espaces préhilbertiens

## Exercice 1 (correction)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz aux vecteurs $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix}\cos(x)\\\sin(x)\end{pmatrix}$ (avec $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique). Ceci donne

$$|1 \times \cos(x) + 1 \times \sin(x)| \leq \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)}\sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Le cas d'égalité est si et seulement si les vecteurs sont colinéaires, i.e. $\cos(x) = \sin(x) \Rightarrow \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 = 1$, i.e. $\cos(x) = \pm\sqrt{2}2$ ce qui arrive donc seulement lorsque $x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$.

## Exercice 2 (correction)

1. Les colonnes de $J$ forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2n}$ donc $J$ est une isométrie. Par ailleurs $J^2 = I_{2n}$ donc c'est une symétrie. On a immédiatement

$$\ker(J - I_{2n}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right) \text{ et } \ker(J + I_{2n}) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\-1\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\-1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right).$$

   La famille concaténée $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ étant déjà orthogonale il suffit de diviser par $\sqrt{2}$ pour la normaliser.

2. On a $v = \frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \dots + \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ donc la projection est $\frac{1}{2}u_1 + \dots + \frac{1}{2}u_n$.

## Exercice 3 (correction)

On remarque que, puisque $t \mapsto t$ est impaire, la famille $(1, t)$ est déjà orthogonale. Donc il suffit de la normaliser, i.e. $(e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}t)$ est une base orthonormée de $F$.

La projection de $t^2$ sur $F$ est donnée par $p_F(t^2) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, t^2 \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} + \left\langle \sqrt{\frac{3}{2}}t, t^2 \right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}}t$. Par imparité de $t^3$ on a donc $p_F(t^2) = \frac{1}{3}$. On a donc

$$d(t^2, F)^2 = \left|\left|t^2 - p_F(t^2)\right|\right|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\right) dt = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$

Donc $d(t^2, F) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$.

## Exercice 4 (correction)

Supposons $|a| \neq 1$. On considère $P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$. On a

$$\begin{aligned}\left|f_a(P)\right| = |P(a)| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left|c_k\right| \left|a^k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} c_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a^{2k}} && \text{(inégalité de Cauchy-Schwartz dans } \mathbb{R}^{n+1}\text{)}\\ &\leq ||P||_2 \sqrt{\frac{1-a^{2(n+1)}}{1-a^2}} \Rightarrow |||f_a||| \leq \sqrt{\frac{1-a^{2(n+1)}}{1-a^2}}\end{aligned}$$

On remarque désormais que si $c_k = a^k$ alors toutes les inégalités sont des égalités d'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwartz. Le même raisonnement montre que $|||f||| = \sqrt{n+1}$ lorsque $|a| = 1$.

## Exercice 5 (correction)

1. Les colonnes de $M$ forment une base orthonormée il s'agit donc d'une isométrie. Puisque $\det M = 1$ c'est une isométrie directe donc une rotation autour d'un axe
2. On a $M^3 = I_3$ (on peut le faire sans calcul ! La matrice $M$ permute les vecteurs de la base canonique). Les valeurs propres étant de $M$ sont inclues dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur donc $\mathrm{Sp}(M) \subseteq \{1, j, j^2\}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.
3. Le polynôme minimal $\mu_M$ de $M$ est un polynôme à coefficient réel qui divise $X^3 - 1 = (X+1)(X^2+X+1)$. Il s'agit donc soit de $X+1$ (impossible car $M \neq -I_3$), soit de $X^2+X+1$ (impossible car $M^2 + M + I_3 = (1)_{1 \leq i,j \leq 3} \neq 0$), soit de $X^3 - 1$. C'est donc $X^3 - 1$. Puisque $\mu_M$ n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ la matrice $M$ n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
4. On remarque que $\det M = 1$ donc c'est une isométrie directe $M \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ donc $D = E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$ est l'axe de rotation.

   Son plan de rotation est $P = D^\perp : \ x + y + z = 0$. La restriction $r_\theta$ de $M$ à ce plan est une rotation d'angle $\theta$ et satisfait toujours $r_\theta^3 = r_{3\theta} = \mathrm{id}_P$ donc $3\theta = 0 \mod 2\pi$ donc $\theta = \frac{2\pi}{3}$ ou $\theta = -\frac{2\pi}{3}$ (si on avait $\theta = 0$, la restriction de $M$ à $P$ serait l'identité et dans une base concaténée de $P$ et $D$ la matrice de $M$ vérifierait $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui ne satisfait pas $A^3 = I_3$). Pour déterminer s'il s'agit de $\frac{2\pi}{3}$ ou de $-\frac{2\pi}{3}$ on peut déterminer la matrice de $M$ dans une base orthonormée plus sympathique. On considère $e_1 = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, e_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ (pour la trouver vous pouvez appliquer Gram-Schmidt à $\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$. La première colonne de $M$ dans cette base est $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ puisque $e_1$ est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. La seconde est $\begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ car $Me_2 = -\frac{1}{2}e_2 + \frac{\sqrt{3}}{2}e_3$. Ceci nous donne $\cos(\theta) = \pm\frac{2\pi}{3}$ ce que l'on savait déjà mais surtout $\sin(\theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}$ ce qui impose $\theta = \frac{2\pi}{3}$.

## Exercice 6 (correction)

La norme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est donnée par le module. On a bien $\forall z \in \mathbb{C}, |f(z)| = |i\overline{z}| = |z|$. Donc on a bien une isométrie. Par ailleurs, $f(z) = z \Leftrightarrow z \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1+i)$. Donc $f$ a une droite stable et $f(1) = i \notin \mathbb{R}$, c'est qu'il ne s'agit pas d'une rotation mais d'une symétrie orthogonale par rapport à $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1+i)$ parallèlement à $\mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1+i)^\perp = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(1-i)$.

## Exercice 7 (correction)

1. Soit $f$ un endomorphisme autoadjoint de rang 1. Donc il existe $a \neq 0$ tel que $f(E) = \mathrm{Vect}(a)$. On écrit alors $f(x) = \ell(x)a$ avec $\ell$ une forme linéaire. D'après la question précédente $\exists b \in E, \forall x \in E, \ell(x) = \langle b, x \rangle$. Puisque $f$ est autoadjoint on a pour tout $x, y \in E$,
$$\langle f(x), y \rangle = \langle x, f(y) \rangle \Leftrightarrow \langle b, x \rangle \langle a, y \rangle = \langle b, y \rangle \langle a, x \rangle.$$
   En prenant $y \in a^\perp$ et $x = a$ on a $\langle b, y \rangle = 0$ donc $b \in (a^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(a)$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = \lambda \langle a, x \rangle a$. L'autre sens est immédiat.
2. Soit $x$ un vecteur propre pour une valeur propre $\lambda$. On a $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (\lambda - 1)x = \langle x, a \rangle a$. On remarque alors que si $\lambda \neq 1, x \in \mathrm{Vect}(a) \setminus \{0\}$ auquel cas $x = \mu a$ donc $(\lambda - 1)\mu = \mu \langle a, a \rangle$ donc $\lambda = 1 + \langle a, a \rangle$ et $\ker(f - (1 + \langle a, a \rangle)\mathrm{id}) = E_{1+\langle a,a \rangle} = \mathrm{Vect}(a)$. D'autre part, $\lambda = 1$ équivaut à $x \in a^\perp$. On a donc
$$E = E_1 \oplus E_{1+\langle a,a \rangle} = \mathrm{Vect}(a) \oplus a^\perp.$$

On voit donc que $f$ est l'identité sur l'hyperplan $a^\perp$ et une homothétie de rapport $1+\langle a,a\rangle$ sur $\mathrm{Vect}(a)$.

## Exercice 8 (correction)

On note $m$ la dimension de $E$.

1. Soit $y \in \operatorname{im} g$ et $x \in \ker g$. Il existe alors $z \in E$ tel que $y = g(z)$ et $g(x) = f(x) - x = 0$, i.e. $f(x) = x$ et $x = f^*(x)$ car $f^{-1} = f^*$. On a alors

$$\begin{aligned}\langle y, x\rangle &= \langle g(z), x\rangle = \langle f(z) - z, x\rangle \\ &= \langle f(z), x\rangle - \langle z, x\rangle = \langle z, f^*(x)\rangle - \langle z, x\rangle = 0.\end{aligned}$$

   On a alors $\operatorname{im} g \subseteq (\ker g)^\perp$. Par ailleurs, par le théorème du rang, $\dim(\operatorname{im} g) = m - \dim(\ker g) = \dim(\ker g)^\perp$ . On a donc une inclusion d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre de même dimension donc ils sont égaux ; $\operatorname{im} g = (\ker g)^\perp$ .

2. Puisque $E$ est de dimension finie on a une décomposition en somme directe orthogonale $E = \ker g \oplus (\ker g)^\perp = \ker g \oplus \operatorname{im} g$. Soit $x \in E$, que l'on écrit de l'unique manière $x = x_0 + y$ avec $x_0 = p(x) \in \ker g$, i.e. $f(x_0) = x_0$ et $y = g(z) = f(z) - z$ pour un certain $z \in E$. On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k(x_0) = f^{k-1}(x_0) = x_0$ et $f^k(y) = f^{k+1}(y) - f^k(y)$. On a alors

$$\begin{aligned}p_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^k(x_0+y) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n}\left(x_0 + f^k(y)\right) \\ &= x_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{k+1}(z) - f^k(z) = p(x) + \frac{1}{n}\left(f^{n+1}(z) - z\right) \qquad \text{(par télescopage).}\end{aligned}$$

   On a alors $\frac{1}{n}z \to 0$ et

$$\left|\left|\frac{1}{n} f^{n+1}(z)\right|\right| = \frac{1}{n}\left|\left|f^{n+1}(z)\right|\right| = \frac{1}{n}\,||z||$$

   car $f$ étant une isométrie, elle préserve la norme. On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n(x) = p(x)$.

## Exercice 9 (correction)

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $H = K$ alors $s_H = s_K$ donc ils commutent bien. Supposons que $H^\perp \subseteq K$. En particulier $H + K = E$ et d'après la formule de Grassmann on a

$$\dim(E) = \dim(H) + \dim(K) - \dim(H \cap K)$$

donc $\dim(H \cap K) = n - 2$. Puis on a une décomposition orthogonale $H \cap K \oplus K^\perp \oplus H^\perp$. Soit $(e_1, \ldots, e_{n-2}, v_H, v_K)$ une base de $E$ telle que $(e_1, \ldots, e_{n-2})$ est une base de $H \cap K$ et $v_H$ dirige $H^\perp$ et $v_K$ dirige $K^\perp$. On a alors pour tout $i \le n-2$,

$$\begin{aligned} s_K(s_H(e_i)) &= s_K(e_i) = e_i = s_H(s_K(e_i)) \\ s_K(s_H(v_H)) &= -s_K(v_H) = -v_H && \text{car } H^\perp \subseteq K \\ &= s_H(s_K(v_H)) \\ s_K(s_H(v_K)) &= s_K(v_K) = -v_K = s_H(s_K(v_K)) \end{aligned}$$

Donc $s_H$ et $s_K$ commutent sur une base donc commutent (on peut aussi conclure que les deux endomorphismes sont diagonalisables dans une même base donc commutent car commutent sur chaque espace propre puisque leur restriction est alors une homothétie).

$\boxed{\Leftarrow}$ On pose $v_H \in H^\perp \setminus \{0\}$ et $v_K \in K^\perp \setminus \{0\}$ des vecteurs directeurs des orthogonaux. On a $s_K(s_H(v_H)) = s_K(-v_H) = -s_K(v_H)$ mais, puisque les deux endomorphismes commutent on a aussi $s_K(s_H(v_H)) = s_H(s_K(v_H)) = -s_K(v_H)$ donc $s_K(v_H) \in \ker(s_H + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(v_H)$. Puisque $s_K$ est une isométrie on a $s_K(v_H) = \pm v_H$. Si $s_K(v_H) = v_H$ alors $H^\perp \subseteq K = \ker(s_K - \mathrm{id})$ sinon $H^\perp \subseteq K^\perp$, i.e. $K \subseteq H$ mais alors $K = H$ par égalité des dimensions.

## Exercice 10 (correction)

Prenons le problème à l'envers et considérons un triangle du plan dont les sommets sont $x_1, x_2$ et $x_3 \in \mathbb{R}^2$. Quitte à déplacer notre triangle on peut supposer que ses médiatrices $D_1, D_2$ et $D_3$ se croisent en $(0,0)$. On considère les 3 symétries orthogonale $s_i$ d'axe respectif $D_i$. Quitte à renommer les droites on peut supposer que $s_1(x_1) = x_2$, $s_2(x_2) = x_3$ et $s_3(x_3) = x_1$. Autrement dit,

$$s_3(s_2(s_1(x_1))) = x_1.$$

Ceci revient à dire que $x_1$ est un point fixe de l'isométrie $s_0 = s_3 \circ s_2 \circ s_1$. Cette isométrie du plan vérifie det $s_0 = (-1)^3 = -1$. Il s'agit donc d'une isométrie indirecte du plan donc d'une symétrie qui admet pour axe de symétrie $\mathrm{Vect}(x_1)$. On construit les autres axes de façon similaire.

Partant de 3 droites distinctes on procède ainsi pour déterminer l'axe de $s_0$ :

— On part d'un point quelconque non nul $x \in \mathbb{R}^2$.

— On considère le symétrique $x'$ de $x$ par $s_1$, puis $x''$ de $x'$ par $s_2$, puis $y$ le symétrique de $x''$ par $s_3$.

— Le point $y$ est donc le symétrique de $x$ par la symétrie orthogonale $s_0$. Autrement dit $x_1 = \frac{x+y}{2}$ se trouve sur l'axe de $s_0$. On trace alors la droite $\mathrm{Vect}(x_1)$. On obtient alors $x_2 = s_1(x_1)$ puis $x_3 = s_2(x_2)$ ce qui nous donne un triangle dont les médiatrices sont $D_1, D_2$ et $D_3$.

## Exercice 11 (correction)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ de dimension 1. Les seules isométries sont $x \mapsto x$ (identité) et $x \mapsto -x$ (une réflexion). Donc c'est bon.

Soit $n \geq 1$ tel que toutes les isométries de tout espace euclidien de dimension $n$ soient la composée d'au plus $n$ réflexions.

On considère $f : E \to E$ isométrie d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ de dimension $n+1$ et $x \in E \setminus \{0\}$.

**Cas 1 : $f(x) = x$.** On a alors $D = \mathrm{Vect}(x)$ stable par $f$ et, puisque $f$ est une isométrie, $F = D^\perp$ est aussi stable par $f$. Par ailleurs, $F$ est de dimension $n$ puisque $D$ est de dimension 1. D'autre part $f_{|F}$ est une isométrie de $(F, \langle\ ,\ \rangle)$ donc il existe $\rho_1, \dots, \rho_r$ des réflexions d'hyperplan $H_i$ et d'axe $D_i$ de $F$ telles que $f_{|F} = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_r$ avec $r \leq n$. On pose $\widetilde{\rho_i} : E \to E$ telle que $\widetilde{\rho_i}(x) = x$ et $\widetilde{\rho}_{i|F} = \rho_i$. Il s'agit de réflexions d'axe $D_i$ et d'hyperplan $\widetilde{H_i} = H_i + D$. En effet, ce sont des isométries car ce sont des isométries sur des sous-espaces de $E$ qui sont orthogonaux et l'hyperplan $\widetilde{H_i}$ est bien stable de même qu'on continue d'avoir $\forall v \in D_i, \widetilde{\rho_i}(v) = \rho_i(v) = -v$.

Enfin, $\forall v \in F$ on a bien

$$f_{|H}(v) = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_r(v) = \widetilde{\rho_1} \circ \cdots \circ \widetilde{\rho_r}(v)$$

et $f(x) = x = \widetilde{\rho_1} \circ \cdots \circ \widetilde{\rho_r}(x)$. Donc on a bien $f = \widetilde{\rho_1} \circ \cdots \circ \widetilde{\rho_r}$ sur $E$.

**Cas 2 : $f(x) \neq x$.** Dans ce cas on considère $\rho_0$ la réflexion d'axe $D = \mathrm{Vect}(f(x) - x)$ et d'hyperplan $D^\perp$. On a alors $\rho_0(f(x)) = x$. On en déduit que l'isométrie $\rho_0 \circ f$ vérifie le cas 1 donc il existe au plus $n$ réflexions $\rho_1, \dots, \rho_r$ telles que $\rho_0 \circ f = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_r$, i.e.

$$f = \rho_0 \circ \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_r.$$

Donc $f$ est bien composée d'au plus $n+1$ réflexions.

## Exercice 12 (correction)

1. Les isométries d'une droites sont juste $\pm\,\mathrm{id}$ donc c'est bon. Si $\dim E = 2$ alors les isométries sont
   - les symétries orthogonales $f$ qui vérifient $f_{|V} = \mathrm{id}_V$ et $f_{|W} = -\,\mathrm{id}_W$ avec $V$ la droite stable (le "miroir" de la symétrie) et $W = V^\perp$, la direction de la symétrie.
   - les rotations.

   donc c'est bon.
2. (a) Si on trouve un tel espace on pourra alors appliquer l'hypothèse de récurrence (forte) aux restrictions de $f$ à $F$ et $F^\perp$ et on aura gagné.

   (b) Si $f$ à une valeur propre réelle $\lambda$ et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre alors $F = \mathrm{Vect}(x)$ est stable et non trivial donc on a gagné.

   (c) i. Puisqu'on travaille dans $\mathbb{R}^n$ on peut identifier $f$ à sa matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique. Un vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n$ associé à $\lambda$ satisfait donc $Mx = \lambda x$ donc $\overline{Mx} = M\overline{x} = \overline{\lambda x}$ puisque $M$ est à coefficients réels.

ii. On propose deux preuves :

**Méthode 1 :** Chaque coordonnée des vecteurs $u = \frac{1}{2}\left(x + \overline{x}\right)$ et $v = \frac{1}{2i}\left(x - \overline{x}\right)$ est réelle donc ils sont bien dans $\mathbb{R}^n$. Par ailleurs, puisque $\lambda \neq \overline{\lambda}$ les vecteurs $x$ et $\overline{x}$ ne sont pas colinéaires donc $(x, \overline{x})$ est une base de $F_{\mathbb{C}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x, \overline{x}) = \mathbb{C}x + \mathbb{C}\overline{x}$ et on a immédiatement $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x, \overline{x}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(u, v)$. Puisque $F_{\mathbb{C}}$ est stable par $M$ on a bien $Mu$ et $Mv \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(u, v)$ on peut alors écrire $Mu = \alpha u + \beta v$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mais alors

$$\overline{Mu} = Mu = \overline{\alpha}u + \overline{\beta}v.$$

Par unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base on a alors $\overline{\alpha} = \alpha$ et $\overline{\beta} = \beta$ donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $Mu, Mv \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u, v)$ donc $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u, v)$ stable par $f$.

**Méthode 2 :** On pose $u = \frac{1}{2}\left(x + \overline{x}\right)$ et $v = \frac{1}{2i}\left(x - \overline{x}\right)$. On peut résoudre $f(u) = \frac{1}{2}\left(\lambda x + \overline{\lambda x}\right) = \alpha u + \beta v$, on trouve $\alpha = \frac{\lambda + \overline{\lambda}}{2} \in \mathbb{R}$ et $\beta = -\frac{\lambda - \overline{\lambda}}{2i} \in \mathbb{R}$. De même pour $f(v) = \gamma u + \delta v$ on trouverait bien des solutions avec $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

## Exercice 13 (correction)

1. (a) Si on peut exprimer un des $x_j$ comme combinaison linéaire des autres $x_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k x_k$ alors $\forall i$,

$$\left\langle x_i, x_j \right\rangle = \sum_{k \neq j} \lambda_k \left\langle x_i, x_k \right\rangle$$

ce qui donne une combinaison linéaire des colonnes de $\mathrm{Gram}(\mathcal{F})$ donc $\mathrm{G}(\mathcal{F}) = 0$.
Réciproquement, si $\mathrm{G}(\mathcal{F}) = 0$ les colonnes de $\mathrm{Gram}(\mathcal{F})$ sont liées donc il existe $\lambda_i$ tels que $\forall i$,

$$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left\langle x_i, x_k \right\rangle = \left\langle x_i, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \right\rangle \qquad (L_i)$$

En faisant la somme des $\lambda_i L_i$ on obtient

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\rangle = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|^2 = 0$$

donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ donc $\mathcal{F}$ est liée.

(b) **(Application)**. On pose $\forall 1 \leq i \leq n, x_i = e_i - e_{n+1}$ et on montre que cette famille est libre. Pour cela on va montrer que sa matrice de Gram est de déterminant non nul. On note $d = \left\| e_i - e_j \right\|^2$ lorsque $i \neq j$, la distance commune au carré. On commence par remarquer que tous les $\left\langle x_i, x_j \right\rangle$ sont égaux lorsque $i \neq j$. En effet,

$$\begin{aligned}
\left\| e_j - e_i \right\|^2 &= \left\langle e_j - e_i, e_j - e_i \right\rangle \\
&= \left\langle e_j - e_{n+1} + e_{n+1} - e_i, e_j - e_{n+1} + e_{n+1} - e_i \right\rangle \\
&= \left\| e_j - e_{n+1} \right\|^2 - 2 \left\langle e_j - e_{n+1}, e_i - e_{n+1} \right\rangle + \left\| e_{n+1} - e_i \right\|^2.
\end{aligned}$$

Ce qui donne $\left\langle x_i, x_j \right\rangle = \frac{1}{2}d$. Ainsi, la matrice de Gram de la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est

$$\mathrm{Gram}(x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{2}d \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}dA$$

Pour voir que cette matrice est inversible il suffit de voir que $A$ l'est. Pour cela on peut calculer ses valeurs propres qui sont évidentes. En effet, 1 est valeurs propres de multiplicité au moins $n - 1$ car $A - 3I$ est la matrice composée que de $-1$ donc de rang 1 donc son noyau (l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension $n - 1$ par le théorème du rang). La dernière valeur propre $\lambda$ satisfait $\lambda + (n - 1) = \mathrm{Tr}(A) = 2n$ donc $\lambda = n + 1 \neq 0$. Puisque 0 n'est pas une valeur propre la matrice est inversible. Vous pouvez aussi bien calculer le déterminant directement et vous devriez trouver $\det(A) = n + 1$.

2. (a) On pose $H = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et on écrit $x = x_H + x^\perp$ avec $x_H \in H$ et $\langle x_H, x^\perp \rangle = 0$ de telle sorte que $d(x,H) = \|x^\perp\|$. On a

$$\begin{aligned}
\det(G(x, x_1, \dots, x_m)) &= \begin{vmatrix} \langle x,x\rangle & \langle x_1,x\rangle & \cdots & \langle x_m,x\rangle \\ \langle x,x_1\rangle & & & \\ \vdots & & G(x_1,\dots,x_m) & \\ \langle x,x_m\rangle & & & \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \langle x^\perp,x^\perp\rangle & \langle x_1,x\rangle & \cdots & \langle x_m,x\rangle \\ 0 & & & \\ \vdots & & G(x_1,\dots,x_m) & \\ 0 & & & \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \langle x_H,x_H\rangle & \langle x_1,x_H\rangle & \cdots & \langle x_m,x_H\rangle \\ \langle x_H,x_1\rangle & & & \\ \vdots & & G(x_1,\dots,x_m) & \\ \langle x_H,x_m\rangle & & & \end{vmatrix}}_{G(x_F,x_1,\dots,x_m)=0 \text{ car famille liée}} \\
&= \|x^\perp\|^2 \det(G(x_1,\dots,x_m)) = d(x,H)^2 \det(G(x_1,\dots,x_m)).
\end{aligned}$$

(b) On a $\det(G(1,t)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3}$ et $\det(G(1,t,t^2)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{32}{135}$ donc $d(t^2, \mathrm{Vect}(1,t))^2 = \frac{32\times 3}{135\times 4} = \frac{8}{45}$ d'où $d(t^2, \mathrm{Vect}(1,t)) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$.

## Exercice 14 (correction)

1. Soit $P, Q \in E$, par croissance comparée $\lim_{x\to+\infty} x^2 P(x)Q(x)e^{-x} = 0$ donc $P(x)Q(x)e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$ donc notre fonction est intégrable en $+\infty$ (pas de souci en 0).
2. Avec une intégration par partie en posant $u = x^m$ et $v = e^{-x}$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx = m \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x} dx.$$

De plus $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ donc, par récurrence $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx = m!$.

3. (a) On a $\mathcal{H}_n^\perp \cap E_n \underset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_n = E_n$. En effet, l'inclusion $\boxed{\subseteq}$ est immédiate. Pour l'autre on sait que $E_n \subseteq E = \mathcal{H}_n^\perp \underset{\perp}{\oplus} \mathcal{H}_n$ donc pour tout $P$ dans $E_n$ on peut écrire $P = P_1 + P_2$ avec $P_1 \in \mathcal{H}_n^\perp$ et $P_2 \in \mathcal{H}_n$ donc $P_1 = P - P_2 \in E_n$ donc $P_1 \in \mathcal{H}_n^\perp \cap E_n$. Puisque $\dim \mathcal{H}_n = n$ on a bien $\dim \mathcal{H}_n^\perp \cap E_n = 1$.

**Attention :** En général on n'a pas $(F \underset{\perp}{\oplus} F^\perp) \cap E = (F \cap E) \underset{\perp}{\oplus} (F^\perp \cap E)$ (prendre $F$ une droite dans $\mathbb{R}^2$ et $E$ une droite distincte de $F$ et $F^\perp$).

(b) La famille $(H_k)_{0\le k\le n}$ est une famille libre de $E_n$. En effet, si on a $\sum_{k=0}^n \lambda_k H_k = 0$ alors en évaluant en $X = -1$ on a $\lambda_0 = 0$ puis en $X = -2$ on a $\lambda_1 = 0$ etc. Puisque cette famille comporte $n+1$ vecteurs et que $\dim E_n = n+1$ c'est une famille libre maximale donc une base donc tout polynôme de $E_n$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des $H_k$.

(c) On a $g \in E_n$. Calculons $\langle g, X^\ell \rangle$ pour $1 \le \ell \le n$.

$$\begin{aligned}
\langle g, X^\ell \rangle &= \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} \int_0^{+\infty} x^{k+\ell} e^{-x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} (k+\ell)! \\
&= \sum_{k=0}^n b_k H_k(\ell) = (\ell-1)\cdots(\ell-\ell)\cdots(\ell-n) = 0.
\end{aligned}$$

On a donc bien $g \in \mathcal{H}_n \cap E_n$ et $g \neq 0$ car cela signifierait que tous les $b_k$ sont nuls ce qui est impossible car $(X-1)\cdots(X-n) \neq 0$. Donc $g$ dirige bien la droite vectorielle.

(d) On a

$$\langle g, g\rangle = \sum_{i=0}^{n}\sum_{k=0}^{n}\frac{b_i b_k}{i!k!}(i+k)! = \sum_{i=0}^{n} b_i \sum_{k=0}^{n} b_k \underbrace{\frac{(i+k)!}{k!i!}}_{H_k(i)=0 \text{ si } i>0} = b_0 \sum_{k=0} b_k H_k(0) = b_0(-1)^n n!$$

On remarque, en évaluant 1 en $-1$ que $b_0 = (-1)^n(n+1)!$ ce qui conclu la preuve.

(e) La projection de 1 sur $\mathcal{H}_n$ est $p_n(1) = \left\langle 1, \frac{g}{||g||_2}\right\rangle \frac{g}{||g||_2} = \frac{1}{n!(n+1)!}\langle 1, g\rangle g$. Or $\langle 1, g\rangle = \sum_{k=0} b_k H_k(0) = (-1)^n n!$ donc $p_n(1) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} g$. Enfin la distance de 1 à $\mathcal{H}_n$ est donnée par la racine de

$$\left|\left|1 - p_n(1)\right|\right|_2^2 = \langle 1, 1\rangle - 2\frac{(-1)^n}{(n+1)!}\langle 1, g\rangle + \frac{1}{(n+1)!^2}\langle g, g\rangle = 1 - 2\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Donc $d(1, \mathcal{H}_n) = \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}}$.

## Exercice 15 (correction)

1. (a) On pose $I = \frac{1}{2}(A+B)$. On a $\forall M \in E$,

$$\begin{aligned}
||A-M||^2 = ||B-M||^2 &\Leftrightarrow \langle A-M, A-M\rangle = \langle B-M, B-M\rangle \\
&\Leftrightarrow \langle A-I+I-M, A-I+I-M\rangle = \langle B-I+I-M, B-I+I-M\rangle \\
&\Leftrightarrow ||A-I||^2 + 2\langle I-M, A-I\rangle + ||I-M||^2 = ||B-I||^2 + 2\langle I-M, B-I\rangle + ||I-M||^2 \\
&\Leftrightarrow 4\langle I-M, A-I\rangle = 0 \text{ car } ||A-I|| = ||B-I|| \\
&\Leftrightarrow \langle I-M, A-B\rangle = 0
\end{aligned}$$

Donc on a bien $M - I \in \mathrm{Vect}(B-A)$.

(b) Par définition on a $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$ et $A_3$ et $A_4$ sont à égale distance de $A_1$ et de $A_2$ donc font parti du plan affine $\mathrm{Vect}(A_1 - A_2)^\perp + \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$. On a donc

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2\left(\frac{1}{2}(A_1 + A_2)\right) + A_3 + A_4 = 0$$

puis, en divisant par 4 cela fait apparaître 0 comme barycentre de points du plan affine. Puisqu'un plan est convexe, 0 en fait parti. Autrement dit, $\left|\left|A_1 - 0\right|\right| = \left|\left|A_2 - 0\right|\right|$. De la même façon on a $\left|\left|A_i\right|\right| = \left|\left|A_j\right|\right|$ pour tout $i, j$. Quitte à composer par une homothétie on suppose dans la suite que $\forall i, \left|\left|A_i\right|\right| = 1$.

Si on considère un point $P \in T$, de norme 1 i.e. il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ tels que $0 \leq \lambda_i \leq 1$ et $\lambda_1 + \cdots + \lambda_4 = 1$ et $P = \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_4 A_4$ alors

$$1 = ||P|| \leq \left|\left|\lambda_1 A_1\right|\right| + \left|\left|\lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4\right|\right| \leq \sum_{i=1}^{4}\lambda_i = 1$$

Par le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire on en déduit que $\lambda_1 A_1$ et $\lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4$ sont positivement colinéaires. Donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ ou alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\lambda_1 A_1 = \lambda(\lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4)$. Mais, puisque $-A_1 = A_2 + A_3 + A_4$ est l'unique écriture de $A_1$ dans la base $(A_2, A_3, A_4)$, on en déduit que $\lambda_1 = \lambda = 0$ (par positivité). On en déduit que $\left|\left|\lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4\right|\right| = 1$ et on conclut de la même manière qu'un des $\lambda_i$ vaut 1 et les autres sont nuls.

2. Il s'agit d'un sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$ car $\mathrm{id} \in \mathrm{Isom}(T)$ et $\forall f, g \in \mathrm{Isom}(T)$, $f \circ g^{-1}(T) = T$ donc $f \circ g^{-1} \in \mathrm{Isom}(T)$.

3. Les sommets de $T$ sont les seuls points du tétraèdre de norme 1. Par ailleurs, $\forall f \in \mathrm{Isom}(T)$, $\left|\left|f(A_i)\right|\right| = \left|\left|A_i\right|\right|$ donc $f(A_i)$ est un élément de $T$ de norme maximale donc c'est l'un des $A_j$. La restriction de $f$ à $S$ reste injective car $f$ est injective mais puisque $S$ a un nombre fini d'éléments et que $f_{|S}$ est à valeurs dans $S$ elle est aussi surjective donc bijective.

4. (a) Il suffit de montrer que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}(T) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(S) \\ f & \longmapsto & f_{|S} \end{array}$$

est un isomorphisme de groupe car $\mathfrak{S}(S) \simeq \mathfrak{S}_4$. La question précédente montre que l'application $\varphi$ est bien définie seulement.

$\varphi$ **est un isomorphisme de groupes :** Il est clair qu'il s'agit d'un morphisme de groupes car les lois de groupe de $\mathrm{Isom}(T)$ et $\mathfrak{S}(S)$ sont la composition.

$\varphi$ **est injective :** Soit $f \in \mathrm{Isom}(T)$ telle que $\varphi(f) = \mathrm{id}_S$, i.e. $f$ fixe un à un les 4 sommets. Donc $f$ est une isométrie (donc une application linéaire) qui coïncide avec id sur une base donc c'est l'identité sur $\mathbb{R}^3$.

$\varphi$ **est surjective :** On va montrer qu'on peut atteindre toutes les transpositions. Soit $\tau = (A_1, A_2) \in \mathfrak{S}(S)$. On pose $f$ la réflexion de plan $\mathrm{Vect}(A_3, A_4)$. On a vu qu'alors, puisque $\frac{1}{2}(A_1 + A_2)$, $A_3$ et $A_4$ sont à égale distance de $A_1$ et de $A_2$ ils appartiennent au plan tangent $\mathrm{Vect}(A_1 - A_2)^{\perp}$. Autrement dit, l'axe de la réflexion $f$ est $\mathrm{Vect}(A_1 - A_2)$ donc

$$f(A_1) = f\left(\frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{1}{2}(A_1 - A_2)\right) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) - \frac{1}{2}(A_1 - A_2) = A_2.$$

Donc $\varphi(f) = \tau$.

Enfin, puisque les transpositions engendrent $\mathfrak{S}(S)$ et qu'elles sont toutes contenues dans l'image de $\varphi$ il s'agit bien d'un morphisme surjectif.

(b) Le déterminant d'une isométrie réelle est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ donc det et $\varepsilon\circ\varphi$ sont des morphismes de groupes de $\mathrm{Isom}(T)$ dans $\{-1, 1\}$ et si $f$ est une réflexion $\det(f) = -1$ et $\varepsilon(\varphi(f)) = -1$ car $\varphi(f)$ est une transposition. Puisque les réflexions engendrent $\mathrm{Isom}(T)$ d'après la question précédente det et $\varepsilon\circ\varphi$ coïncident sur des générateurs donc coïncident partout.

## Exercice 16 (correction)

1. On a facilement que pour $\deg(P) \leq n, \deg(u(P)) \leq n$.
2. On a en faisant deux IPP

$$\langle u(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1} ((1 - x^2)P'(x))'Q(x)\,\mathrm{d}x = \underbrace{[(1 - x^2)P'(x)Q(x)]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} (1 - x^2)P'(x)'Q'(x)\,\mathrm{d}x$$

puis en refaisant une IPP on a bien $\langle u(P), Q\rangle = \langle P, u(Q)\rangle$.

3. On propose deux justifications

**Méthode 1 :** Tout endomorphisme réel symétrique est diagonalisable en base orthonormée par le théorème spectral.

**Méthode 2 (si le théorème spectral n'a pas encore été vu) :** Puisque $u(\mathbb{R}_n[X]) \subseteq \mathbb{R}_n[X]$ la matrice de $u$ dans la base canonique est triangulaire et puisque $u(X^k) = -k(k+1)X^k + \cdots$ les valeurs sur la diagonale sont $-k(k+1)$ qui sont donc les valeurs propres de $u$. Puisqu'elles sont toutes distinctes $u$ est bien diagonalisable.

4. (a) Remarquons que $-1$ et $1$ sont des racines de $(X^2 - 1)^n$ de multiplicité $n$ donc pour tout $k < n$, $\left[(x^2 - 1)^n\right]^{(k)}$ s'annule en $-1$ et 1. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a

$$\begin{aligned}
\langle P, Q\rangle &= \int_{-1}^{1} \left[(x^2 - 1)^n\right]^{(n)} Q(x)\,\mathrm{d}x \\
&= \underbrace{\left[\left[(x^2 - 1)^n\right]^{(n-1)} Q\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} \left[(x^2 - 1)^n\right]^{(n-1)} Q'\,\mathrm{d}x \\
&\;\vdots \\
&= \underbrace{\left[\left[(x^2 - 1)^n\right]^{(n-k)} Q^{(k-1)}\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1} \left[(x^2 - 1)^n\right]^{(n-k)} Q^{(k)}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}$$

Pour $k = n$ cela donne bien 0 puisque $Q$ est de degré $n - 1$ au plus.

(b) On remarque que $\deg P_n = n$ donc $\mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On le montre par récurrence sur $n$. On a bien $u(P_0) = 0$ donc $P_0$ vecteur propre associé à la valeur propre 0. Supposons que $(P_0, \dots, P_{n-1})$ soit une base de vecteurs propres de $u_{n-1}$. On sait par ailleurs que les espaces propres sont en somme directe orthogonale et que ce sont des droites car les valeurs propres sont distinctes. Soit $Q_n$ un vecteur propre de $u_n$ associé à la valeur propre $-n(n+1)$. Puisque $P_n$ est orthogonal à $\mathrm{Vect}(P_0, \dots, P_{n-1})$ on a $P_n \in \mathrm{Vect}(Q_n)$ (attention c'est vrai seulement par orthogonalité des sommes !!). Donc $P_n$ vecteur propre de $u_n$.

## Exercice 17 (correction)

1. On a

$$\begin{aligned} ||V(f)||_2^2 &= \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{dt}\right)^2 dx \leq \int_0^1 x \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{dt}\,dx \text{ par Cauchy-Schwartz} \\ &\leq \int_0^1 \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{dt}\,dx \leq ||f||_2^2 \end{aligned}$$

Donc $V$ est bien continu est sa norme subordonnée est plus petite que 1. Supposons que $V$ admette une valeur propre $\lambda$ alors il existe $f \neq 0$ telle que $V(f) = \lambda f$. Puisque $f$ est continue $V(f)$ est de classe $C^1$ et donc $f$ aussi (si $\lambda \neq 0$). On a alors $V(f)'(x) = f(x) = \lambda f'(x)$ qui donne $f(x) = f(0)e^{x/\lambda}$ mais $f(0) = V(f)(0) = 0$ donc $f = 0$ ce qui est absurde. Même conclusion si $\lambda = 0$.

2. On a

$$\begin{aligned} \langle V(f), g\rangle &= \int_0^1 \int_0^x f(t)\,\mathrm{dt}\,g(x)dx = [V(f)V(g)]_0^1 - \int_0^1 f(x)V(g)(x)dx \text{ par IPP} \\ &= \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(t)\,\mathrm{dt} - \int_0^1 f(x)V(g)(x)dx = \int_0^1 f(x)\left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{dt} - \int_0^x g(t)\,\mathrm{dt}\right)dx \\ &= \int_0^1 f(x)\int_x^1 g(t)\,\mathrm{dt}\,dx \end{aligned}$$

Donc $V^*(g)(x) = \int_x^1 g(t)\,\mathrm{dt}$ . On a alors $V^*(f)' = -f$.

3. Soit $\lambda$ une valeur propre (positive) de $V \circ V^*$ et $f$ un vecteur propre. De la même façon que pour la première question on peut montrer que $\lambda \neq 0$ donc $\lambda > 0$. On a $(V \circ V^*)(f) = \lambda f$ qui implique que $f$ est de classe $C^2$. On a, par continuité de $V$, $(V \circ V^*)(f)' = V(V^*(f)') = -V(f) = \lambda f'$ puis, en dérivant encore, $-f = \lambda f''$. On en déduit que $f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ avec $\omega^2 = \frac{1}{\lambda}$. On a alors

$$\lambda f(x) = V \circ V^*(f)(x) = \int_0^x \int_t^1 f(u)du\,\mathrm{dt} = \lambda f(x) + \left(\frac{a}{\omega}\sin(\omega) - \frac{b}{\omega}\cos(\omega)\right)x - a\lambda.$$

Donc $a\lambda = 0$ donc $a = 0$ donc $-\frac{b}{\omega}\cos(\omega) = 0$. Puisque $f \neq 0, \cos(\omega) = 0$, i.e. $\exists n \in \mathbb{Z}, \omega = \frac{\pi}{2} + n\pi$ donc $\lambda = \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}$. Réciproquement, chaque $\lambda = \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}$ est une valeur propre.

*Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous*

Contact colleur

**Mail :** `fabien.narbonne@posteo.net` **Site internet :** `https://fabiennarbonne.fr`