EXERCICES DE COLLE

2024 - 2025

Fabien NARBONNE

22/05/2025

Table des matières

Voici tous les exercices que je propose en colle aux étudiants de MP et de MP* du Lycée Chateaubriand à Rennes. La plupart sont corrigés. N'hésitez pas à me signaler toute erreur ou amélioration à l'adresse mail renseignée tout en bas du document.

Les exercices sont classés par thème puis par difficulté approximative au sein de chaque thème.

1. Réduction des endomorphismes

Exercice 1 (★☆☆☆☆)

La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 2 (★☆☆☆☆)

On considère $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique ainsi qu'une base de chaque espace propre sans calcul de déterminant et sans résolution de système.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ? En déduire son polynôme minimal sans calcul.

Mots clés : *Réduction sans calcul*

Exercice 3 (★☆☆☆☆)

On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le polynôme caractéristique ainsi qu'une base de chaque espace propre sans calcul de déterminant et sans résolution de système.
2. La matrice A est-elle diagonalisable ? Trigonalisable ? En déduire son polynôme minimal sans calcul.

Mots clés : *Réduction sans calcul*

Exercice 4 (★☆☆☆☆) - Inspiré d'un oral CCP

On considère l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $\Phi(P) = X^n P\left(\frac{1}{X}\right)$. Montrer que Φ est diagonalisable.

Mots clés : *polynôme annulateur*

Exercice 5 (★☆☆☆☆)

Soient f, g deux endomorphismes d'un espace vectoriel E. Montrer que si f et g commutent alors pour tout $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$, $E_\lambda = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}) \subseteq E$ est stable par g.

Exercice 6 (★☆☆☆☆)

Soit $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Montrer qu'il existe $P \in \mathbb{K}[X]$ tel que $M^{-1} = P(M)$.

Mots clés : *Polynômes annulateurs*

Exercice 7 (★★☆☆☆) - Inspiré d'un exemple d'oral CCP 2025

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. (a) Justifier sans calcul que A est diagonalisable.
   (b) Déterminer les valeurs propres de A ainsi qu'une base de chaque espace propre.
2. On considère le système différentiel

$$(S) : \begin{cases} x' &= x + 2z \\ y' &= y \\ z' &= 2x + z \end{cases}$$

   avec x, y, z qui désigne trois fonctions d'une variable t. Résoudre le système en utilisant la question 1.

Mots clés : *Système différentiel*

Exercice 8 (★☆☆☆☆)

1. Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$ telle que $A^3 = -A$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur A pour qu'elle soit diagonalisable dans $\mathbb{R}$.
2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ est-elle diagonalisable ?

Mots clés : *Polynômes annulateurs*

Exercice 9 (★★☆☆☆)

Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est dense dans $M_n(\mathbb{K})$.
Mots clés : *Densité, polynôme caractéristique*

Exercice 10 (★☆☆☆☆)

Décrire les espaces propres associés à l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & (u_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}. \end{array}$$

Exercice 11 (★☆☆☆☆)

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Quelles sont ses valeurs propres ? Est-elle diagonalisable ? Quel est son polynôme minimal ?
Mots clés : *Version sans diago en commentaires*

Exercice 12 (★★☆☆☆)

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. On suppose que A^n converge vers une matrice B. Montrer que B est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres possibles.
Mots clés : *Espace vectoriel normé, polynôme annulateur*

Exercice 13 (★★☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie $u \in \mathcal{L}(E)$ et

$$f_u : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ v & \longmapsto & uv := u \circ v \end{array}$$

Montrer que $\mu_u = \mu_{f_u}$ où μ_u et μ_{f_u} désignent les polynômes minimaux respectifs de u et de f_u.
Mots clés : *Polynôme minimal, polynômes annulateurs*

Exercice 14 (★★☆☆☆)

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ est connexe par arc. Est-il convexe ?
Mots clés : *Espace vectoriel normé, convexité*

Exercice 15 (★★☆☆☆)

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A. Que peut-on en déduire en termes d'espaces propres ?
2. Montrer que -1 est une valeur propre de A.
3. Déterminer le polynôme caractéristique de A sans calcul de déterminant.
4. La matrice A est-elle diagonalisable ? Quel est son polynôme minimal ?

Exercice 16 (★★☆☆☆)

On considère la matrice

$$A = \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & 1 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ \mathbf{0} & & 1 & 1 & & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & & 1 & 1 & & \mathbf{0} \\ & \iddots & & & \ddots & \\ 1 & & \mathbf{0} & \mathbf{0} & & 1 \end{array}\right) \in M_{2n}(\mathbb{R})$$

1. Quel est le rang de A ?
2. Calculer A^2 en fonction de A.
3. Déterminer sans calcul de déterminant les valeurs propres de A et les espaces propres associés.

Mots clés : *Réduction, version sans diago disponible*

Exercice 17 (★★☆☆☆)

Discuter la diagonalisabilité de l'endomorphisme

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & (1+X^2) \cdot P'' \end{array}$$

Exercice 18 (★★☆☆☆)

Déterminer les espaces propres de l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & XP'. \end{array}$$

Exercice 19 (★★☆☆☆)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{C}$-espace vectoriel E. On suppose qu'il existe $m \geq 2$ un entier tel que $u^m = \underbrace{u \circ \cdots \circ u}_{m \text{ fois}} = u$.

1. Montrer que $E = \ker u \oplus \operatorname{im} u^{m-1}$.
2. On suppose E de dimension finie. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?

Mot clés : *Polynômes annulateurs, version sans diago disponible*

Exercice 20 (★★☆☆☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice carrée et $P \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme tel que $P(A) = 0$. Montrer que pour toute valeur propre λ de A on a $P(\lambda) = 0$.

Exercice 21 (★★☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et f un endomorphisme de E. Montrer qu'on a équivalence entre

1. $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} f^2$
2. $\operatorname{im} f = \operatorname{im} f^2$
3. $\ker f = \ker f^2$
4. $\operatorname{im} f \oplus \ker f = E$

Exercice 22 (★★☆☆☆) oral Mines-Ponts

Soit $f \in L(\mathbb{R}^3)$ telle que $f^2 = 0$. Montrer qu'il existe $g \in L(\mathbb{R}^3, \mathbb{R})$ et $v \in \mathbb{R}^3$ tels que pour tout $x \in \mathbb{R}^3$, $f(x) = g(x)v$.

Exercice 23 (★★★☆☆) Inspiré de Mines-Télécom PSI Mathématiques II 2022

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice admettant une valeur propre dans $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

1. Montrer que A possède deux valeurs propres complexes distinctes conjuguées.
2. Montrer qu'il existe une matrice $Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ et des réels a, b tels que

$$A = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

(Indication : On pourra considérer V un vecteur propre de A et l'écrire $V = W_1 + iW_2$ avec $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^2$).

Exercice 24 (★★★☆☆)

Soit

$$u : \begin{array}{rcl} \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}_{n-1}[X] \\ P & \longmapsto & P(X+1). \end{array}$$

1. Montrer que χ_u, le polynôme caractéristique de u vérifie $\chi_u(X) = (X-1)^n$.
2. L'endomorphisme u est-il diagonalisable ?
3. Déterminer des réels $a_0, \dots, a_{n-2}$ tels que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}_{n-1}[X]$ on a

$$P(X+n) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k P(X+k) = 0.$$

Mots clés : *Trigonalisabilité, Cayley-Hamilton*

Exercice 25 (★★★☆☆)

Soit u un endomorphisme d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension finie et $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que $P(u)$ est inversible si, et seulement si P est premier avec μ_u, le polynôme minimal de u.
Indication : on pourra commencer par justifier que si $P(u)$ est inversible alors son inverse est aussi dans $\mathbb{K}[u]$.

Mots clés : *Polynôme minimal, polynômes annulateurs, Cayley-Hamilton*

Exercice 26 (★★★☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & u + \mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{id} \end{array}$$

1. Montrer que $\forall u \in \mathcal{L}(E), \Phi^2(u) = (n+2)\Phi(u) - (n+1)u$.
2. Montrer que Φ est diagonalisable et décrire ses espaces propres.
3. Que vaut $\det(\Phi)$?

Mots clés : *Polynôme minimal, polynômes annulateurs, Cayley-Hamilton*

Exercice 27 (★★★★☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ u & \longmapsto & u + \mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{id} \end{array}$$

Étudier la diagonalisabilité de Φ et calculer $\det(\Phi)$.
Indication : on pourra remarquer que 1 *est une valeur propre évidente de* Φ.

Mots clés :*Version sans polynôme annulateur*

Exercice 28 (★★★☆☆) - Inspiré d'un d'oral Centrale/Supélec

On considère une matrice $A \in M_n(\mathbb{K})$ de polynôme caractéristique scindé. On note g et d les endomorphismes de $M_n(\mathbb{K})$ définis par $g(M) = AM$ et $d(M) = MA$. Enfin on note $\varphi = g + d$, i.e. $\forall M \in M_n(\mathbb{K}), \varphi(M) = AM + MA$.

1. (a) Montrer que le spectre de g dans $\mathbb{K}$ est celui de A.
   (b) En déduire que le spectre de d est également celui de A.
2. Vérifier que g et d commutent. On admet que cela implique qu'il existe une base dans laquelle g et d sont simultanément triangulaires supérieures. En déduire que
$$\mathrm{Sp}(\varphi) = \{\lambda + \mu \mid \lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(A)\}.$$
3. Donner une condition nécessaire et suffisante portant sur le spectre de A pour que φ soit un automorphisme.
4. *(Bonus)* Montrer l'affirmation de la question 3 à savoir que g et d sont triangularisables dans une base commune de $M_n(\mathbb{K})$.

Mots clés :

Exercice 29 (★★★☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $u, v \in \mathcal{L}(E)$ deux endomorphismes. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 30 (★★★☆☆)

1. Soient A, B deux matrices dont l'une des deux est inversibles. Montrer que $\chi_{AB} = \chi_{BA}$ où χ_C désigne le polynôme caractéristique d'une matrice C.
2. Montrer que le résultat reste vrai si on ne suppose plus que A ou B est inversible.

Mots clés : *Densité, polynôme caractéristique*

Exercice 31 (★★☆☆☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice. Montrer que $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}(A)}$.
Mots clés : *Exponentielle matrice, trigonalisation*

Exercice 32 (★★★☆☆)

Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n et $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. On pose C_f l'ensemble des endomorphismes $g \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent avec f. On suppose que f est diagonalisable et on note $\mathrm{Spec}(f)$ l'ensemble de ses valeurs propres et E_λ ses espaces propres associés.

1. Montrer que C_f est un espace vectoriel de dimension finie.
2. Montrer que $g \in C_f \Leftrightarrow \forall \lambda \in \mathrm{Spec}(f), E_\lambda$ stable par g.
3. En déduire un isomorphisme entre C_f et $\bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \mathcal{L}(E_\lambda)$ puis qu'on a $\dim C_f = \sum_{\lambda \in \mathrm{Spec}(f)} \alpha_\lambda^2$ où α_λ est la multiplicité de λ.
4. On suppose que les valeurs propres de f sont simples. Montrer que $\left(\mathrm{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1}\right)$ est une base de C_f.

Exercice 33 (★★★☆☆) Inspiré d'un oral Centrale MP

Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1 avec $n \geq 2$.

1. Montrer que $X(X - \mathrm{Tr}(A))$ est un polynôme annulateur de A.
2. En déduire que A est diagonalisable si, et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$ et que si $\mathrm{Tr}(A) = 0$ alors A est semblable à
$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$
3. Donner une base de vecteurs propres de $A = \left(\frac{i}{j}\right)_{1 \leq i,j \leq n}$.

Mots clés : *Polynôme minimal, polynômes annulateurs*

Exercice 34 (★★★☆☆)

Soit $n \geq 1$ un entier naturel. On considère l'application
$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_n[X] \\ P & \longmapsto & P(X^2+1)^{(n)}. \end{array}$$
Après avoir justifié que f est bien définie discuter sa diagonalisabilité.

Exercice 35 (★★★☆☆)

On pose
$$S : \begin{array}{rcl} M_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_2(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & JMJ \end{array}$$
avec $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $S^2 = S \circ S = \mathrm{id}$.
2. On pose $F = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) / JMJ = M \right\}$ et $G = \left\{ M \in M_2(\mathbb{R}) / JMJ = -M \right\}$. Montrer que $F \oplus G = M_2(\mathbb{R})$.
3. Que peut-on en déduire sur la diagonalisabilité de S ?
4. Quelles sont les dimensions de F et de G ?

Exercice 36 (★★★☆☆)

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $M_z = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & z & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur $z \in \mathbb{C}$ pour que M_z soit diagonalisable.

Exercice 37 (★★★☆☆) Inspiré d'un oral Mines-Pont

On considère $z \in \mathbb{C}$ et $M_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & z \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur z pour que M_z soit diagonalisable.

Exercice 38 (★★★☆☆)

Soit $k \in \mathbb{C}$, on pose $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & k & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Quel est le rang de A ? En déduire que le polynôme caractéristique de A s'écrit $\chi_A(X) = X^2(X-\lambda)(X-\mu)$ pour $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$.
2. Montrer que λ et μ satisfont
$$\begin{cases} \lambda + \mu &= k \\ \lambda^2 + \mu^2 &= k^2 + 6 \end{cases}$$
En déduire les valeurs de λ et μ.
3. Donner une condition nécessaire et suffisante sur k pour que A soit diagonalisable.

Exercice 39 (★★★☆☆)

On considère une urne contenant 2 boules blanches et une boule rouge. On tire successivement des boules dans l'urne. Si on tire une boule blanche on la retire définitivement. Si on tire la boule rouge on la replace dans l'urne. On pose X_n le nombre de boules blanches au n-ème tirage. On pose $x_n = \mathbb{P}(X_n = 0)$, $y_n = \mathbb{P}(X_n = 1)$ et $z_n = \mathbb{P}(X_n = 2)$ et $U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \\ z_n \end{pmatrix}$. On pose $M = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$

1. Étude de M.
   (a) Montrer que M est diagonalisable et déterminer une base de chacun de ses espaces propres.
   (b) Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. (a) Déterminer une matrice A telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $U_{n+1} = AU_n$.
   (b) En déduire l'expression de U_n en fonction de n.
   (c) Que peut-on dire du comportement asymptotique de x_n, y_n et z_n ? Est-ce surprenant ?

Mots clés : *Réduction, Probabilité*

Exercice 40 (★★★☆☆) Inspiré de CCINP PSI 2023

Soient $a, b \in \mathbb{C}$ et
$$M(a,b) = \begin{pmatrix} b & a & a & \cdots & a \\ a & b & a & \cdots & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ a & \cdots & a & b & a \\ a & \cdots & a & a & b \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{C})$$

que l'on pourra écrire $M(a,b) = bI_n + aM(1,0)$. On notera $P_{a,b}$ son polynôme caractéristique.

1. Montrer que $P_{1,0} = (X-(n-1))(X+1)^n$ (indication : question faisable sans calcul).
2. On suppose dans cette question que $a \neq 0$. Montrer que $P_{a,b}(X) = a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right)$. En déduire l'ensemble des valeurs propres de $M_{a,b}$ ainsi que leur multiplicité.
3. On pose $Q_{a,b}(X) = (X-(b-a))(X-(b+(n-1)a)$. Montrer qu'il s'agit d'un polynôme annulateur de $M(a,b)$.
4. En déduire que $M(a,b)$ est diagonalisable pour tout $a, b \in \mathbb{C}$.
5. Déterminer le reste de la division euclidienne de X^k par $Q_{a,b}$. En déduire l'expression de $M(a,b)^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.

Mots clés : *Polynômes annulateurs*

Exercice 41 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Ponts

Soit $n \geq 2$. Calculer le déterminant et la trace de l'application

$$\Phi : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & A^T \end{array}$$

où A^T désigne la transposée de la matrice A.

Mots clés : *Version sans diago disponible*

Exercice 42 (★★★☆☆)

Soit $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. Étudier la diagonalisabilité de

$$f : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(A^T M)B + \mathrm{Tr}(B^T M)A. \end{array}$$

Indication : on pourra justifier que l'application $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^T N)$ définit un produit scalaire sur $M_n(\mathbb{R})$.

Mots clés : *Théorème spectral*

Exercice 43 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS 2021

Soit A, B deux matrices non colinéaires dans $M_n(\mathbb{R})$. Étudier la diagonalisabilité de

$$f : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & \mathrm{Tr}(B^T M)A - \mathrm{Tr}(A^T M)B. \end{array}$$

Mots clés : *Produit scalaire*

Exercice 44 (★★★★☆)

On dispose de $2n+1$ cailloux tels que quel que soit celui que l'on retire on peut diviser les $2n$ restants en deux paquets de n cailloux qui ont le même poids. Montrer que tous les cailloux ont le même poids.

Mots clés : *Réduction, anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$*

Exercice 45 (★★★★☆) Suites barypolygonales régulières

On considère un triangle T_0 du plan représenté par 3 points complexes a_0, b_0, c_0. On fixe $t \in]0,1[$ et on construit un triangle T_1 représenté par les 3 points a_1, b_1 et c_1 qui sont les t-barycentres respectifs de (a_0, b_0), (b_0, c_0) et (c_0, a_0). Plus généralement on construit une suite de triangles a_n, b_n, c_n tels que

$$\begin{cases} a_n &= ta_{n-1} + (1-t)b_{n-1} \\ b_n &= tb_{n-1} + (1-t)c_{n-1} \\ c_n &= tc_{n-1} + (1-t)a_{n-1} \end{cases}$$

1. Montrer que $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$ avec $M = \begin{pmatrix} t & 1-t & 0 \\ 0 & t & 1-t \\ 1-t & 0 & t \end{pmatrix}$.
2. On considère χ_M le polynôme caractéristique de M. Montrer que $\chi_M = (X-t)^3 - (1-t)^3$. En déduire que M a trois valeurs propres $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = t + j(1-t)$, $\lambda_3 = t + j^2(1-t)$ où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.
3. Montrer que les vecteurs $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ j \\ j^2 \end{pmatrix}$ et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ j^2 \\ j \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres associés aux valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3.
4. On pose P la matrice de changement de base de la base canonique vers (v_1, v_2, v_3) et $D = P^{-1}MP$. Montrer que $M^n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.
5. Conclure : vers quoi tend la suite de triangle T_n ? Cette limite dépend-elle de t ?

Exercice 46 (★★★★☆) Inspiré de X-ENS MP-MPI math A 2024

Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de l'ensemble $E_n = \{1, \dots, n\}$ et on note $\varepsilon(\sigma)$ la signature d'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$. On note aussi $\nu(\sigma)$ son nombre de point fixes, i.e. $\nu(\sigma) = \operatorname{Card}\left\{ i \in E_n \mid \sigma(i) = i \right\}$. On considère

$$M = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que M est diagonalisable. Calculer ses valeurs propres ainsi que leur multiplicité (*Indication : observez bien la matrice avant de vous lancer dans un calcul de déterminant, il n'est pas nécessaire de le calculer*).
2. En déduire l'égalité
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X^{\nu(\sigma)} = (X + n - 1)(X-1)^{n-1}.$$
3. Calculer les trois sommes suivantes :
$$\Sigma_1 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) \qquad \Sigma_2 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma)\nu(\sigma) \qquad \Sigma_3 = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \frac{\varepsilon(\sigma)}{\nu(\sigma)+1}.$$
4. On dit qu'une permutation σ n'ayant aucun point fixe est un *dérangement* et on note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$. Montrer que
$$\operatorname{Card}\left\{ \sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1 \right\} = \operatorname{Card}\left\{ \sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1 \right\} + (-1)^{n-1}(n-1)$$

Exercice 47 (★★★★★)

Soit p un nombre premier.

1. Déterminer $q = \text{Card}\left(\text{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\right)$.
2. Montrer que $\forall A \in M_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), A^{q+2} = A^2$.
3. On considère désormais $q = \text{Card}\left(\text{GL}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\right)$. A-t-on

$$\forall A \in M_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}), A^{q+3} = A^3 ?$$

Mots clés : *Réduction, Polynôme minimal, théorème de Lagrange, Cayley-Hamilton, anneaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, polynôme annulateur*

Exercice 48 (★★★★★)

On considère un groupe G fini d'ordre n et $\rho : G \longrightarrow \text{GL}_n(\mathbb{C})$ un morphisme de groupes.

1. Montrer que tout élément de l'image de ρ est diagonalisable.
   Indication : on pourra essayer de trouver un polynôme annulateur des éléments de l'image.
2. Montrer que si G est commutatif alors les éléments de $\text{im}\,\rho$ sont diagonalisables dans une base commune.

Mots clés : *Groupe fini, Réduction avec polynôme annulateur*

Exercice 49 (★★★★★) - Opérateur de Voltera

Soit $E = C^0([0,1], \mathbb{R})$ et V l'endomorphisme de E défini par $V(f)(x) = \int_0^x f(t)\,\text{dt}$. On munit E du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(t)g(t)\,\text{dt}\,.$$

1. Montrer que V est continu et qu'il ne possède pas de valeur propre.
2. Déterminer l'adjoint V^* de V et calculer $V^*(f)'$.
3. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $V \circ V^*$.

Mots clés : *Espaces préhilbertiens, continuité des applications linéaires*

Exercice 50 (★★★★★)

On considère $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q \rangle = \int_{-1}^1 P(x)Q(x)\,\text{dx}\,.$$

On définit l'endomorphisme

$$\begin{array}{rccl} u : & \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ & P & \longmapsto & \left[(1-X^2)P'\right]' = \frac{d}{dX}\left[(1-X^2)\frac{d}{dX}P\right]. \end{array}$$

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N}, u_n := u_{|\mathbb{R}_n[X]}$ définit un endomorphisme.
2. Montrer que u est un endomorphisme autoadjoint pour le produit scalaire $\langle \cdot\,,\,\cdot \rangle$.
3. Justifier que u_n est diagonalisable et que ses valeurs propres sont $-k(k+1)$ pour $0 \leq k \leq n$.
4. On pose $P_n(X) = \frac{d^n}{dX^n}\left[(X^2-1)^n\right] = \left((X^2-1)^n\right)^{(n)}$.
   (a) Montrer que P_n est orthogonal à $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (b) En déduire que $(P_k)_{0\leq k\leq n}$ est une base de vecteurs propres de u_n.

Mots clés : *Espaces préhilbertiens, réduction des endomorphismes autoadjoints*

Exercice 51 (★★★★☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ une matrice. On pose $C(A) = \left\{P^{-1}AP \mid P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\}$ sa classe de conjugaison. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si $C(A)$ est fermée.

Mots clés : *Polynôme minimal, polynômes annulateurs, Cayley-Hamilton*

Exercice 52 (★★★★★)

Soit $A \in M_2(\mathbb{R})$ une matrice. On pose $C(A) = \left\{P^{-1}AP \mid P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})\right\}$ sa classe de conjugaison. Montrer que A est diagonalisable si, et seulement si $C(A)$ est connexe par arcs.

Mots clés :*Réduction, connexité par arcs, théorème spectral (facultatif)*

2. *Espaces préhilbertiens réels*

Exercice 53 (★☆☆☆☆)

Montrer à l'aide d'un produit scalaire que pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a

$$|\cos(x) + \sin(x)| \leq \sqrt{2}.$$

Que peut-on dire lorsqu'il y a égalité ?

Exercice 54 (★★☆☆☆)

On munit $\mathbb{R}^{2n}$ de son produit scalaire canonique. On considère $J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & & \iddots & & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ la matrice $2n \times 2n$ composée de 1 sur l'antidiagonale.

1. Justifier que J est la matrice d'une symétrie orthogonale dont on précisera les éléments caractéristiques et déterminer une base orthonormée de vecteurs propres de J.
2. Déterminer la projection de $v = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ sur $\ker(J - I_n)$.

Exercice 55 (★★☆☆☆)

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$. Calculer la distance de X^2 à l'espace $F = \mathrm{Vect}(1, X)$.

Exercice 56 (★★☆☆☆)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme $||\cdot||_2$ issue du produit scalaire canonique (celui pour lequel la base canonique $(1, X, \dots, X^n)$ de $\mathbb{R}_n[X]$ forme une base orthonormée), i.e. $\left|\left|\sum_{k=0}^{n} c_k X^k\right|\right|_2 = \sqrt{\sum_{k=0}^{n} c_k^2}$. On pose pour tout $f \in E^*$,

$$|||f||| = \sup_{P\in E\setminus\{0\}} \frac{|f(P)|}{||x||_2}$$

la norme subordonnée induite par $||\cdot||_2$ .On considère $a \in \mathbb{R}$ et

$$f_a : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ P & \longmapsto & P(a) \end{array}$$

Montrer que $|||f_a||| = \sqrt{\frac{1-a^{2(n+1)}}{1-a^2}}$ pour $|a| \neq 1$ et $|||f_a||| = \sqrt{n+1}$ sinon.

Mot clés : *Norme subordonnée*

Exercice 57 (★★☆☆☆)

Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Justifier que M est la matrice d'une isométrie directe de $\mathbb{R}^3$ muni de sa structure euclidienne canonique.
2. Calculer M^3 et en déduire ses valeurs propres possibles.
3. Quel est son polynôme minimal ? La matrice M est-elle diagonalisable dans $M_3(\mathbb{R})$?
4. Déterminer les éléments caractéristiques de l'isométrie M (axe de rotation, plan stable et angle de rotation).

Mots clés : *Isométries de* $\mathbb{R}^3$

Exercice 58 (★★☆☆☆)

On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & i\,\overline{z} \end{array}$$

Montrer que f est une isométrie vectorielle du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ et la décrire.

Exercice 59 (★★★☆☆)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme quelconque et on munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée $|||\cdot|||$ induite par la norme euclidienne de E. Montrer que

$$|||f|||^2 = \max\left\{\lambda \in \mathrm{Spec}(f^* f)\right\}.$$

Mots clés : *Norme subordonnée, théorème spectral*

Exercice 60 (★★★☆☆)

On munit $\mathbb{R}^n$ de sa structure euclidienne canonique et on considère $A \in M_n(\mathbb{R})$. On note $S_n^+(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices symétriques positives, i.e. l'ensemble des matrices symétriques S vérifiant $\forall x \in \mathbb{R}^n, \langle Sx, x\rangle \geq 0$.

1. Montrer que $A^T A \in S_n^+(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ telle que $(Ae_1, \dots, Ae_n)$ est une famille orthogonale.
3. On suppose désormais que A est inversible. Montrer qu'il existe deux matrices $U, V \in O_n(\mathbb{R})$ et D diagonale à diagonale strictement positive telles que $A = UDV$.

Mot clés : *Théorème spectral*

Exercice 61 (★★★☆☆) - Décomposition QR

Soit $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$. On pose Montrer qu'il existe un unique couple (Q, R) avec $Q \in O_n(\mathbb{R})$ et R triangulaire à diagonale strictement positive telles que $A = QR$.
Indication : on pourra penser à l'orthonormalisation de Gram-Schmidt.

Exercice 62 (★★★☆☆)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et $u \in O(E)$ tel que

$$\forall x \in E, \langle u(x), x\rangle = 0.$$

1. Montrer que $\forall x, y \in E, \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle = 0$.
2. En déduire que $u^2 = -\mathrm{id}$ puis que E est de dimension paire $n = 2m$.
3. Montrer qu'il existe une décomposition orthogonale $P_1 \oplus \cdots \oplus P_m$ de E en somme d'espaces P_i de dimension 2 telle que $\forall i, u_{|P_i}$ est une rotation d'angle $\pm\dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 63 (★★★☆☆)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien.

1. Montrer que $f : E \to E$ est autoadjoint de rang 1 si et seulement si $\exists a \in E \setminus \{0\}, \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tel que $f(x) = \lambda \langle a, x\rangle a$.
2. On pose $a \in E \setminus \{0\}$ et f l'endomorphisme défini par

$$f(x) = x + \langle x, a\rangle a.$$

   Déterminer les espaces propres de f.

Mot clés : *Théorème spectral, réduction*

Exercice 64 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Centrale PC 2015

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien et f un endomorphisme orthogonal de E. On pose $g = f - \mathrm{id}_E$.

1. Montrer que $\mathrm{im}\, g = (\ker g)^\perp$.
2. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ on considère

$$p_n = \frac{1}{n}\left(\mathrm{id}_E + f + \cdots + f^n\right).$$

   Montrer que pour tout $x \in E$, $p_n(x)$ converge vers $p(x)$, le projeté orthogonal de x sur $\ker g$.

Exercice 65 (★★★☆☆)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien, H, K deux hyperplans de E et s_H et s_K les deux réflexions orthogonales associées à ces deux hyperplans. Montrer que s_H et s_K commutent si et seulement si $H = K$ ou $H^\perp \subset K$.

Exercice 66 (★★★☆☆)

On considère 3 droites vectorielles distinctes D_1, D_2 et D_3 du plan $\mathbb{R}^2$. Décrire les triangles ayant pour médiatrices ces trois droites.

Expliquer comment en construire un.

Mots clés : *Classification des isométries de* $\mathbb{R}^2$

Exercice 67 (★★★★☆)

Montrer qu'une isométrie f d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ de dimension finie n est la composée d'au plus n réflexions.

(Indication : On pourra procéder par récurrence. Pour l'hérédité on pourra fixer un point quelconque $x \in E \setminus \{0\}$ et traiter séparément d'abord le cas $f(x) = x$ et puis se ramener au premier cas lorsque $f(x) \neq x$).

Mots clés : *Réflexions, supplémentaire stable*

Exercice 68 (★★★★☆)

On munit $E = \mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique et on pose $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ une isométrie. On veut montrer par récurrence sur la dimension n qu'il existe des espaces $V, W, P_1, \ldots, P_r \subseteq E$ en somme directe orthogonale avec $\dim(P_i) = 2$ tels que $f_{|V} = \mathrm{id}_V$, $f_{|W} = -\mathrm{id}_W$ et $f_{|P_i}$ rotation.

1. Traiter les cas $n = 1$ et $n = 2$.
2. Soit $n \geq 3$. On suppose que le résultat qu'on souhaite montrer est vrai pour toute isométrie de $\mathbb{R}^k$ pour $k \leq n - 1$. Soit $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une isométrie.
   (a) Justifier qu'il suffit de trouver un espace $F \subseteq \mathbb{R}^n$ non trivial et stable par f pour conclure.
   (b) Traiter le cas où f a une valeur propre réelle.
   (c) On suppose que toutes les valeurs propres de f sont complexes et on en fixe une $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ ainsi qu'un vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n$ associé à λ.
      i. Montrer que $\overline{\lambda}$ est aussi une valeur propre de f et que $\overline{x}$ est un vecteur propre associé à $\overline{\lambda}$.
      ii. On pose $F = \mathrm{Vect}\left(\frac{x+\overline{x}}{2}, \frac{x-\overline{x}}{2i}\right)$. Montrer que F est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ stable par f.

Mots clés : *Classification des isométries de* $\mathbb{R}^2$

Exercice 69 (★★★★☆) Matrice de Gram

Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien [1] et $\mathcal{F} = (x_1, \ldots, x_p)$ une famille de vecteurs de E. On pose $\mathrm{Gram}(\mathcal{F}) = \left(\left\langle x_i, x_j \right\rangle\right)_{1\leq i,j\leq p} \in M_p(\mathbb{R})$, appelé *matrice de Gram* de la famille, et $G(\mathcal{F}) = \det(\mathrm{Gram}(\mathcal{F}))$ son *déterminant de Gram*.

1. (a) Montrer que $\mathcal{F}$ est libre si, et seulement si $G(\mathcal{F}) \neq 0$.
   (b) **(Application)**. Montrer que si E contient des vecteurs $(e_1, \ldots, e_{n+1})$ tous à même distance les uns des autres, i.e. $\forall i \neq j, \forall k \neq \ell, \left\|e_i - e_j\right\| = \|e_k - e_\ell\| \neq 0$ alors $\dim(E) \geq n$.
2. On suppose que $(x_1, \ldots, x_p)$ est libre.
   (a) Montrer que $\forall x \in E, d(x, \mathrm{Vect}(\mathcal{F}))^2 = \frac{\mathrm{G}(x,\mathcal{F})}{\mathrm{G}(\mathcal{F})}$.

---

1. On peut remplacer euclidien par préhilbertien si on veut.

(b) **(Application)**. On considère $\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Calculer $d(X^2, \mathrm{Vect}(1, X))$.

Exercice 70 (★★★★☆)

On pose $E = \mathbb{R}[X]$ et pour tout $P, Q \in E, \langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}P(x)Q(x)dx$.

1. Montrer que $\langle\ ,\ \rangle$ est bien défini et qu'il s'agit d'un produit scalaire.
2. Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} x^m e^{-x}dx$ pour tout $m \geq 0$.
3. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $E_n = \mathrm{Vect}(1, X, X^2, \dots, X^n) \subseteq E$ et $\mathcal{H}_n = \mathrm{Vect}(X, X^2, \dots, X^n)$. Pour tout $k \geq 1$ on pose $H_k(X) = \frac{1}{k!}(X+1)\cdots(X+k)$ et $H_0 = 1$ (appelés polynômes de Hilbert).
   (a) Montrer que $\mathcal{H}_n^\perp \cap E_n$ est un sous-espace vectoriel de E_n de dimension 1.
   (b) Montrer qu'il existe un unique $(b_k)_{0\leq k\leq n} \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que
   $$(X-1)\cdots(X-n) = \sum_{k=0}^{n} b_k H_k(X). \qquad (1)$$
   (c) On pose $g(X) = \sum_{k=0}^{n} \frac{b_k}{k!}X^k$. Montrer que $\mathcal{H}_n^\perp \cap E_n = \mathrm{Vect}(g)$.
   (d) Montrer que $\langle g, g\rangle = ||g||_2^2 = n!(n+1)!$.
   (e) Calculer $d(1, \mathcal{H}_n)$.

Mot clés : *Projection, intégrale impropre*

Exercice 71 (★★★★★) Groupe des isométries du tétraèdre

On considère $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit T un tétraèdre régulier, i.e. l'enveloppe convexe de 4 points A_1, A_2, A_3, A_4 tous à même distance deux à deux, on les appelle *sommets* du tétraèdre. On suppose que l'isobarycentre des A_i est $0 \in \mathbb{R}^3$. On considère $\mathrm{Isom}(T)$ l'ensemble des isométries préservant T, i.e.

$$\mathrm{Isom}(T) = \left\{ f \in O_3(\mathbb{R}) \mid f(T) = T \right\}.$$

On admet que 3 sommets quelconques forment toujours une base de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $A, B \in E$ distincts. Montrer que $\{M \in E, ||A - M|| = ||B - M||\} = \mathrm{Vect}(B - A)^\perp + \frac{1}{2}(A + B)$.
   (b) Montrer que les 4 sommets sont de même norme et qu'il s'agit des points de T de norme maximale.
2. Montrer que $\mathrm{Isom}(T)$ est un groupe.
3. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{Isom}(T)$ l'isométrie f induit une bijection de l'ensemble de S vers S avec $S = \left\{A_1, A_2, A_3, A_4\right\}$ l'ensemble des sommets.
4. On pose l'application
   $$\begin{array}{rccl} \varphi : & \mathrm{Isom}(T) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(S) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ & f & \longmapsto & f_{|S} \end{array}$$
   (a) Montrer que φ est un isomorphisme de groupes.
   (b) Montrer que $\forall f \in \mathrm{Isom}(T), \varepsilon(\varphi(f)) = \det(f)$ où ε est la signature d'une permutation.

Mot clés : *Groupes finis, isométries, convexité*

Exercice 72 (★★★★★) Groupe des isométries du tétraèdre

On considère $\left(\mathbb{R}^3, \langle\cdot,\cdot\rangle\right)$ l'espace $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Soit T un tétraèdre régulier, i.e. l'enveloppe convexe de 4 points A_1, A_2, A_3, A_4 tous à même distance deux à deux, on les appelle *sommets* du tétraèdre. On suppose que l'isobarycentre des A_i est $0 \in \mathbb{R}^3$. On considère $\mathrm{Isom}(T)$ l'ensemble des isométries préservant T, i.e.

$$\mathrm{Isom}(T) = \left\{ f \in O_3(\mathbb{R}) \mid f(T) = T \right\}.$$

On admet que 3 sommets quelconques forment toujours une base de $\mathbb{R}^3$.

1. (a) Soit $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ un espace euclidien et $A, B \in E$ distincts. Montrer que $\{M \in E, ||A - M|| = ||B - M||\} = \mathrm{Vect}(B - A)^{\perp} + \frac{1}{2}(A + B)$.
   (b) Montrer que les 4 sommets sont de même norme et qu'il s'agit des points de T de norme maximale.
2. Montrer que $\mathrm{Isom}(T)$ est un groupe.
3. Montrer que pour tout $f \in \mathrm{Isom}(T)$ l'isométrie f induit une bijection de l'ensemble de S vers S avec $S = \left\{A_1, A_2, A_3, A_4\right\}$ l'ensemble des sommets.
4. On pose l'application

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}(T) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(S) \simeq \mathfrak{S}_4 \\ f & \longmapsto & f_{|S} \end{array}$$

   (a) Montrer que φ est un isomorphisme de groupes.
   (b) Montrer que $\forall f \in \mathrm{Isom}(T), \varepsilon(\varphi(f)) = \det(f)$ où ε est la signature d'une permutation.

Mot clés : *Groupes finis, isométries, convexité*

3. *Groupes, anneaux et arithmétique*

Exercice 73 (★☆☆☆☆)

Soit A un anneau ayant pour seuls idéaux $\{0\}$ et A. Montrer que A est un corps.
Mots clés : *idéal*

Exercice 74 (★★☆☆☆)

Soit A un anneau intègre ayant un nombre fini d'idéaux. Montrer que A est un corps.
Mots clés : *idéal*

Exercice 75 (★★☆☆☆)

Soit A un sous-anneau d'un corps K tel que

$$\forall x \in K \setminus \{0\}, x \in A \text{ ou } x^{-1} \in A.$$

1. Montrer que $A = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \dfrac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z} \setminus p\mathbb{Z} \right\}$ vérifie cette propriété.

2. On pose I l'ensemble des éléments non inversibles de A. Montrer que I est un idéal de A.
3. Montrer que I est maximal pour l'inclusion parmi tous les idéaux.

Mots clés : *idéal*

Exercice 76 (★★☆☆☆)

Soit A un sous-anneau de $\mathbb{Q}$. Montrer que A est principal.
Mots clés : *idéal*

Exercice 77 (★★★☆☆) - Radical de Jacobson

Soit A un anneau. On dit qu'un idéal $\mathfrak{m} \subseteq A$ est maximal s'il s'agit d'un idéal propre, i.e. $\mathfrak{m} \neq A$ et $\mathfrak{m}$ est maximal pour l'inclusion, i.e. pour tout idéal I tel que $\mathfrak{m} \subseteq I \subseteq A$ alors $I = \mathfrak{m}$ ou $I = A$.

On pose $J = \left\{x \in A \mid \forall a \in A, 1 + ax \in A^\times\right\}$. Montrer qu'il s'agit d'un idéal puis qu'il est égal à l'intersection de tous les idéaux maximaux de A.

On admettra le Lemme de Krull qui affirme que tout idéal $I \neq A$ est inclus dans un idéal maximal.
Mots clés : *maximalité*

Exercice 78 (★★☆☆☆)

Quel est le chiffre des unités de $2024^{2024} + 2023^{2023}$?
Mots clés : *Théorème d'Euler*

Exercice 79 (★★★☆☆)

Calculer $21^{19} \mod 25$.
Mots clés : *Théorème d'Euler*

Exercice 80 (★★★☆☆)

Expliciter les n derniers chiffres de l'écriture décimale de 9^{10^n} pour $n \geq 1$.
Mots clés : *Théorème d'Euler*

Exercice 81 (★★★☆☆)

1. Soit n, m deux entiers premiers entre eux et φ l'isomorphisme du théorème des restes défini par

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \\ x & \longmapsto & (x \mod n, x \mod m). \end{array}$$

On considère $un + vm = 1$ une relation de Bézout. Montrer que

$$\psi : \begin{array}{ccc} \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z} \\ (a, b) & \longmapsto & vma + unb. \end{array}$$

est bien définie et est l'inverse de φ.

2. Résoudre $x^2 + x + 5 = 0$ dans l'anneau $\mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$.

Mots clés : *Théorème des restes*

Exercice 82 (★★★★★) - Une réciprocité quadratique modulo p^2

Soit p un nombre premier impair.

1. Montrer que l'équation $x^2 - 1 = 0$ a pour seules solutions -1 et 1 dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et que le polynôme $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$ a au plus $\dfrac{p-1}{2}$ racines dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. En déduire que l'équation $x^2 - 1 = 0$ a pour seules solutions -1 et 1 dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$.
3. Montrer que -1 est le carré d'un élément dans $\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ si et seulement si $p \equiv 1 \mod 4$.

Mots clés : *Morphisme canonique, théorème d'Euler*

Exercice 83 (★☆☆☆☆)

Soit G un groupe et $g \in G$ d'ordre n.

1. Montrer qu'il existe un unique morphisme de groupes $\varphi : \mathbb{Z} \to G$ tel que $\varphi(1) = g$. Montrer alors que φ induit un isomorphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \langle g \rangle$.
2. Soit p un nombre premier. Montrer que tout groupe G d'ordre p est isomorphe à $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Exercice 84 (★★☆☆☆)

Soit G un groupe et $g, h \in G$ des éléments d'ordres respectifs n et m tels que $gh = hg$.

1. On suppose que $\langle g \rangle \cap \langle h \rangle = \{1_G\}$. Montrer que gh est d'ordre $\mathrm{ppcm}(n, m)$.
2. Montrer que si $\mathrm{pgcd}(n, m) = 1$ alors gh est d'ordre mn.

Exercice 85 (★★☆☆☆) Un corps à 9 éléments

On considère le groupe $K = (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$. On notera ses éléments $(a, b) = a + ib$ et on définit un produit sur K par

$$(a + ib) \times (c + id) = ac - bd + i(ad + bc).$$

On admet que $(K, +, \times)$ est un anneau.

1. Donner toutes les solutions $(a, b) \in (\mathbb{Z}/3\mathbb{Z})^2$ de l'équation

$$a^2 + b^2 = 0.$$

2. Montrer que $(K, +, \times)$ est un corps.
   Indication : On pourra calculer $(a + ib) \times \left(\frac{a}{a^2+b^2} + i \frac{-b}{a^2+b^2} \right)$ *pour* $a + ib \neq 0$.
3. Montrer que le groupe $(K^\times, \times)$ est cyclique.

Mots clés : *Anneaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, corps*

Exercice 86 (★★★☆☆) Théorème de Cauchy pour $p = 2$

Montrer qu'un groupe fini G d'ordre pair possède un élément d'ordre 2.

Exercice 87 (★★★☆☆)

Soit G un groupe tel que pour tout $x \in G, x^2 = e$ où e est l'élément neutre de G.

1. Montrer que G est commutatif. On adoptera désormais une notation additive pour la loi de G.
2. On suppose que G est fini. Montrer qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $\#G = 2^n$ (on pourra essayer de munir G d'une structure d'espace vectoriel bien choisie).
3. Déterminer, à isomorphisme près, tous les groupes d'ordre 4.

Mots clés : *Anneaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*

Exercice 88 (★★★☆☆) Corps fini

Soit K un corps fini. On veut montrer que son cardinal est de la forme p^n avec p premier.

1. Montrer que pour tout anneau A il existe un unique morphisme d'anneaux
$$\gamma_A : \mathbb{Z} \longrightarrow A.$$
Son noyau est alors de la forme $\ker \gamma_A = m\mathbb{Z}$ pour $m \in \mathbb{N}$ et cet entier m est appelé *caractéristique* de A.
2. Justifier qu'un corps fini K est de caractéristique p un nombre premier.
3. Montrer qu'alors γ_K induit un morphisme d'anneaux injectif
$$\widetilde{\gamma}_K : \begin{array}{rcl} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} & \longrightarrow & K \\ \overline{k} & \longmapsto & \gamma_K(k). \end{array}$$
4. Conclure.
Indication : on pourra définir une structure d'espace vectoriel bien choisie sur K.

Mots clés : *Anneaux $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*

Exercice 89 (★★★☆☆)

Soit $n \geq 3$ un entier. On considère l'ensemble $\mu_n = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \mid 0 \leq k \leq n-1 \right\}$ des racines n-ème de l'unité dans $\mathbb{C}$ que l'on identifie avec $\mathbb{R}^2 = \{(x, y) \mid x, y \in \mathbb{R}\}$. On considère G l'ensemble des isométries f du plan telles que $f(\mu_n) \subseteq \mu_n$. On pose r la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ et s la symétrie orthogonale d'axe (Ox).

1. Rappeler la classification des isométries du plan en fonction de leur déterminant.
2. Montrer que r et s sont des éléments de G et déterminer leur ordre.
3. Décrire srs en fonction de r. Le groupe G est-il commutatif ?
4. Montrer que toute rotation $r' \in G$ est un élément de $\langle r \rangle$, le sous-groupe de G engendré par r.
5. Montrer que G est engendré par s et r.
6. Montrer que tout élément $f \in G$ admet une unique écriture $f = s^\epsilon r^k$ avec $\varepsilon \in \{0, 1\}$ et $k \in \{0, \ldots, n-1\}$.
7. En déduire que G est de cardinal $2n$.

(Le groupe G est un groupe très important dans l'étude des groupes finis, il s'appelle le groupe diédral d'ordre $2n$).

Mots clés : *Groupes finis, Isométries du plan*

Exercice 90 (★★★★☆)

Soit G un groupe fini de cardinal n. On pose $Z(G)$ l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les autres et pour tout $x \in G, C(x) = \left\{yxy^{-1} \mid y \in G\right\}$ appelé classe de conjugaison de x.

1. Montrer que $Z(G)$ est un sous-groupe de G et que $x \in Z(G) \Leftrightarrow C(x) = \{x\}$.
2. Montrer que la relation $x \sim y$ définie par $y \in C(x)$ est une relation d'équivalence.
3. On pose $x_1, \dots, x_r$ des représentants des classes non-triviale, i.e. tels que $\#C(x_i) \geq 2$. Montrer que
$$\#G = \#Z(G) + \sum_{i=1}^{r} \#C(x_i).$$
4. On souhaite montrer que pour tout élément $x \in G, \#C(x) \mid \#G$. On fixe $x \in G$.
   (a) Soit A une partie quelconque de G. Montrer que A et xA ont même cardinal.
   (b) On pose
$$\varphi : \begin{array}{rcl} G & \longrightarrow & C(x) \\ y & \longmapsto & yxy^{-1}. \end{array}$$
   Montrer que pour tout $y \in G, \varphi^{-1}(yxy^{-1}) = y\varphi^{-1}(x)$.
   (c) En déduire que $\#C(x) \mid \#G$.
5. Montrer qu'un groupe d'ordre p^n n'a jamais un centre réduit à son élément neutre.

Exercice 91 (★★★★★) Carré dans les corps finis

On considère K un corps qu'on suppose fini de cardinal q. On dit qu'un élément $y \in K$ est un carré lorsqu'il existe $x \in K$ tel que $y = x^2$. On pose $S_K = \left\{x^2 \mid x \in K^\times\right\}$ l'ensemble des carrés non nuls de K.

1. Montrer que l'application
$$\varphi : \begin{array}{rcl} K^\times & \longrightarrow & K^\times \\ x & \longmapsto & x^2 \end{array}$$
   est un morphisme de groupes.
2. On suppose que q est pair. Montrer que φ est injectif. En déduire que tous les éléments de K sont des carrés.
3. On suppose que q est impair.
   (a) Montrer que φ n'est pas injectif.
   (b) Justifier l'écriture $K^\times = \bigsqcup_{y \in S_K} \varphi^{-1}(\{y\})$. En déduire le cardinal de S_K.
   (c) Montrer que $x \in S_K \Leftrightarrow x^{\frac{q-1}{2}} = 1$.
   (d) Montrer que le produit de deux non carrés est un carré.

Mots clés : *Corps*

4. Dénombrabilité

Exercice 92 (★☆☆☆☆)

Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux sous-ensembles dénombrables. On pose

$$C = \{a + b \mid a \in A, b \in B\}.$$

Montrer que C est dénombrable.

Exercice 93 (★★☆☆☆)

On dit qu'un complexe z est un entier algébrique s'il est racine d'un polynôme unitaire $P \in \mathbb{Z}[X]$. Montrer que l'ensemble des entiers algébriques est dénombrable.

Exercice 94 (★★☆☆☆)

Étudier la sommabilité de la famille $\left(\frac{1}{(p+q+1)^\alpha}\right)_{p,q\in\mathbb{N}}$ en fonction du paramètre α.

Exercice 95 (★★☆☆☆)

Les espaces vectoriels suivants admettent-ils une base dénombrable ?

- $\mathbb{R}[X]$
- $\mathbb{R}(X)$

Exercice 96 (★★☆☆☆)

Soient $A, B \subseteq \mathbb{R}$ deux sous-ensembles dénombrables. On pose

$$C = \{P(a, b) \mid a \in A, b \in B, P \in \mathbb{Q}[X, Y]\}.$$

Montrer que C est dénombrable.

Exercice 97 (★★★★☆)

Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, l'ensemble des parties de $\mathbb{N}$, n'est pas dénombrable.

Exercice 98 (★★★★☆)

Soit G un groupe commutatif ayant un nombre au plus dénombrable de générateurs.

1. Montrer que G est dénombrable.
2. Est-ce toujours vrai si on enlève l'hypothèse de commutativité ?

Mots clés : *Groupes*

Exercice 99 (★★★★★)

On considère $M_n(\mathbb{C})$ muni d'une norme $||\cdot||$. On considère une famille $\left(B(M_j, r_j)\right)_{j\in J}$ de boules ouvertes de rayon strictement positif et toutes disjointes deux à deux.
Montrer que J est dénombrable.

Mots clés : *Densité*

Exercice 100 (★★★★★)

Soit F un ensemble, $E \subseteq F$ un sous-ensemble infini et $D \subseteq F$ un sous-ensemble dénombrable. Montrer qu'il existe une bijection

$$E \cup D \simeq E.$$

5. Topologie des espaces vectoriels normés

Exercice 101 (★☆☆☆☆)

Comparer les normes $||\cdot||_1$ et $||\cdot||_\infty$ sur $C([0;1],\mathbb{R})$.

Exercice 102 (★☆☆☆☆)

On considère $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$. Calculer $\exp(A)$.

Indication : on pourra se servir de la décomposition $A = 4I + N$ *avec* $N = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.

Mots clés : *exponentielle de matrice*

Exercice 103 (★☆☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie. Calculer $\exp(f)$ en fonction de f.

Mots clés : *exponentielle d'endomorphisme*

Exercice 104 (★☆☆☆☆)

Soit A une partie d'un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$. Montrer que $\overline{A}$ est le plus petit fermé contenant A.

Exercice 105 (★★☆☆☆)

On dit qu'un point x d'une partie A de $\mathbb{R}^2$ est isolé s'il existe $r > 0$ tel que $B_f(x,r) \cap A = \{x\}$. Soit A une partie de $\mathbb{R}^2$ dont tous les points sont isolés. Montrer que A est compact si et seulement si A est fini.

Mots clés : *Compacité*

Exercice 106 (★★☆☆☆)

Soit $(E, ||\cdot||)$ un $\mathbb{K}$-espace vectoriel normé et H un hyperplan de E. Donner le nombre de composantes connexes par arcs de $E \setminus H$. On distinguera les cas $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Mots clés : *Connexité par arcs*

Exercice 107 (★★☆☆☆)

Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une application continue telle que $\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$. Montrer que f est $\mathbb{R}$-linéaire. Est-ce toujours vrai si on enlève l'hypothèse f continue ?

Mots clés : *Densité*

Exercice 108 (★★☆☆☆)

Soit $(A, ||\cdot||)$ une algèbre normée de dimension finie sur $\mathbb{K}$. Montrer que $A^\times$ est une partie ouverte de A.

Mots clés : *Norme d'algèbre*

Exercice 109 (★★☆☆☆)

Soit $E = \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et $F \subseteq E$ un sous-espace vectoriel tel que $||f|| = \sup\limits_{t \in [0;1]} |f(t)|$ est une norme sur F.

1. Donner un exemple de tel espace F de dimension infinie.
2. Montrer qu'alors l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} F & \longrightarrow & \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \\ f & \longmapsto & f_{|[0,1]} \end{array}$ est injective.
3. Donner un exemple de F tel que φ est surjective.

Exercice 110 (★★☆☆☆)

Soit A une algèbre unitaire sur $\mathbb{C}$. On suppose que A est munie d'une norme d'algèbre $||\ ||$, i.e. $\forall x, y \in A, ||xy|| \leq ||x||\,||y||$. On suppose qu'il existe $x \in A$ tel que $\forall \lambda \in \mathbb{C}, x - \lambda \cdot 1_A$ inversible.

1. Justifier que l'application
$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & A \\ \lambda & \longmapsto & \frac{1}{x - \lambda 1_A} \end{array}$$
est continue.
2. Montrer que $||f(\mathbb{C})||$ est un compact.

Mots clés : *Norme d'algèbre*

Exercice 111 (★★☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel normé.

1. Soit $(K_i)_{i \in I}$ des parties compactes de E. Montrer que $\bigcap_{i \in I} K_i$ est une partie compacte de E.
2. On suppose que $I = \mathbb{N}$, que $K_{n+1} \subseteq K_n$ et que $\forall n, \exists r_n > 0, x_n \in E$ tel que $K_n \subseteq B_f(x_n, r_n)$ avec $r_n \longrightarrow 0$. Montrer qu'il existe $x \in E$ tel que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} K_n = \{x\}$.

Mots clés : *Compacité*

Exercice 112 (★★☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie de dimension n et K une partie compacte de E. On pose

$$\mathrm{Conv}(K) = \left\{ \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1} x_{n+1}, (x_i) \in K^{n+1}, (\lambda_i) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1} \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1 \right\}$$

appelé *enveloppe convexe* de K.

1. On pose $H = \left\{ (\lambda_i) \in (\mathbb{R}^+)^{n+1} \mid \lambda_1 + \cdots + \lambda_{n+1} = 1 \right\}$. Montrer que H est un compact.
2. En déduire que $\mathrm{Conv}(K)$ est un convexe de E.

Mots clés : *Compacité*

Exercice 113 (★★☆☆☆)

Soit $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$ et

$$\Phi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & f(1). \end{array}$$

1. Déterminer si Φ est continue lorsque E est muni de $||\cdot||_\infty$. Si c'est le cas déterminer sa norme subordonnée.
2. Déterminer si Φ est continue lorsque E est muni de $||\cdot||_1$. Si c'est le cas déterminer sa norme subordonnée.

Mots clés : *Applications linéaires continues*

Exercice 114 (★★☆☆☆)

On considère la dérivation sur $\mathbb{R}[X]$

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \longmapsto & P'. \end{array}$$

1. Déterminer si Φ est continue lorsque $\mathbb{R}[X]$ est muni de $||\cdot||_\infty$ (le sup des valeurs absolues des coefficients). Même question pour $||\cdot||_1$ (la somme des valeurs absolues des coefficients). Si oui calculer sa norme subordonnée.
2. Montrer que l'application définie par
$$||P|| = \sum_{k=0}^{+\infty} \left| P^{(k)}(0) \right|.$$
est une norme sur $\mathbb{R}[X]$. Est-ce que Φ est continue pour cette norme ? Si oui calculer sa norme subordonnée.

Mots clés : *Applications linéaires continues*

Exercice 115 (★★★☆☆)

On considère $E = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, $\Phi \in E$ et

$$T_\Phi : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \Phi(t) f(t)\, \mathrm{d}t\,. \end{array}$$

1. L'application T_Φ est-elle continue pour la norme $||\cdot||_\infty$? Pour $||\cdot||_1$? Pour $||\cdot||_2$?
2. Déterminer la norme subordonnée de T_Φ pour la norme $||\cdot||_1$.

Mots clés : *Lispschitziannité des applications linéaires, convergence dominée*

Exercice 116 (★★★☆☆)

Soit H un hyperplan d'un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$. Montrer que H est soit fermé soit dense dans E.
Mots clés : *Densité*

Exercice 117 (★★★☆☆)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ un espace euclidien. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme quelconque et on munit $\mathcal{L}(E)$ de la norme subordonnée $|||\cdot|||$ induite par la norme euclidienne de E. Montrer que

$$|||f|||^2 = \max\left\{\lambda \in \mathrm{Spec}(f^* f)\right\}.$$

Mots clés : *Norme subordonnée, théorème spectral*

Exercice 118 (★★☆☆☆)

Soit $A \in M_d(\mathbb{R})$ une matrice quelconque. On suppose que A^n converge vers une matrice B. Montrer que B est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres possibles.

Mots clés : *Espace vectoriel normé, polynôme annulateur*

Exercice 119 (★★☆☆☆)

Montrer que l'ensemble des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{K})$ est connexe par arc. Est-il convexe ?

Mots clés : *Espace vectoriel normé, convexité*

Exercice 120 (★★☆☆☆)

On considère $E = \left\{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\geq 0} u_n \text{ converge}\right\}$, i.e. l'ensemble des séries convergentes à valeurs réelles.

1. Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$. Justifier que $||u||_\infty = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left|u_n\right|$ et $||u|| = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \left|\sum_{k\leq n} u_k\right|$ définissent des normes sur E.
2. Comparer les deux normes définies dans la question précédente.

Exercice 121 (★★☆☆☆)

Soient X, Y des parties d'espaces vectoriels normés de dimensions finies. On rappelle qu'un *homéomorphisme* $f : X \to Y$ est une application continue bijective et d'inverse continue.

Soit $f : X \to Y$ continue et bijective. On suppose que X est compact. Montrer que f est un homéomorphisme.

Mots clés : *Compacité*

Exercice 122 (★★★☆☆)

Soit E un espace vectoriel normé et A et B deux parties de E. On dit que A et B sont homéomorphes si, et seulement s'il existe $f : A \to B$ continue bijective d'inverse continue.

1. Montrer que si $f : A \to B$ est un homéomorphisme alors pour tout $x \in A$, $f : A \setminus \{x\} \to B \setminus \{f(x)\}$ est bien définie et, est un homéomorphisme.
2. Montrer que $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ ne sont pas homéomorphes.
3. Montrer que S^1, le cercle unité dans $\mathbb{R}^2$ n'est pas homéomorphe à $[0; 1]$.

On peut généraliser la question 2 à toute dimension : $\mathbb{R}^n$ est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ si, et seulement si $n = m$. Il s'agit du théorème d'invariance du domaine (très difficile).

Mots clés : *Connexité par arc*

Exercice 123 (★★★★☆)

On considère $E = \mathbb{R}[X]$ et les applications définies pour tout $P(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} a_k X^k$ par

$$||P||_\infty = \sup_{x\in\left[0,\frac{1}{2}\right]} |P(x)| \text{ et } ||P|| = \left|\sum_{k=0}^{+\infty} a_k\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{|a_k|}{k}.$$

1. Montrer qu'il s'agit de normes sur E.
2. Comparez-les.

Exercice 124 (★★★★☆)

Soit $f : (E, ||\cdot||_E) \longrightarrow (F, ||\cdot||_F)$ une application linéaire entre $\mathbb{K}$-espaces vectoriels normés.

1. Montrer que f est continue en 0 si et seulement si

$$\exists C > 0, \forall x \in E, ||f(x)||_F \leq C\,||x||_E$$

(i.e. f est lipschitzienne en 0).

2. Montrer que f est continue en 0 si et seulement si elle est continue en tout point de E.
3. On suppose que $E = F$ et on définit $\mathcal{L}_c(E)$ l'ensemble des endomorphismes continus de E et

$$|||f||| = \sup_{x\in E\setminus\{0\}} \frac{||f(x)||_E}{||x||_E}.$$

Montrer que $|||\cdot|||$ définit une norme sous-multiplicative sur $\mathcal{L}_c(E)$.

4. Montrer que si E est de dimension finie toute application linéaire $f : E \to F$ est continue.

Mots clés : *Applications linéaires continues, exercice de cours*

Exercice 125 (★★★★☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$. On définit $\mathbb{C}[A] = \{P(A), P \in \mathbb{C}[X]\}$ et $\mathbb{C}[A]^\times = \left\{P(A) \in C[A] \mid P(A) \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})\right\} = C[A] \cap \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$.

1. Montrer que $C[A]$ est un espace vectoriel de dimension finie d où d est le degré du polynôme minimal de A.
2. Montrer que l'exponentielle définit un morphisme de groupes

$$\begin{array}{rrcl} \exp : & \mathbb{C}[A] & \longrightarrow & \mathbb{C}[A]^\times \\ & P(A) & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} P(A)^n. \end{array}$$

Mots clés : *Norme d'algèbre*

Exercice 126 (★★★★☆) Inégalité de Hardy

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue de carré intégrable. On pose $||f||_2 = \sqrt{\int_0^\infty f^2(t)dt}$. On pose F, la moyenne de f, définie par $F(x) = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)dt$. On veut montrer l'inégalité de Hardy :

$$||F||_2 \leq 2\,||f||_2\,.$$

1. Justifier qu'on a alors l'équation fonctionnelle

$$\forall x \in \mathbb{R}^+, xF'(x) = -F(x) + f(x).$$

2. On suppose dans un premier temps que f est positive.
   (a) Montrer que pour tout $X \geq 0$ on a

$$\int_0^X F^2(x)dx = \int_0^X f(x)F(x)dx - \int_0^X xF'(x)F(x)dx.$$

   (b) Justifier que $\int_0^X f(x)F(x)dx \leq \sqrt{\int_0^X f(x)^2 dx}\sqrt{\int_0^X F(x)^2 dx}$.
   (c) Majorer $-\int_0^X xF'(x)F(x)dx$ en fonction de $\int_0^X F(x)^2 dx$ à l'aide d'une intégration par partie.
   (d) Conclure que F est aussi de carré intégrable et en déduire l'inégalité de Hardy dans le cas f positive.
3. Traiter le cas général.

Mots clés : *Intégrales impropres*

Exercice 127 (★★★★☆)

On considère $E = \mathcal{C}([0;1],\mathbb{R})$ et $||\cdot||_\infty$ la norme infinie sur E. Soit $g \in E$ fixée. On pose $N_g(f) = ||gf||_\infty$.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur g pour que N soit une norme.
2. On suppose cette condition vérifiée. Donner alors une condition nécessaire et suffisante pour que N et $||\cdot||_\infty$ soient équivalentes.

Exercice 128 (★★★★☆)

On pose $E = C^1([-1;1],\mathbb{R})$ muni de la norme $||\cdot||_\infty$ et $n \geq 1$ un entier. On pose

- $A = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_{-1}^1 P(t)dt = 1 \right\}$
- $B = \left\{ P \in \mathbb{R}_n[X] \mid \int_{-1}^1 P(t)dt = 1 \text{ et } \forall t \in [-1;1], \left|P'(t)\right| \leq 1 \right\}$

1. Les parties A et B sont-elles fermées dans E ?
2. Les parties A et B sont-elles compactes dans E ?
3. Reprendre les deux questions précédentes en remplaçant $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$ dans les définitions de A et B.

Mots clés : *Caractérisation des applications linéaires continues par lipschitziannité*

Exercice 129 (★★★★★) - Réciproque à l'équivalence des normes

Vous avez vu en cours qu'en dimension finie toutes les normes sont équivalentes. L'objectif de cet exercice est de prouver la réciproque, i.e. si toutes les normes d'un espace vectoriel sont équivalentes alors ce dernier est de dimension finie.

Soit E un espace vectoriel dont toutes les normes sont équivalentes. On pose E^* son dual, i.e. l'ensemble des formes linéaires sur E. Soit $||\cdot||$ une norme définie sur E.

1. Soit $\ell \in E^*$, montrer que l'application définie par $||x||_\ell = ||x|| + |\ell(x)|$ est une norme sur E.
2. En déduire que toutes les formes linéaires sur E sont continues.
3. Conclure.
   Indication : On « admettra »que tout espace vectoriel admet une base.

Mots clés : *Caractérisation de la continuité des applications linéaires par lipschitziannité, hors-programme (base d'espace vectoriel quelconque)*

Exercice 130 (★★★★☆)

Soit $(s_n) \in [0;1]^{\mathbb{N}}$ une suite injective et $\sum a_n$ une série convergente à termes > 0. On pose $E = C([0;1], \mathbb{R})$ et $\forall f \in E, N(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} |f(s_n)|\, a_n$.

1. Montrer que N est bien définie et qu'il s'agit d'une semie-norme (i.e. l'application est homogène et sous-additive (inégalité triangulaire) mais l'axiome de séparation n'est pas forcément vérifié).
2. Donner une condition nécessaire et suffisante sur (s_n) pour que N soit une norme.
3. On suppose cette condition vérifiée. Comparer alors N avec $||\cdot||_\infty$.

Mots clés : *Densité*

Exercice 131 (★★★★★)

On considère deux convexes compacts C et C' dans $\mathbb{R}^n$. On suppose qu'il contiennent chacun une boule ouverte centrée en 0. On veut montrer que leurs frontières ∂C et $\partial C'$ sont homéomorphes, i.e. qu'il existe une bijection continue d'inverse continue allant de l'une vers l'autre.
Il est vivement recommandé d'accompagner son raisonnement de dessins dans $\mathbb{R}^2$ pour y voir plus clair.

1. Soit $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ et on pose $[0x) = \{\lambda x \mid \lambda \geq 0\}$ la demie-droite vectorielle passant par x.
   (a) Montrer qu'il existe $y \in C$ tel que $[0x) \cap C = [0y]$.
   (b) Montrer que $[0x) \cap \mathring{C} \subseteq [0y[$. En déduire que $y \in \partial C$.
   (c) On veut montrer que $[0x) \cap \partial C = \{y\}$.
      i. Soit $r > 0$ tel que $\mathring{\mathbb{B}}(0,r) \subseteq C$ et $z \in [0y[$. Soit $b \in \mathring{\mathbb{B}}\left(z, r\frac{||y-z||}{||y||}\right)$. Montrer que $a = y + \frac{||y||}{||y-z||}(b-y) \in \mathring{\mathbb{B}}(0,r)$.
      ii. En déduire que $\mathring{\mathbb{B}}\left(z, r\frac{||y-z||}{||y||}\right) \subseteq C$ puis que $[0x) \cap \partial C = \{y\}$. On note alors $y = \partial_C(x)$.
2. Montrer que l'application
$$f: \begin{array}{rcl} \partial C & \longrightarrow & \partial C' \\ x & \longmapsto & \partial_{C'}(x) \end{array}$$
   est une bijection.
3. On suppose que $C' = \mathbb{B}^n(0,1)$. Montrer que f est continue.
4. Montrer que f^{-1} est continue (on pourra montrer que la préimage par f^{-1} d'un fermé de ∂C est un fermé).
5. Conclure.

(On pourrait sans plus de difficulté montrer qu'en fait C et C' sont homéomorphes, i.e. que tous les compacts convexes contenant une boule ouverte d'un espace vectoriel normé de dimension finie sont homéomorphes. Cela dit l'exercice est déjà bien assez long comme ça).

Mots clés : *Compacité, convexité*

Exercice 132 (★★★★☆)

On considère $\mathbb{R}^n$ muni de la norme $\left\|(x_1, \dots, x_n)\right\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|$. On munit $M_n(\mathbb{R})$ de la norme subordonnée $|||A|||$ en identifiant une matrice A à l'endomorphisme induit par A
$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^n & \longrightarrow & \mathbb{R}^n \\ X & \longmapsto & AX. \end{array}$$

1. Soit $A = (a_{ij}) \in M_n(\mathbb{R})$. Exprimer $|||A|||$ en fonction des a_{ij} et donner une interprétation du résultat en terme des lignes ou des colonnes de A.

2. On pose

$$T: \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & {}^{\mathrm{t}}A. \end{array}$$

   (a) Montrer que la norme subordonnée de T est inférieure ou égale à n.
   (b) Calculer la norme subordonnée de T.

   Mots clés : *Norme subordonnée*

Exercice 133 (★★★★☆) Théorème de l'application ouverte

Soient E et F des espaces vectoriels de dimension finie. On dit qu'une application $f: E \to F$ est *ouverte* lorsqu'elle envoie des ouverts de E sur des ouverts de F. On veut démontrer le théorème de l'application ouverte qui s'énonce ainsi [2]

Théorème : Soit $f: E \longrightarrow F$ une application linéaire entre espaces vectoriels de dimension finie. Alors f est surjective si, et seulement si elle est ouverte.

1. Dans cette question on considère le cas particulier où $F \subseteq E$ et $\pi: E \to F$ est une projection.
   (a) Soit U un ouvert de E. Montrer que $\pi(U) = (U + \ker \pi) \cap F$.
   (b) En déduire que π est ouverte.
2. Prouver le sens direct du théorème de l'application ouverte.
3. Montrer le sens réciproque.

   Mots clés : *Continuité des applications linéaires en dimension finie*

Exercice 134 (★★★★★) - Théorème de représentation de Riesz

On définit $\ell^2(\mathbb{N})$ l'ensemble des suites réelles (a_n) telles que $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2 < +\infty$. On munit alors $\ell^2(\mathbb{N})$ de la norme définie par $||a|| = \sqrt{\sum_{n=0}^{+\infty} a_n^2}$. Enfin, on pose $\ell^2(\mathbb{N})'$ l'ensemble des formes linéaires continues de $\ell^2(\mathbb{N})$ que l'on munit de la norme subordonnée.

1. Montrer l'inégalité de Cauchy-Schwartz

$$\forall a, b \in \ell^2(\mathbb{N}), \sum_{n\geq 0} a_n b_n \text{ converge et } \left|\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n\right| \leq ||a||\,||b||\,.$$

2. Soit

$$\Phi: \begin{array}{ccc} \ell^2(\mathbb{N}) & \longrightarrow & \ell^2(\mathbb{N})' \\ a & \longmapsto & \left(\gamma_a: b \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n\right). \end{array}$$

   Démontrer que Φ est un isomorphisme continu (il s'agit théorème de représentation de Riesz qui est souvent formulé uniquement en affirmant que l'application est surjective).

   Mots clés : *Applications linéaires continues*

---

2. Il existe une version de ce théorème pour les espaces dits *de Banach* qui sont potentiellement de dimension infinie mais l'étude de ces espace n'est plus au programme.

Exercice 135 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS

Soit $(E, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé de dimension finie et K un compact non vide de E.

1. Montrer qu'il existe une boule fermée de rayon minimal contenant K.
2. Montrer que si $||\cdot||$ est issue d'un produit scalaire alors cette boule est unique (faire un dessin).

Mots clés : *Compacité, produit scalaire*

6. Suites et séries de fonctions

Exercice 136 (★☆☆☆☆)

La suite de fonction

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{nx}{1+n^2x} \end{array}$$

converge-t-elle simplement ? Uniformément ?

Exercice 137 (★☆☆☆☆)

La suite de fonction

$$f_n : \begin{array}{rcl}]1;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \frac{1}{\ln(nx)} \end{array}$$

converge-t-elle simplement ? Uniformément ?

Exercice 138 (★☆☆☆☆)

La suite de fonctions $f_n(x) = \frac{x}{1+\frac{x^2}{n^2}}$ converge-t-elle simplement ? Uniformément ? Uniformément sur tout segment ?

Exercice 139 (★★☆☆☆)

La suite de fonction

$$f_n : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longrightarrow & \sqrt{\frac{1}{n} + x^2} \end{array}$$

converge-t-elle simplement ? Uniformément ? La suite de ses dérivées converge-t-elle uniformément (sans calcul) ?

Exercice 140 (★★★☆☆)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. On considère la suite de fonctions

$$f_n : \begin{array}{rcl} \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & n^\alpha \cos(x)^n \sin(x) \end{array}$$

définie pour $n \in \mathbb{N}^*$. Donner une condition nécessaire et suffisante sur α pour que (f_n) converge uniformément.

Exercice 141 (★★★☆☆)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue par morceaux telle que $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$. Calculer

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^1 f(nx)dx.$$

Exercice 142 (★★★☆☆)

On considère la fonction

$$f : \begin{array}{rcl}]1, +\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie sur son ensemble de définition.
2. Calculer $\lim_{x \to +\infty} f(x)$ et $\lim_{x \to 1^+} f(x)$.
3. Montrer que f est de classe C^1 et donner les variations de f. Étudier sa convexité.
4. Esquissez le graphe de f.

Mots clés : *Continuité sous le symbole somme*

Exercice 143 (★★★☆☆)

Soit (a_n) une suite réelle croissante, à valeurs strictement positive et telle que $a_n \to +\infty$.
On considère

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} e^{-a_n t}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est intégrable et que
$$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{a_n}.$$
3. Calculer $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

Mots clés : *Continuité sous le symbole somme, convergence dominée*

Exercice 144 (★★★★☆)

On pose

$$f: \begin{array}{ccl}]-1,1[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n \sin(nx)}{n}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe C^1.
2. Calculer $f'(x)$ et en déduire que

$$f(x) = \operatorname{Arctan}\left(\frac{x\sin(x)}{1 - x\cos(x)}\right).$$

Mots clés : *Dérivation sous le signe somme*

Exercice 145 (★★★★☆) - Méthode de Cavalieri

On considère $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente à termes positifs. On pose

$$f: \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \operatorname{Card}\left\{n \in \mathbb{N} \mid u_n > t\right\}. \end{array}$$

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \int_0^{+\infty} f(t)dt.$$

Mots clés : *Inversion série intégrale*

Exercice 146 (★★★★☆)

Soit $b > 0$ et f_0 une fonction définie sur le segment $[0, b]$. On pose $\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in [0, b], f_{n+1}(x) = \displaystyle\int_0^x f_n(t)dt$.

1. Étudier la convergence de $\sum_{n\geq 1} f_n$.
2. Montrer que la somme $S(x) = \sum_{n\geq 1} f_n(x)$ est solution d'un problème de Cauchy.
3. Calculer la somme lorsque $b = 1$ et f_0 est le prolongement par continuité de $x \mapsto x\ln(x)e^x$.

Mots clés : *Dérivation sous le signe somme, équation différentielle*

Exercice 147 (★★★★★)

On pose

$$f: \begin{array}{ccl}]-1,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \ln\left(1 + \frac{x}{n}\right). \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et qu'elle est de classe C^1.
2. Montrer que $\forall x \in]-1, +\infty[\,, f'(x) = -\displaystyle\int_0^1 \frac{t^x}{1+t}dt$.
3. Trouver un équivalent simple de f en -1 et montrer que $f(x) \underset{x\to+\infty}{\sim} \dfrac{-\ln(x)}{2}$.
   Indication : Pour l'équivalent en $+\infty$ on pourra commencer par faire une intégration par partie de l'expression de $f'(x)$ trouvée dans la question précédente.

Mots clés : *Dérivation sous le signe somme*

Exercice 148 (★★★☆☆)

On pose

$$f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right). \end{array}$$

Montrer que f est bien définie et donner un équivalent simple de f lorsque $x \to +\infty$.
On donne $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$.

Mots clés : *Dérivation sous le signe somme*

Exercice 149 (★★★★★)

On pose

$$f : \begin{array}{rcl}]0,+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et continue.
2. Montrer que $\forall x \in]0,+\infty[\,, f(x) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^x} dt$. Montrer que
$$f(x) = 1 - \frac{\ln(2)}{x} + \underset{x\to+\infty}{o}\left(\frac{1}{x}\right).$$
3. En déduire les valeurs des sommes
$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{i^n}{n+1} \text{ et } S_2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{3n+1}.$$

Exercice 150 (★☆☆☆☆)

Soit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n$ et $\sum_{n\geq 0} b_n x^n$ deux séries entières de rayons de convergence respectifs R_1 et R_2.

1. Montrer que $\sum_{n\geq 0} \left(a_n + b_n\right) x^n$ a un rayon de convergence $R \geq \min\left(R_1, R_2\right)$ avec égalité si $R_1 \neq R_2$.
2. Montrer que $\sum_{n\geq 0} a_n b_n x^n$ a un rayon de convergence $R \geq R_1 R_2$.

Mots clés : *Série entière*

Exercice 151 (★★☆☆☆)

Montrer à l'aide de la définition $e^z = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$ que $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$.

Mots clés : *Série entière*

Exercice 152 (★★★☆☆)

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = 2\ln(2) - 1.$$

Mots clés : *Théorème d'Abel radial*

Exercice 153 (★★★☆☆)

Montrer que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \frac{\pi}{4} - \frac{\ln(2)}{2}.$$

Mots clés : *Théorème d'Abel radial*

Exercice 154 (★★★☆☆)

On pose

$$f: \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x > 0 & \longmapsto & \exp\left(-\frac{1}{x}\right) \\ x \leq 0 & \longmapsto & 0 \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe C^∞.
2. La fonction f est-elle développable en série entière en 0 ?

Mots clés : *Série entière*

Exercice 155 (★★★☆☆)

Soit $n \geq 1$ et $I_n = \int_1^{+\infty} e^{-t^n} dt$.

1. Après avoir justifié que I_n existe pour tout $n \geq 1$ montrer que $\lim_{n\to\infty} I_n = 0$.
2. À l'aide du changement de variable $u = t^n$ donner un équivalent de I_n en $+\infty$ (on ne cherchera pas à calculer $\int_1^{+\infty} \frac{e^{-u}}{u} du$).
3. Déterminer le rayon de convergence de $\sum_{n\geq 1} I_n z^n$.

Mots clés : *Série entière, intégrale impropre*

Exercice 156 (★★★☆☆)

On considère la suite définie[3] par $u_0 = 0$ et pour tout $n \geq 1, u_{n+1} = 2u_n + 2^n$. On souhaite déterminer l'expression de u_n en fonction de n pour tout n. On pose $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 0, u_n \leq 3^n$. En déduire que f est bien définie sur un intervalle non trivial $]-R; R[$.
2. À l'aide de la relation de récurrence montrer que

$$\forall -R < x < R, f(x) = \frac{x}{(1-2x)^2}.$$

3. En déduire l'expression de u_n en fonction de n pour tout $n \geq 0$.

Mots clés : *Série entière, combinatoire*

3. Il s'agit d'une suite qui intervient dans des problèmes de répartition des carrés dans les corps finis.

Exercice 157 (★★★☆☆)

Soit $S(x) = \sum_{n\geq 0} u_n x^n$ une série entière de rayon de convergence 1.

1. Déterminer une série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n$ de rayon de convergence 1 telle que $\lim_{x\to 1} S(x)$ existe et telle que $\sum_{n\geq 0} u_n$ ne converge pas.
2. On suppose désormais que $\forall n \in \mathbb{N}, u_n \geq 0$ et que $\lim_{x\to 1} S(x) = \ell$. On veut montrer que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n = \ell$.
   (a) Montrer que $x \longmapsto S(x)$ est croissante sur $[0, 1[$.
   (b) Montrer que $\forall N \in \mathbb{N}, \sum_{n=0}^{N} u_n \leq \ell$.
   (c) En déduire que $\sum_{n\geq 0} u_n$ converge et que $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leq \ell$.
   (d) Montrer que pour tout $\varepsilon > 0$, $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \geq \ell - \varepsilon$.
   (e) Conclure.

Mots clés : *Série entière, inversion limite intégrale,exercice trivial avec Abel radial ou par convergence dominée*

Exercice 158 (★★★★☆) Inspiré de CCINP 2023 (PSI)

On souhaite calculer $W_n = \int_0^{\pi} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t\,. \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe C^2 et calculer f' et f''.
3. On pose $h(x,t) = \cos(t)\sin(x\sin(t))$. Justifier que pour tout x la fonction $h(x,\cdot)$ est dérivable et calculer $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$.
4. En déduire que f est solution de l'équation différentielle
$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{E}$$
5. On suppose qu'il existe une solution de E développable en série entière sur un voisinage de 0 qu'on écrit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrer qu'alors $a_1 = 0$ et que $\forall n \geq 2, a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2}$.
6. Montrer que f est développable en série entière sur un voisinage de 0 et exprimer ses coefficients en fonction de W_n.
7. En déduire que f est l'unique solution de E vérifiant $f(0) = \pi$.
8. En déduire l'expression de W_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Mots clés :*Intégrales à paramètres, équation différentielle, série entière*

Exercice 159 (★★★★☆)

On pose $\mathfrak{S}_n$ le groupe des permutations de n éléments. Une involution de $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est une permutation telle que $\sigma^2 = \sigma\circ\sigma = \mathrm{id}$. On pose u_n le nombre d'involutions de $\mathfrak{S}_n$. On souhaite calculer u_n pour tout n. On pose $u_0 = 1$.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1, u_{n+1} = u_n + nu_{n-1}$.

3. On considère la série entière $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{u_n}{n!} x^n$.
   (a) Montrer que le rayon de convergence R de f vérifie $R \geq 1$.
   (b) Montrer que
   $$\forall x \in]-R; R[, f'(x) = (1+x)f(x).$$
   (c) En déduire une expression de f à l'aide de fonctions usuelles.
   (d) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,
   $$u_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{n!}{k!(n-2k)!2^k}$$
   où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière.

Mots clés : *Série entière, combinatoire*

Exercice 160 (★★★★★) - Nombres de Bell

On définit B_n, appelé *nombre de Bell*, le nombre de partitions d'un ensemble à n éléments. Par convention, on pose $B_0 = 1$.

1. Calculer B_1, B_2 et B_3.
2. Montrer la *formule d'Aitken* :
$$\forall n \in \mathbb{N}, B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$
3. On pose $B(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$.
   (a) Montrer que B est bien définie sur $]-1,1[$.
   (b) Montrer que $\forall x \in]-1,1[\, , B(x) = e^{e^x - 1}$.
   (c) Montrer que pour $K \geq n, \forall k \in \mathbb{N}, \frac{(K+k)^n}{(K+k)!} \leq \frac{K^n}{j!K!}$.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}$ et $K \geq 2$ tel que $\frac{K^n}{K!} \leq 1$. Montrer la *formule de Dobiǹski* : $B_n = \left\lfloor \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{K} \frac{k^n}{k!} \right\rfloor + 1$ où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la fonction partie entière.

Mots clés : *Série entière, combinatoire*

Exercice 161 (★★★★★) - Partitions d'entiers à sommants bornés

Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Une écriture $n = s_1 + \cdots + s_m$ avec $s_i \in \mathbb{N}^*$ s'appelle une *partition* de n et les entiers s_i des sommants. On définit $p_{n,m}$ le nombre de façon de partitionner n en au plus m sommants. Par convention on prendra $p_{0,m} = 1$. On pose
$$S(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,m} x^n.$$

1. Montrer que le rayon de convergence de S est 1.
2. Montrer que $p_{n,m} = \#\left\{ \left(\alpha_1, \ldots, \alpha_m\right) \in \mathbb{N}^m \mid \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + m\alpha_m = n \right\}$.
3. Montrer que $\forall x \in]-1,1[, S(x) = \frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)}$.
4. On s'intéresse désormais au cas $m = 3$.

(a) Compléter les coefficients manquants a, b, c et d dans la décomposition en éléments simples dans $\mathbb{R}(X)$ suivante

$$\frac{1}{(1-x)\left(1-x^2\right)\left(1-x^3\right)} = \frac{a}{(1-x)^3} + \frac{1}{4}\frac{1}{(1-x)^2} + \frac{17}{72}\frac{1}{1-x} + \frac{b}{1+x} + \frac{cx+d}{1+x+x^2}.$$

(b) En déduire que $p_{n,3}$ est l'entier le plus proche de $\frac{1}{12}(n+3)^2$ *(on distinguera les quatre cas n pair ou non et n multiple de* 3 *ou non).*

Mots clés : *Série entière, combinatoire*

Exercice 162 (★★★★★) - Théorème de Molien

Soit $n \geq 2$ un entier. Soit $A = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ et pour $k \in \mathbb{N}$, A_k le sous-espace de A constitué des polynômes homogènes de degré k. Soit $G \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ un sous-groupe fini. On définit les morphismes de groupes

$$\rho : \begin{array}{ccl} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(A) \\ g & \longmapsto & (P \mapsto P(g^{-1}(X_1, \dots, X_n))) \end{array} \quad \text{et} \quad \rho^{(k)} : \begin{array}{ccl} G & \longrightarrow & \mathrm{GL}_n(A_k) \\ g & \longmapsto & (P \mapsto P(g^{-1}(X_1, \dots, X_n))) \end{array}$$

où $g^{-1}(X_1, \dots, X_n) = g^{-1}\begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}$. Enfin, on définit $A_k^G = \left\{P \in A_k \mid \forall g \in G, \rho(P) = P\right\}$ et $a_k = \dim(A_k^G)$. On veut montrer le théorème de Molien : pour tout x suffisamment petit on a

$$\sum_{k=0}^{+\infty} a_k x^k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\frac{1}{\det(I_n - xg)}.$$

1. On pose $p = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\rho^{(k)}(g)$.
   (a) Montrer que p est un projecteur sur A_k^G.
   (b) En déduire la formule de Burnside :
   $$a_k = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\mathrm{Tr}\left(\rho^{(k)}(g)\right).$$
2. Soit $g \in G$ de valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$.
   (a) Justifier qu'il existe un intervalle $]-r, r[$ que l'on précisera sur lequel
   $$\frac{1}{\det(I_n - xg)} = \sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{k_1+\dots+k_n=k}\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}\right)x^k.$$
   (b) Justifier que tout élément $g \in G$ est diagonalisable. En déduire que $\mathrm{Tr}(\rho^{(k)}(g^{-1})) = \sum_{k_1+\dots+k_n=k}\lambda_1^{k_1}\cdots\lambda_n^{k_n}$.
3. Conclure.

Mots clés : *Série entière, groupes*

Exercice 163 (★★★★★) - Permutations et tangente

Soit $n \geq 1$ un entier. On dit qu'une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ est alternée lorsque $\sigma(1) < \sigma(2) > \sigma(3) < \sigma(4) > \dots$. On note α_n le nombre de permutations alternées et, dans cet exercice, on s'intéresse à (T_n) définie par $\forall p \in \mathbb{N}, T_{2p} = 0$ et $T_{2p+1} = \alpha_{2p+1}$. On pose

$$T(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} T_{2p+1}\frac{x^{2p+1}}{(2p+1)!}.$$

1. Justifier que le rayon de convergence R de T satisfait $R \geq 1$.
2. Montrer que si σ est une permutation alternée de $\mathfrak{S}_{2p+1}$ alors $\sigma^{-1}(2p+1)$ est pair. Calculer T_1 et T_3.
3. Montrer que $\forall p \in \mathbb{N}$,
$$T_{2p+1} = \sum_{q=0}^{p-1} \binom{2p}{2q+1} T_{2q+1} T_{2p-2q-1}.$$
En déduire la valeur de T_5.
4. Montrer que T est solution sur $]-R, R[$ de l'équation différentielle
$$y' = y^2 + 1. \tag{2}$$
5. Résoudre l'équation (2) et en déduire l'expression de T sur $]-R, R[$.

Mots clés : *Série entière, équations différentielles, combinatoire*

7. Séries numériques

Exercice 164 (★★☆☆☆)

Pour quels $a \in \mathbb{C}$ a-t-on la convergence de la série de terme général $u_n = \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n - \frac{n-1}{n} e^a$?

Exercice 165 (★★☆☆☆)

Étudier la convergence de la série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{\operatorname{ppcm}(1,2,\ldots,n)}$

Exercice 166 (★★☆☆☆)

Étudier la série de terme général $u_n = \alpha^{\sqrt{n}}$ pour $\alpha > 0$ (on discutera en fonction de la valeur de α si c'est nécessaire).

Exercice 167 (★★☆☆☆)

Déterminer la nature de la série de terme général $u_n = \ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$ avec $\alpha > 0$ (on discutera du résultat en fonction de la valeur de α si c'est nécessaire).

Exercice 168 (★★☆☆☆)

On pose $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} - 1$. Après avoir justifié que $\lim u_n = 0$ étudier la convergence de la série $\sum u_n$.

Exercice 169 (★★★☆☆)

On considère $\sigma : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ une injection. Montrer que la série $\sum_{n\geq 1} \frac{\sigma(n)}{n^2}$ diverge.

Exercice 170 (★★★☆☆)

On considère la suite (u_n) définie par récurrence par $0 < u_0 < 1$ et $u_{n+1} = u_n \cdot (1 - u_n)$.

1. Montrer que (u_n) tend vers 0.
2. Donner un équivalent simple de $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}$.
3. La série $\sum u_n$ converge-t-elle ?

Exercice 171 (★★★★☆)

1. On considère une suite (u_n) à valeurs complexes. Montrer que la suite (u_n) converge si, et seulement si la série $\sum u_{n+1} - u_n$ converge.
2. On considère la suite u_n définie par $u_1 = \sqrt{1}, u_2 = \sqrt{1+\sqrt{2}}$ et pour tout $n \geq 1, u_n = \sqrt{1+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}}$. La suite (u_n) converge-t-elle ?

Exercice 172 (★★★★★)

Soient $P, Q \in \mathbb{C}[X]$ deux polynômes sans racine entière. Déterminer la nature de la série

$$\sum_{n\geq 0} \ln \left| \frac{P(n)}{Q(n)} \right| .$$

Exercice 173 (★★★★☆)

Justifier l'existence puis calculer

$$\int_0^1 x \left\lfloor \frac{1}{x} \right\rfloor \mathrm{dx} .$$

(On donne $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$*).*

Mots clés : *Intégrales impropres*

Exercice 174 (★★★★★)

On pose $u_0 > 0$ et $\forall n \geq 0, u_{n+1} = \ln\left(1 + u_n\right)$. Étudier la convergence de la série de terme général (u_n).

8. Intégrales impropres et intégrales à paramètre

Exercice 175 (★☆☆☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right) dt$.

Exercice 176 (★☆☆☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\cos(t^\alpha)-1} dt$ en fonction du paramètre $\alpha > 0$.

Exercice 177 (★☆☆☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{1}{\ln(1+t)} dt$

Exercice 178 (★★☆☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2} dt$ puis la calculer.

Exercice 179 (★★★☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) dt$.

Exercice 180 (★★★☆☆)

Étudier la convergence de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \sin(t^2) dt$.

Exercice 181 (★★★☆☆)

Justifier l'existence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{e^t - 1}$$

puis la calculer (on admettra que $\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$).

Mots clés :*Inversion série intégrale*

Exercice 182 (★★★★☆)

Justifier l'existence de $\int_0^{+\infty} \frac{1}{e^t+1} dt$ puis la calculer.

Mots clés : *Inversion série intégrale*

Exercice 183 (★★★☆☆)

On considère

$$f: \begin{array}{ccc} \left]0; \frac{\pi}{2}\right[& \longrightarrow & \mathbb{R} \\ t & \longmapsto & \ln(\sin t). \end{array}$$

1. Justifier que f est bien définie et qu'elle est intégrable.
2. On pose $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t) dt$ et $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t) dt$.
   (a) Montrer que $I = J$.
   (b) Calculer I (on pourra considérer $I + J$).

Exercice 184 (★★★★☆)

On pose

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} dt.$$

1. Montrer que I_n est bien définie pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que pour tout $n \geq 1$ on a
$$I_n = \frac{1}{n2^n} + \frac{n-1}{n} I_{n-1}.$$
3. On pose $J_n = nI_n$. Déterminer une relation de récurrence entre J_n et J_{n-1}.
4. Calculer J_1. En déduire la valeur de J_n en fonction de n pour tout $n \geq 1$.
5. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{2^n}\right)$.
6. Montrer que $I_0 = \ln(2)$.

Exercice 185 (★★★★★)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$, bornée telle que $f(0) = 0$. On pose

$$u_n = \int_0^{+\infty} \frac{ntf\left(\frac{t}{n}\right)}{\left(1+t^2\right)^2} dt.$$

Montrer que u_n est bien définie pour tout n puis calculer $\lim_{n\to+\infty} u_n$.

Exercice 186 (★★☆☆☆)

Soit $f \in C^0(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ bornée. Déterminer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx$.

Mots clés : *Intégrales à paramètres*

Exercice 187 (★★★★☆) Inspiré de CCINP 2023 (PSI)

On souhaite calculer $W_n = \int_0^{\pi} \sin^{2n}(t)\,\mathrm{dt}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On pose

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^{\pi} \cos(x\sin(t))\,\mathrm{dt} \end{array}.$$

1. Justifier que f est bien définie.
2. Montrer que f est de classe C^2 et calculer f' et f''.
3. On pose $h(x,t) = \cos(t)\sin(x\sin(t))$. Justifier que pour tout x la fonction $h(x,\cdot)$ est dérivable et calculer $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t)$.
4. En déduire que f est solution de l'équation différentielle

$$xy'' + y' + xy = 0. \tag{E}$$

5. On suppose qu'il existe une solution de E développable en série entière sur un voisinage de 0 qu'on écrit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Montrer qu'alors $a_1 = 0$ et que $\forall n \geq 2, a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2}$.
6. Montrer que f est développable en série entière sur un voisinage de 0 et exprimer ses coefficients en fonction de W_n.
7. En déduire que f est l'unique solution de E vérifiant $f(0) = \pi$.
8. En déduire l'expression de W_n pour $n \in \mathbb{N}$.

Mots clés :*Intégrales à paramètres, équation différentielle, série entière*

Exercice 188 (★★★★☆)

On souhaite calculer la valeur de l'intégrale

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(t)}{t\left(1+t^2\right)}dt.$$

Pour cela on pose la fonction

$$g : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}dt. \end{array}$$

1. Vérifier que g est bien définie et montrer qu'elle est de classe C^1.
2. Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+, g'(x) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{x+1}$.
3. En déduire la valeur de I.

Mots clés :*Intégrales à paramètres*

Exercice 189 (★★★☆☆)

Soit

$$f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(xt)}{t^2} e^{-t}\,\mathrm{dt}$$

1. Donner l'ensemble de définition de f et montrer qu'elle est paire.
2. Montrer que f est de classe C^2. Calculer f'' et en déduire l'expression de $f(x)$ pour tout x dans son ensemble de définition.

Mots clés :*Intégrales à paramètres*

Exercice 190 (★★★★☆)

Soit $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue telle que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{f(t)}{t} dt$ converge et soient $a, b > 0$. Pour $x > 0$ on définit $F(x) = \displaystyle\int_x^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt$ et $G(x) = \displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{f(t)}{t} dt$.

1. Montrer que $F = G$.
2. Montrer que pour tout fonction $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ continue et nulle en 0 on a $\displaystyle\lim_{x\to 0} \int_{ax}^{bx} \frac{g(t)}{t} dt = 0$.
3. En déduire que
$$\int_0^{+\infty} \frac{f(at) - f(bt)}{t} dt = f(0) \ln\left(\frac{a}{b}\right).$$

Mots clés : *Intégrales à paramètre*

Exercice 191 (★★★★☆)

On souhaite calculer l'intégrale
$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t+1)}{t^2+1} dt.$$
On pose $I(x) = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(xt+1)}{t^2+1} dt$.

1. Montrer que $x \mapsto I(x)$ est bien définie sur $\mathbb{R}^+$ et montrer qu'elle est de classe C^1.
2. Calculer $I(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Mots clés : *Intégrales à paramètre*

Exercice 192 (★★★★☆)

Étudier la fonction définie par
$$f : x \longmapsto \int_0^1 t^{tx}\, \mathrm{dt}$$
(domaine de définition, continuité, variations, allure du graphe).

Mots clés :*Intégrales à paramètres*

Exercice 193 (★★★★☆)

On considère le sous-espace vectoriel[4] $E = \mathrm{Vect}\,(\sin(x), \cos(x), \sin(2x), \cos(2x), \dots, \sin(nx), \cos(nx))$ de l'espace des fonctions continues 2π-périodiques.

1. Calculer la dimension de E.
Indication : on pourra montrer que la famille est orthogonale pour le produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(t)dt$.
2. On pose
$$\begin{array}{rccl} \Phi : & E & \longrightarrow & E \\ & f & \longmapsto & \left(x \mapsto e^x \displaystyle\int_x^{+\infty} f(t)e^{-t} dt\right). \end{array}$$

4. Pour ne pas alourdir les notations on s'est permis d'omettre les $x \mapsto$ dans la définition des fonctions.

(a) Montrer que Φ est bien définie et qu'il s'agit d'un endomorphisme.
(b) Étudier la diagonalisabilité de Φ.

Mots clés :*Intégrales impropres, espaces préhilbertien, réduction*

Exercice 194 (★★★★☆)

On considère pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} dt, J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin((2n+1)t)}{t} dt, I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du.$$

1. Montrer que ces trois intégrales existent.
2. Calculer I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} J_n - I_n = 0$.
4. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} J_n = I$. En déduire la valeur de I.

Mots clés :*Intégrales à paramètres*

Exercice 195 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Magistère Rennes

Montrer que

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n} = \int_0^1 \frac{1}{t^t} dt.$$

Exercice 196 (★★★★★)

On souhaite calculer l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)}{1+t^2} dt.$$

On pose

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(xt)}{t(t^2+1)} dt. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie et est de classe $\mathcal{C}^2$.
2. Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2 et en déduire l'expression de l'intégrale cherchée. *(On admettra que* $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt = \frac{\pi}{2}$).

Mots clés :*Intégrales à paramètres*

Exercice 197 (★★★★★)

On veut déterminer toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = 1 + \int_0^x (t+x) f(x-t)\,\mathrm{dt}\,.$$

Supposons qu'une telle solution f existe.

1. On pose $F(x) = \displaystyle\int_0^x f(u)$ du. Montrer que f est de classe C^1 et que F est solution du problème de Cauchy suivant

$$(S): \begin{cases} y(0) = 0 \\ y'(0) = 1 \\ y'' - xy' - 2y = 0. \end{cases}$$

2. Déterminer la solution de ce système (on pourra la chercher sous la forme d'une série entière).
3. Conclure.

Mots clés :*Intégrales à paramètres, équations différentielles, séries entières*

Exercice 198 (★★★★★)

On veut calculer $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)e^{-t}dt$.

1. Montrer que I est bien définie (que l'intégrale existe).
2. On pose $v_n = \displaystyle\int_0^n \ln(t)\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n dt$. Montrer que $v_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} I$.
3. On pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \ln(x)\,(1-x)^n\,dx$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} = \frac{n+1}{n+2}u_n - \frac{1}{(n+2)^2}$.
   (b) En déduire que $u_n = \frac{-1}{n+1} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right)$.
4. Montrer que $I = -\gamma$ où γ désigne la constante d'Euler, i.e.

$$\gamma = \lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n).$$

Mots clés :*Intégrales impropre, inversion limite intégrale*

9. Probabilités

Exercice 199 (★☆☆☆☆)

On considère n variables aléatoires $B_1, \ldots, B_n$ indépendantes et suivant des lois de Bernoulli de même paramètre p. On pose $X = B_1 + \cdots + B_n$. Donner la loi de X et calculer son espérance et sa variance.

Exercice 200 (★☆☆☆☆)

Soient $X \sim B(n, p)$ et $Y \sim B(m, p)$ des variables aléatoires indépendantes suivant des lois binomiales. Déterminer la loi de $X + Y$.

Exercice 201 (★★☆☆☆) - Approximation d'une loi de Poisson par des binomiales

On considère une suite de variables aléatoires (X_n) telle que X_n suit une loi binomiale de paramètre $B(n, p_n)$ avec $np_n \to \lambda \in \mathbb{R}$ et Y qui suit une loi de Poisson de paramètre λ. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}(X_n = k) \longrightarrow \mathbb{P}(Y = k)$.

Exercice 202 (★☆☆☆☆)

On considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant des lois de Bernoulli de paramètres respectifs $0 < p, q < 1$. On pose $Z = \max(X, Y)$ et $Z' = \min(X, Y)$. Donner les lois de Z et Z' puis dire si elles sont indépendantes.

Mots clés :

Exercice 203 (★★★☆☆) - Loi binomiale négative

On considère une succession d'épreuves de Bernoulli indépendantes de même paramètre $0 < p < 1$ et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. On pose X la variable aléatoire correspondant au rang à partir duquel on obtient n succès.

1. Déterminer la loi de X et l'expression de G_X, sa série génératrice. On note $X \sim \mathrm{Bin}^-(n, p)$.
   Indication : on pourra commencer par rappeler le développement en série entière de $\dfrac{1}{(1-x)^n}$
2. Déterminer l'espérance de X si elle existe.
3. On considère $Y \sim \mathrm{Bin}^-(m, p)$ indépendante de X. Déterminer la loi de $X + Y$. Expliquer comment obtenir une loi binomiale négative à partir lois géométriques.

Mots clés :

Exercice 204 (★★☆☆☆)

Soit p un nombre premier. On munit $M_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ de la probabilité uniforme. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\mathrm{GL}_n(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})\right) = p^{\frac{-n(n+1)}{2}}(p^n - 1)\left(p^{n-1} - 1\right)\cdots(p-1).$$

Mots clés : *Corps $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$*

Exercice 205 (★★☆☆☆)

On considère pour tout entier $n \geq 2$ des variables indépendantes $B_n \sim \mathcal{B}\left(\frac{1}{n+1}\right)$ de loi de Bernoulli de paramètre $\frac{1}{n+1}$. On considère X la variable aléatoire représentant le rang de la première réussite.

La variable X a-t-elle une espérance ? Si oui la calculer.

Mots clés : *Espérance de variable aléatoire dans un ensemble infini*

Exercice 206 (★☆☆☆☆)

On considère un corps K ayant un nombre fini d'éléments q et X une variable de loi uniforme sur $K \setminus \{0\}$. On note $S_K = \left\{x^2 \in K \mid x \in K \setminus \{0\}\right\}$ l'ensemble des carrés non nuls.

Montrer que X^2 suit une loi uniforme sur S_K. En déduire que si $2 = 1_K + 1_K$ est non nul dans K on a $\#S_K = \frac{q-1}{2}$ et que si $2 = 0_K$ alors $S_K = K \setminus \{0\}$.

Mots clés : *Corps*

Exercice 207 (★★☆☆☆)

Soit $n \geq 1$ un entier, E un ensemble à $2n$ éléments et A et B une partition de E en deux ensembles de $m \leq n$ et $2n - m$ éléments respectivement. On considère Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $\Omega = \{F \in \mathcal{P}(E) \mid \#F = n\}$. À l'aide de la variable $X = \#A \cap Z$ déterminer la valeur des sommes

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{2n-m}{n-k} \text{ et } \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2.$$

Mots clés : *Dénombrement*

Exercice 208 (★★★☆☆)

Soit $n \geq 1$ un entier, E un ensemble à $2n$ éléments et A et B une partition de E en deux ensembles de n éléments. On considère Z une variable aléatoire de loi uniforme sur $\Omega = \{F \in \mathcal{P}(E) \mid \#F = n\}$. Déterminer la loi le $X = \max\{\#A \cap Z, \#B \cap Z\}$.

Mots clés : *Dénombrement*

Exercice 209 (★☆☆☆☆)

On appelle tribu des boréliens notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ la tribu de $\mathbb{R}$ engendrée par les intervalles ouverts. Montrer que $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ est aussi engendrée par les intervalles fermés.

Mots clés : *Tribus*

Exercice 210 (★★★☆☆)

On a n feuilles originales et n photocopies que l'on souhaite agrafer à leur originale. Malheureusement, on a tout mélangé et, puisqu'on a un travail terriblement ennuyeux, on décide de mettre le tout dans une boite et à chaque étape on tire deux feuilles au hasard dans la boite. Si ces deux feuilles sont une originale et sa copie on les agrafe et on continue. Sinon on replace les deux feuilles dans la boite et on recommence. On note T_n le nombre d'étape nécessaires pour vider la boite. Lorsqu'on remet des feuilles dans la boite on suppose le prochain tirage indépendant du précédent. On pose

— A_n : « les deux premières feuilles piochées ne sont pas agrafées ».

— $a_n = \mathbb{P}(A_n)$.

1. Calculer a_n
2. On souhaite traiter le cas $n = 2$.
   (a) Comment appelle-t-on la loi de $T_2 - 1$?
   (b) Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a $\mathbb{P}(T_2 = k) = (1 - a_2)a_2^{k-2}$.
3. Cas $n = 3$.
   (a) Calculer $\mathbb{P}(T_3 = 2)$ et $\mathbb{P}(T_3 = 3)$.
   (b) Montrer que pour tout $k \geq 2$ on a
   $$\mathbb{P}(T_3 = k + 1) = (1 - a_3)\mathbb{P}(T_2 = k) + a_3\mathbb{P}(T_3 = k).$$
   (c) En déduire que pour tout
   $$k \geq 2, \mathbb{P}(T_3 = k) = \frac{(1 - a_2)(1 - a_3)}{a_3 - a_2}\left(a_2^{k-2} - a_3^{k-2}\right).$$
4. Cas général.
   (a) Montrer que $T_n = t_n + T_{n-1}$ où t_n suit une loi géométrique de paramètre $1 - a_n$.
   (b) Calculer $\mathbb{E}[T_n]$ *(ne pas faire cette question si l'espérance d'une variable de loi géométrique n'a pas encore été vue en cours).*

Mots clés : *Loi géométrique*

Exercice 211 (★★★★☆)

Soit $N \in \mathbb{N}^*$ un entier et $p \in]0;1[\setminus\left\{\frac{1}{2}\right\}$. Une particule se déplace sur un axe $[0, N]$ en partant d'un entier $n \in \{0, \dots, N\}$. À chaque instant elle saute d'une unité à droite avec probabilité p ou à gauche avec probabilité $q = 1-p$. Lorsque la particule atteint 0 ou N elle y reste à jamais. On pose q_n (resp. p_n) la probabilité que la particule atteigne 0 (resp. N) en partant de n. Tous les déplacements sont supposés indépendants des précédents.

1. Donner q_0 et q_N puis montrer que pour tout $1 \leq n \leq N-1$ on a
$$q_n = pq_{n+1} + qq_{n-1}.$$
2. En déduire l'expression de q_n en fonction de n.
3. Que vaut $p_n + q_n$?
4. Quelle est la probabilité pour que la particule ne s'arrête jamais lorsqu'elle part de n ?
5. On suppose que $p > \frac{1}{2}$ et N pair montrer qu'alors $q_{N/2} \to 0$ lorsque N devient grand.

Exercice 212 (★★★☆☆)

1. Soit $a \geq 0$ et $\varphi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ croissante. Montrer que pour une variable aléatoire positive Z on a
$$\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \frac{\mathbb{E}[\varphi(Z)]}{\varphi(a)}.$$
2. Soit $\sum_{n\geq 0} u_n$ une série convergente telle que $\forall n \geq 0, u_n \geq 0$ et $\sum_{n\geq 0} n^2 u_n$ converge aussi. Montrer que
$$\sum_{n=N}^{+\infty} u_n = O\left(\frac{1}{N^2}\right).$$

Mots clés : *Inégalité de Markov*

Exercice 213 (★★★☆☆)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère X_n une variable de loi géométrique de paramètre p_n avec $1 - p_n = \frac{1}{n}$. On pose $Y_n = \max(X_n, n)$.

1. Déterminer la fonction génératrice $G_{Y_n}(t)$ de Y_n.
2. Donner un équivalent simple lorsque $n \to +\infty$ de $\mathbb{E}\left[Y_n\right]$.

Mots clés : *Série génératrice*

Exercice 214 (★★★★☆) Dés truqués I

Une menuisière souhaite tailler deux dés à 6 faces numérotés de 1 à 6. Elle aimerait piper les dés de telle sorte que le résultat de la somme suive une loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$ (on ne demande pas que les dés soient pipés de la même façon). Dans cet exercice on veut déterminer si le projet de la menuisière est réalisable et, si c'est le cas, quelles sont les lois possibles pour chacun des dés. On notera X et Y les variables aléatoires représentant le résultat de chacun des dés.

1. Montrer qu'un polynôme de degré impair admet toujours une racine réelle.
2. Montrer qu'il existe un polynôme $P_X \in \mathbb{R}_5[X]$ (resp. $P_Y \in \mathbb{R}_5[X]$) tels que le série génératrice de X (resp. de Y) vérifie
$$G_X(t) = tP_X(t) \text{ (resp. } G_Y(t) = tP_Y(t)).$$

3. On considère une variable aléatoire U qui suit une loi uniforme sur l'ensemble $\{2, \ldots, 12\}$. Montrer que la série génératrice de U vérifie
$$G_U(t) = \frac{t^2}{11} \cdot \frac{t^{11}-1}{t-1}.$$
4. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, 1 + t + t^2 + \cdots + t^{10} > 0$ (on pourra décrire les racines complexes du polynôme).
5. En déduire que le projet de la menuisière est irréalisable.
6. On suppose désormais que X représente un dé à 7 faces numéroté de 1 à 7 et que le dé Y est un dés standard à 6 faces non truqué.
   (a) Montrer qu'il est possible de truquer X de telle sorte que $X + Y$ suive une loi uniforme. Donner alors la loi de X.
   (b) Quelle forme aurait un tel « dé »?

Mots clés : *Séries génératrices*

Exercice 215 (★★★★★) Dés truqués II

Une menuisière souhaite réaliser deux dés équilibrés à 6 faces numérotés par des réels. Elle aimerait que le résultat de la somme de ces dés renumérotés suive la même loi que le résultat de la somme de deux dés équilibrés classiques. Dans cet exercice on veut déterminer si le projet de la menuisière est réalisable et, si c'est le cas, toutes les solutions possibles. On notera X et Y les variables aléatoires représentant le résultat de chacun des dés et $\alpha_1 < \cdots < \alpha_r$ et $\beta_1 < \cdots < \beta_s$ avec $1 \leq s, r \leq 6$ les valeurs distinctes prises respectivement par X et Y.

1. Montrer qu'il existe $\gamma \in \mathbb{R}$ et $1 = n_1 < \cdots < n_r$ et $1 = m_1 < \cdots < m_s$ des entiers tels que
$$\forall i, \alpha_i = n_i + \gamma \text{ et } \forall j, \beta_j = m_j - \gamma.$$
En déduire qu'on peut se ramener au cas où les α_i et les β_j sont des entiers positifs.
2. Montrer que les séries génératrices G_X et G_Y de X et de Y vérifient
$$G_X(t)G_Y(t) = \frac{t^2}{36} \cdot \left(\frac{t^6-1}{t-1}\right)^2.$$
3. En déduire toutes les possibilités pour numéroter chacun des dés.
4. Y a-t-il d'autres possibilités si on n'impose plus que X et Y soient équilibrés ?

Mots clés : *Série génératrice*

Exercice 216 (★★★☆☆)

On considère N une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$, $(X_k)_{k\in\mathbb{N}^*}$ des variables aléatoires indépendantes identiquement distribuée, indépendantes entre elles, indépendante de N et à valeurs dans $\mathbb{N}$. On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$ et on notera $G_X(t)$ la fonction génératrice commune des variables X_i.

Théorème de la composition : On veut montrer qu'avec les notation ci-dessus les fonctions génératrices G_{S_N}, G_N et G_X vérifient
$$G_{S_N}(t) = G_N(G_X(t)).$$

1. Soit A un évènement d'un univers Ω. Montrer que l'indicatrice de A définie par
$$\mathbb{1}_A : \begin{array}{ccl} \Omega & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \omega & \longmapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{array}$$
suit une loi de Bernoulli de paramètre $\mathbb{P}(A)$.

2. Justifier que $t^{S_N} = \sum_{n\geq 1} t^{S_n} \mathbb{1}_{\{N=n\}}$.
3. Conclure.

Applications : On vous propose un jeu. Vous disposez de deux pièces déséquilibrées de probabilités respectives de faire pile $0 < q < p < 1$. Le jeu se déroule ainsi :

- Choisissez une pièce et lancez-la jusqu'à tomber sur face. Notez alors le rang de l'obtention de la première face que vous appelez N.
- Vous effectuez ensuite N lancers avec l'autre pièce.
- Votre score final est le nombre de piles obtenus avec la seconde pièce.

Vous avez le choix de la pièce. Expliquez, en fonction de p et q comment choisir la première pièce pour maximiser votre score.

Mots clés : *Séries génératrices*

Exercice 217 (★★★★☆)

On considère $m+1$ personnes, numérotées de 0 à m, assises côte à côte. À l'instant 0 la personne numéro 0 commence à propager une rumeur. À chaque instant chaque personne au courant de la rumeur a une probabilité $0 < p < 1$ d'en informer son voisin. On note T le temps nécessaire pour que les m personnes soient au courant de la rumeur. Calculer l'espérance de T.

On pourra introduire les variables

$$t_i = \text{ Temps nécessaire pour que } i \text{ personnes soient au courant sachant que } i-1 \text{ personnes sont au courant.}$$

On suppose ensuite que chaque personne au courant de la rumeur a une probabilité $0 < q < 1$ d'oublier la rumeur. Que vaut alors l'espérance de T ?

Mots clés : *Espérance de variable aléatoire dans un ensemble infini*

Exercice 218 (★★★★☆)

On considère un sac contenant N cordes. On choisit successivement deux extrémités libres que l'on noue entre elles jusqu'à ce qu'elles soient toutes nouées. Donner l'espérance du nombre de boucles et un équivalent de cette espérance lorsque $N \to +\infty$.

Mots clés : *Dénombrement*

Exercice 219 (★★★★☆)

Soit $n \geq 2$ un entier. On pose $\Omega = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ que l'on considère comme un espace probabilisé avec la probabilité uniforme. Pour tout $d \in \mathbb{Z}$, $D_d = d\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$, l'ensemble des classes des multiples de d modulo n.

1. Calculer $\mathbb{P}(D_d)$ pour tout $d \in \mathbb{Z}$.
2. Montrer que si $d_1, \dots, d_r$ sont premiers entre eux deux à deux alors $D_{d_1}, \dots, D_{d_r}$ sont mutuellement indépendants.
3. On pose $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ la décomposition en facteurs premiers de n. Montrer que

$$\frac{\varphi(n)}{n} = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - \frac{1}{p_i}\right)$$

où $\varphi(n)$ désigne l'indicatrice d'Euler de n.

Mots clés : *Anneaux* $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exercice 220 (★★★★★) - Inspiré de X-ENS Sujet A 2024

On pose $n \geq 2$ et $\mathfrak{S}_n$, le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ on pose $\varepsilon(\sigma)$ sa signature et $\nu(\sigma)$ son nombre de points fixes. Enfin, on appelle dérangement une permutation sans point fixe, on note $\mathfrak{D}_n$ l'ensemble des dérangements de $\mathfrak{S}_n$ et on admet que $\#\mathfrak{D}_n = n! \sum_{k=0}^{n} \dfrac{(-1)^k}{k!}$. On pose

$$M = -\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de M. *Il est possible de le déterminer sans aucun calcul de déterminant. Observez bien la matrice avant de vous lancer dans des calculs laborieux.*
2. En déduire que
$$\sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X^{\nu(\sigma)} = (X-1)^{n-1}(X+n-1).$$
3. On pose $K_1 = \left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\right\}$ et $K_{-1} = \left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\right\}$. Montrer que
$$\#K_1 = \#K_{-1} + (-1)^n(n-1).$$
4. On considère $\left(\mathfrak{D}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{D}_n)\right)$ muni de la probabilité uniforme et Y_n définie sur cet espace probabilisé par $Y_n(\sigma) = \varepsilon(\sigma)$. Montrer que
$$\left|\mathbb{P}(Y_n = 1) - \frac{1}{2}\right| \underset{n \to +\infty}{\sim} \frac{e}{2(n-1)!}.$$

Mots clés : *Réduction, probabilités*

Exercice 221 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral ENS

Soit $n \geq 2$ un entier et X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi uniforme sur $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Déterminer $\mathbb{P}(XY = 0)$.

Mots clés : *théorème des restes, probabilité*

Exercice 222 (★★★★★) - Nombre moyen de cycles

On considère $n \geq 1$ un entier et $\left(\mathfrak{S}_n, \mathcal{P}(\mathfrak{S}_n), \mathbb{P}\right)$ avec $\mathbb{P}$ la loi de probabilité uniforme sur $\mathfrak{S}_n$. On pose $X : \mathfrak{S}_n \to \mathbb{N}^*$ la variable aléatoire qui a une permutation σ donne son nombre de cycle dans sa décomposition en cycles à supports disjoints. On considérera que les points fixes sont des cycles de longueur 1. Par exemple $X(\mathrm{id}) = n$. On souhaite calculer l'espérance et la variance de X. Pour cela on pose $a_{n,k}$ le nombre de permutations admettant k cycles dans sa décomposition et $A_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} a_{n,k} t^k$. On pose $a_{0,0} = 1$ et, pour $k \geq 1$, $a_{0,k} = 0$.

1. Montrer que, pour $1 \leq k \leq n$, on a
$$a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + (n-1)a_{n-1,k}.$$
Indication : on pourra séparer les cas des permutations ayant k cycles qui fixent n et les autres.
2. Montrer que $\forall t \in \mathbb{R}, A_n(t) = (t+n-1)(t+n-2)\cdots(t+1)t$.
3. En déduire $\mathbb{E}[X]$ et $\mathbb{V}(X)$ et donner un équivalent simple de ces quantités lorsque $n \to +\infty$.

Mots clés : *Dénombrement, permutations*

10. Calcul différentiel et équations différentielles

Exercice 223 (★☆☆☆☆)

Soit f définie sur $\mathbb{R}^2$ par $f(x, y) = xy + 1$. Déterminer les extrema de f sous la contrainte $x^2 + y^2 = 1$.
Mots clés : *optimisation sous contrainte*

Exercice 224 (★☆☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application différentiable. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Montrer qu'on a pour tout a de E on a $d(u \circ f)(a) = u \circ df(a)$.

Exercice 225 (★☆☆☆☆)

Soit E un espace vectoriel de dimension finie et $f : E \to E$ une application différentiable. On considère $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme. Montrer qu'on a pour tout a de E on a $d(f \circ u)(a) = (df(u(a)) \circ u$

Exercice 226 (★☆☆☆☆)

Calculer les dérivées partielles de

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) \neq (0, 0) & \longmapsto & \dfrac{\sin(xy)}{x^2 + y^2} \\ (0, 0) & \longmapsto & 0 \end{array}$$

là où elles existent et déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ où elle est de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 227 (★★☆☆☆)

Résoudre le système différentiel suivant

$$\begin{cases} x' & = y + z \\ y' & = x + z \\ z' & = x + y \end{cases}$$

Mots clés : *Réduction de matrices*

Exercice 228 (★★☆☆☆)

On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et

$$\Phi : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ f & \longmapsto & f^2 \end{array}$$

Calculer la différentielle de Φ en un point $f \in \mathcal{L}(E)$ et étudier la continuité de sa différentielle.

Exercice 229 (★★☆☆☆)

On pose $\Delta = \left\{(0, y) \in \mathbb{R}^2\right\}$. Calculer les dérivées partielles de

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (0, y) & \longmapsto & 0 \\ (x, y) \notin \Delta & \longmapsto & x \operatorname{Arctan}\left(\dfrac{y}{x}\right). \end{array}$$

là où elles existent et déterminer les points de $\mathbb{R}^2$ où elle est de classe C^1.

Exercice 230 (★★★☆☆)

Déterminer, s'ils existent, le minimum et le maximum de la fonction

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y) & \longmapsto & (x-y)e^{-x^2-y^2}. \end{array}$$

Exercice 231 (★★★☆☆)

Soit $f : E \longrightarrow F$ une application différentiable entre deux $\mathbb{R}$-espaces vectoriels de dimension finie telle que $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(\lambda x) = \lambda f(x)$. Montrer que f est linéaire.

Exercice 232 (★★★☆☆)

Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$. Étudier la différentiabilité de

$$f : \begin{array}{rcl} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ p & \longmapsto & \displaystyle\int_0^1 \sin(p(t))\,\mathrm{d}t\,. \end{array}$$

Est-elle de classe C^1 ?

Exercice 233 (★★☆☆☆)

Déterminer l'espace tangent à $O_n(\mathbb{R})$ en I_n.
Mots clés : *espace tangent*

Exercice 234 (★★★☆☆)

Déterminer l'espace tangent à $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \left\{M \in M_n(\mathbb{R}) \mid \det(M) = 1\right\}$ en I_n.
Mots clés : *espace tangent*

Exercice 235 (★★★☆☆)

On considère l'application

$$f : \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{p-1}[X] \times \mathbb{R}_{q-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{p+q}[X] \\ (P, Q) & \longmapsto & (X^p + P)(X^q + Q). \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe C^1 et calculer sa différentielle.
2. Montrer que $df(P, Q)$ est inversible si, et seulement si $X^p + P$ et $X^q + Q$ sont premiers entre eux.

Mots clés :

Exercice 236 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = 0 \right\}$. Pour $f \in E$, on pose $n(f) = ||f||_\infty + ||f'||_\infty$ et $N(f) = ||f + f'||_\infty$.

1. Justifier que n et N sont des normes sur E.
2. Montrer que n et N sont équivalentes.

Mots clés : *Normes, équation différentielle linéaire d'ordre* 1

Exercice 237 (★★★☆☆)

On considère la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $\mathcal{C}: \ x^4 + y^4 = 1$.

1. Déterminer les points de la courbe $\mathcal{C}$ les plus éloignés et les plus proches de l'origine.
2. Déterminer le diamètre $\sup\{||X - Y|| \mid X, Y \in \mathcal{C}\}$ de $\mathcal{C}$.

Mots clés : *optimisation sous contrainte*

Exercice 238 (★★★☆☆) - Triangle d'aire maximale

On rappelle qu'un triangle de côtés de longueurs a, b et c et de demi-périmètre p est d'aire

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

(il s'agit de la formule de Héron). Déterminer l'aire maximale d'un triangle de périmètre donné.

Mots clés : *optimisation sous contrainte*

Exercice 239 (★★★★☆)

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On considère l'application de changement de base

$$f: \quad \begin{array}{rcl} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ P & \longmapsto & P^{-1}AP. \end{array}$$

1. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.
2. On suppose que A est diagonalisable et on considère $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $D = P^{-1}AP$ est une matrice diagonale et $X = f^{-1}(\{D\})$ la ligne de niveau correspondante. Calculer $\dim(T_P X)$.

Mots clés : *espace tangent, ligne de niveau*

Exercice 240 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $E = \left\{ f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0 \right\}$. pour $f \in E$, on pose $N(f) = ||f + 2f' + f''||_\infty$.

1. Justifier que N est une norme sur E.
2. Résoudre l'équation $f'' + 2f' + f = g$ en fonction de g d'inconnue $f \in E$.
3. Montrer que qu'il existe $a \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall f \in E, ||f||_\infty \leq aN(f)$.
4. Les normes $||\cdot||_\infty$ et N sont-elles équivalentes ?

Mots clés : *Normes, équation différentielle linéaire d'ordre* 1

Exercice 241 (★★★★☆) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $A \in M_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. Montrer que les deux assertions suivantes sont équivalentes :

- A est antisymétrique.
- Pour toute solution X du système différentiel $X' = AX$ l'application $t \mapsto ||X(t)||$ est constante.

Mots clés : *Système différentiel, problème de Cauchy, théorème spectral*

Exercice 242 (★★★★★)

Soit E un espace euclidien. On considère ϕ et ψ des endomorphismes autoadjoints de E. On suppose que ϕ et ψ commutent entre eux. On pose

$$f: \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \langle \phi(x), x\rangle - \langle \psi(x), x\rangle \,. \end{array}$$

1. Montrer que ϕ et ψ sont diagonalisables dans une même base orthonormée.
2. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que f admette un extremum local. Lorsqu'il y a un extremum est-il toujours global ?

Mots clés :

Exercice 243 (★★★★★)

On considère l'application $\det : M_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$. Pour une matrice $A \in M_n(\mathbb{R})$ on note A^+ sa comatrice.

1. Montrer que det est de classe C^1 et calculer ses dérivées partielles en $A \in M_n(\mathbb{R})$ en fonction de la comatrice de A. En déduire que
$$d\det(A) : H \longmapsto \mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{t}}(A^+)H\right).$$
2. Montrer que $\det(\exp H) = \exp(\mathrm{Tr}(H))$
3. Retrouver le résultat de la question 1 pour $A = I$, la matrice identité.
On pourra justifier la différentiabilité de exp *et utiliser la relation* $I + H = \exp(H)(I + o(H))$.
4. Retrouver le résultat de la question 1 dans le cas général.

Exercice 244 (★★★★★)

On considère l'application f :

$$f: \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ X & \longmapsto & {}^{\mathrm{t}}XX \end{array}$$

1. Justifier que f est différentiable.
2. Calculer le rang de $df(A)$ en fonction du rang de A.

Exercice 245 (★★★★★)

Quelle est l'aire maximale d'un triangle inscrit dans l'ellipse

$$\mathcal{E} : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

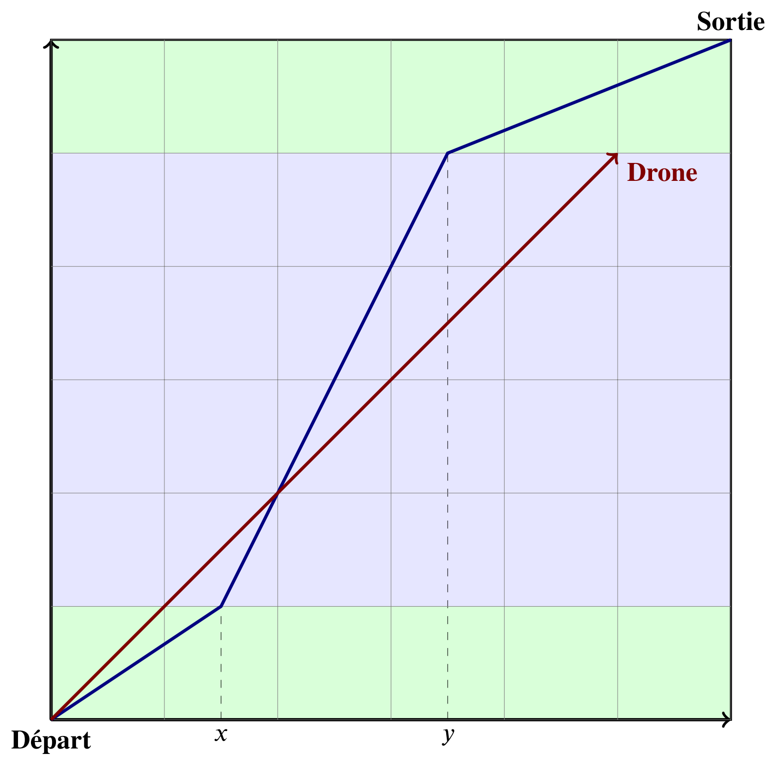
Indication : on pourra dans un premier temps se ramener au cas d'un cercle de rayon 1 *centré en l'origine avec un sommet du triangle en* $(1, 0)$.

Mots clés : *optimisation sous contrainte*

Exercice 246 (★★★★★)

Une prisonnière prépare une évasion spectaculaire. Pour réussir à s'échapper de la prison de haute sécurité où elle est captive elle s'est procuré les codes de la porte de la cour. Lorsque l'occasion s'y prêtera elle devra traverser une cour carré de côté 6 en allant d'un sommet du carré à celui qui lui est opposé. La cour est traversée d'un court d'eau représenté par une bande de largeur 4, où sa vitesse v sera divisée par 2. Elle se déplacera en ligne droite dans chacun des milieux : terre ferme ou eau. Enfin, lorsqu'au point de départ elle débloquera la porte de sortie un drone partira du même point qu'elle, à 62% de sa vitesse v, et verrouillera la porte de sortie s'il y parvient avant elle.

1. Si la prisonnière se déplace en ligne droite en suivant la diagonale de la cour arrivera-t-elle avant le drone ?
2. On représente part une grille $[0,6] \times [0,6]$ avec le départ au point $(0,0)$. La prisonnière va en ligne droite jusqu'au point du court d'eau d'abscisse x puis sort du ruisseau au point d'abscisse y avant de courir jusqu'à la sortie. Déterminer $f(x,y)$ son temps de parcours en fonction de x, y et v.
3. Décrire la trajectoire optimale. Notre prisonnière a-t-elle une chance de s'évader ?
   Indication : si par le plus grand des hasard vous arriviez à un moment à une équation polynomiale de degré 4 *on pourra chercher une racine évidente pour des petites valeurs entières.*



Mots clés : *optimisation sous contrainte*

Exercice 247 (★★★★★) - Équations de Mathieu

On considère l'équation différentielle

$$y'' + qy = 0 \tag{E}$$

avec $q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continue, π-périodique et paire.

1. Expliquer pourquoi l'espace S des solutions de E définies sur $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel de dimension 2. On note dans la suite y_1, y_2 la base canonique de S définie par $\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_1'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} y_2(0) \\ y_2'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.
2. On pose
$$A : \begin{array}{rcl} S & \longrightarrow & S \\ y & \longmapsto & (x \mapsto y(x+\pi)). \end{array}$$
   (a) Montrer que A définit un endomorphisme de S puis montrer que sa matrice dans la base canonique est
$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1(\pi) & y_2(\pi) \\ y_1'(\pi) & y_2'(\pi) \end{pmatrix}$$
   (on identifiera A à sa matrice dans la base canonique).
   (b) Montrer que y_1 est paire, que y_2 est impaire et que $\det A = 1$ (on pourra utiliser le wronskien pour le calcul de $\det(A)$).
   (c) Montrer que $a = d$ (on pourra calculer A^{-1} puis au choix utiliser le théorème de Cayley-Hamilton ou utiliser l'expression de A^{-1} à l'aide de la comatrice de A).

3. On pose $T = 2a$ la trace de A et $\chi_A = X^2 - TX + 1$ son polynôme caractéristique. Montrer que
   - Si $|T| < 2$ alors toutes les solutions sont bornées.
   - Si $|T| = 2$ alors il existe des solutions bornées non-nulles.
   - Si $|T| > 2$ alors toutes les solutions non nulles ne sont pas bornées.

Exercice 248 (★★★★★) - Inspiré d'un oral Mines-Pont 2021

Soit $f \in \mathcal{C}^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$ telle que $f + f'' \geq 0$. Déterminer le signe de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$.

Mots clés : *équation différentielle linéaire d'ordre* 2

Exercice 249 (★★★☆☆) - Inspiré d'un oral inter-ENS 2023

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $f + f'$ possède une limite finie ℓ en $+\infty$. Montrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \ell$.

Mots clés : *équations différentielles, intégrales impropres*

Exercice 250 (★★★★★) - Inspiré d'un oral inter-ENS 2023

Soit $k \in \mathbb{N}^*$ et $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ telle que $\sum\limits_{j=0}^{k} f^{(j)}$ possède une limite finie ℓ en $+\infty$. Peut-on en déduire que f possède une limite finie en $+\infty$? On discutera selon la valeur de k.

Mots clés : *équations différentielles linéaires, intégrales impropres, variation de la constante d'ordre 2*

Éléments de corrections

1. *Réduction des endomorphismes - corrections*

Exercice 1 (correction)

On remarque que 1 est une valeur propre évidente de A. La matrice $A - I$ est de rang 1 donc $\ker(A - I)$ de dimension 1 par le théorème du rang. L'autre valeur propre satisfait

$$\mathrm{Tr}(A) = 1 + \lambda = 2$$

donc 1 est de multiplicité $2 > \dim\ker(A - I)$ donc A n'est pas diagonalisable.

Exercice 2 (correction)

1. La matrice $A - I = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est de rang 1. De plus, en notant c_1, c_2, c_3 ses colonnes on a $c_1 = c_3$ donc $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associée à la valeur propre 1 et $c_2 = 0$ donc $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est aussi un vecteur propre ce qui fournit une base de $\ker(A - I)$. Donc 1 est une valeur propre de multiplicité $\geq \dim(\ker(A - I)) = 2$. La dernière valeur propre λ vérifie $1 + 1 + \lambda = \mathrm{Tr}(A) = 2$ donc $\lambda = 0$. On remarque en effet qu'avec c_1, c_2, c_3 les colonnes de $A - 0I = A$ on a bien $2c_1 - c_2 = c_3$ donc $v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker(A)$. On en déduit que A a pour polynôme caractéristique $\chi = X(X - 1)^2$.
2. La famille (v_1, v_2, v_3) est libre car concaténation de bases d'espaces propres (ils sont en somme directe). Donc A est diagonalisable. On en déduit que son polynôme minimal μ est scindé à racines simples et, puisqu'il admet 1 et 0 comme racines $\mu = X(X - 1)$. Si vous voulez vous en convaincre calculer $A(A - I)$; si le monde est bien fait vous devriez trouver la matrice nulle.

Exercice 3 (correction)

1. La matrice $A - I = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ est de rang 2. En effet, en notant c_1, c_2, c_3 ses colonnes on a $c_1 + c_2 + c_3 = 0$ donc $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associée à la valeur propre 1. Donc 1 est une valeur propre de multiplicité $\geq \dim(\ker(A - I)) = 1$. De même on voit que $A - 2I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ qui est aussi de rang 2 donc 2 est valeur propre. Ses colonnes vérifient $c_1 = c_2$ donc

$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est une base de $\ker(A - 2I)$. La dernière valeur propre λ vérifie $1 + 2 + \lambda = \mathrm{Tr}(A) = 5$ donc $\lambda = 2$. Donc 2 est une valeur propre de multiplicité 2. On en déduit que A a pour polynôme caractéristique $\chi = (X - 1)(X - 2)^2$.

2. Puisque la multiplicité de la valeur propre 2 est différente de la dimension de l'espace propre associé $\ker(A - 2I)$ la matrice A n'est pas diagonalisable. En revanche, son polynôme caractéristique étant scindé elle est triangularisable. Son polynôme minimal μ divise χ et a 1 et 2 pour racine. Si c'était $(X - 1)(X - 2)$ la matrice A serait diagonalisable car annulée par un polynôme scindé à racines simples. Ce n'est pas le cas donc $\mu = \chi$.

Exercice 4 (correction)

On remarque que $\Phi^2(P) = \Phi(\Phi(P)) = X^n \left(\frac{1}{X^n} P(X)\right) = P$. Par conséquent $\Phi^2 = \mathrm{id}_{\mathbb{R}_n[X]}$ donc $X^2 - 1$, qui est scindé à racines simples, est un polynôme annulateur de Φ. Donc Φ est diagonalisable.

Exercice 5 (correction)

Soit $v \in E_\lambda$ alors $f(g(v)) = g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$ donc $g(v) \in E_\lambda$.

Exercice 6 (correction)

Puisque M est inversible, 0 n'est pas une valeur propre. Donc son polynôme minimal μ n'est pas divisible par X donc son coefficient constant a n'est pas nul. On en déduit que $\frac{1}{a} M^{-1} \mu(M) = 0$ donc $M^{-1} = P(M)$ avec $P = -\frac{1}{a}(\mu - a)$.

On peut aussi faire un raisonnement similaire avec le polynôme caractéristique et le théorème de Cayley-Hamilton

Exercice 7 (correction)

Exercice 8 (correction)

1. Soit A telle que $A^3 + A = 0$. La matrice est donc annulée par le polynôme
$$P = X(X^2 + 1) = X(X - i)(X + i).$$
Donc les valeurs propres d'une telle matrice appartiennent à $\{0, -i, i\}$. Une condition nécessaire pour que A soit diagonalisable est que ses valeurs propres soient réelles. Donc il faut que 0 soit la seule valeur propre. Son polynôme minimal μ est alors X^m pour un certain $m \geq 1$. Cependant, par définition, on doit avoir $\mu | P$, i.e. $m \leq 1$. Donc $\mu = X$ et donc $A = 0$. Réciproquement, $A = 0$ est bien diagonalisable. Donc, une matrice réelle telle que $A^3 = -A$ est diagonalisable si, et seulement si, $A = 0$.
2. On a $A^3 = -A$ et $A \neq 0$ donc d'après la question précédente A non diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

Exercice 9 (correction)

On propose deux méthodes pour cette question :

Méthode 1 : Soit $A \in M_n(\mathbb{K})$ et $\varepsilon > 0$. Le polynôme $\chi_A = \det(A - XI_n) \in \mathbb{K}[X]$ est de degré n donc non constant. Il possède donc au plus n racines. L'ensemble de ses racines étant fini il existe $t < \frac{\varepsilon}{||I_n||}$ tel que $\chi_A(t) \neq 0$ donc $A - tI_n \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. On a bien $||A - (A - tI_n)|| = t\,||I_n|| < \varepsilon$.

Méthode 2 : Soit A une matrice non inversible. Ceci est équivalent à dire que 0 est une valeur propre de A. On considère F un supplémentaire de $\ker A$ dans $\mathbb{K}^n$. Dans une base $\mathcal{B} = (e_1, \ldots, e_d, e_{d+1}, \ldots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ obtenue comme concaténation de base

$(e_1, \dots, e_d)$ de $\ker A$ et de F la matrice de l'endomorphisme induit par A est

$$T = \begin{pmatrix} 0 & & \star & \\ \vdots & \ddots & & \star \\ 0 & \cdots & 0 & \\ & & & \\ & 0 & & B \\ & & & \end{pmatrix}$$

avec B la matrice de A dans la base $(e_{d+1}, \dots, e_n)$ de F qui est inversible car F est d'intersection nulle avec $\ker A$. On pose la suite de matrice inversibles

$$T_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{n} & & \star & \\ \vdots & \ddots & & \star \\ 0 & \cdots & \frac{1}{n} & \\ & & & \\ & 0 & & B \\ & & & \end{pmatrix}.$$

En notant $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ la matrice de passage de la base canonique à $\mathcal{B}$ on a $PT_nP^{-1} \longrightarrow PTP^{-1} = A$.

Exercice 10 (correction)

Tout réel λ est une valeur propre. Chaque espace propre $\ker(f - \lambda\,\mathrm{id})$ est la droite vectorielle des suites géométriques de raison λ.

Exercice 11 (correction)

On remarque que -1 est une valeur propre évidente. Puisque $M + I_3$ est de rang 1 la dimension de l'espace propre E_{-1} associé à -1 est 2 par le théorème du rang. La somme des valeurs propres étant égale à la trace de la matrice, la dernière valeur propre λ satisfait $-1 + -1 + \lambda = 0$ donc $\lambda = 2$. L'espace propre E_2 associé à 2 est de dimension ≥ 1 (car il ne peut être réduit à $\{0\}$) et de dimension ≤ 1 car $\dim E_1 \leq \dim \mathbb{R}^3 - \dim E_{-1} = 1$. La dimension de chaque espace propre est donc égale à la multiplicité des valeurs propres associées donc la matrice est diagonalisable. Si vous avez déjà vu qu'une matrice est diagonalisable si et seulement si son polynôme minimal est scindé à racines simples alors on peut conclure qu'il s'agit de $\mu_M = (X + 1)(X - 2)$. Sinon on sait qu'il s'agit soit de $(X+1)(X-2)$ soit de $(X+1)^2(X-2)$ car il divise le polynôme caractéristique et possède les mêmes racines. Il suffit alors de calculer $(M + I_3)(M - 2I_3)$ pour conclure.

Exercice 12 (correction)

L'application $C \mapsto C^2$ définie sur les matrices est continue car chaque coefficient de C^2 est un expression continue des coefficients de C. Donc $A^{2n} = (A^2)^n$ converge vers $B^2 = B$ donc $X(X-1)$ est un polynôme annulateur scindé simple de B donc B diagonalisable et ses valeurs propres sont dans $\{0, 1\}$.

Exercice 13 (correction)

On remarque que $f_u^2(v) = f_u(uv) = u^2v$ et, par une récurrence élémentaire, $\forall k \geq 1, f_u^k(v) = u^kv$. On en déduit que pour tout polynôme $P \in \mathbb{K}[X]$ on a $P(f_u)(v) = P(u)v$ ce qui prouve que si P annule u alors $P(f_u)$ est l'application nulle donc P annule f_u. Réciproquement, si P est un polynôme annulateur de f_u alors $\forall v \in \mathcal{L}(E), P(u)v = 0$. En particulier, pour $v = \mathrm{id}_E$ on a $P(u) = 0$. Donc P annule u. Les idéaux des polynômes annulateurs de u et f_u étant égaux, ils sont engendrés par le même polynôme unitaire ; leurs polynômes minimaux qui sont donc égaux.

Exercice 14 (correction)

Soit A une matrice diagonalisable, i.e. $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = D$ diagonale. Donc

$$\gamma: \begin{array}{rcl} [0;1] & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & tA \end{array}$$

est continue, à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonalisables car $\forall t, P^{-1}tAP = tD$ diagonale et $\gamma(0) = 0$ qui est diagonale. Donc l'ensemble est étoilé donc connexe par arc.

Il n'est pas convexe. En effet, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisable car diagonale et $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisable car possède des valeurs propres distinctes. Alors $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pas diagonalisable car son polynôme minimal est $(X-1)^2$ qui n'est pas scindé.

Exercice 15 (correction)

1. Les première et dernière colonnes forment une famille libre. La matrice A est donc de rang 2. D'après le théorème du rang on a alors $\dim \ker A = n-2$ donc l'espace propre associé à la valeur propre 0 est de dimension $n-2$.
2. Les première et dernière colonnes de $A + I_n$ sont identiques donc la matrice n'est pas de rang n donc -1 est bien une valeur propre.
3. La valeur propre -1 est de multiplicité au moins 1. Par ailleurs, la somme des valeurs propres est égale à la trace de la matrice. Donc λ, la dernière valeur propre satisfait $\lambda - 1 + (n-2)\cdot 0 = 0$ donc $\lambda = 1$. On en déduit que 0 est de multiplicité $n-2$, 1 de multiplicité 1 et -1 de multiplicité 1. Donc $\chi_A = X^{n-2}(X-1)(X+1)$. Le polynôme étant scindé dans $\mathbb{R}$ la matrice est trigonalisable.
4. Les multiplicités étant égales à la dimension de l'espace propre correspondant la matrice est bien diagonalisable. Son polynôme minimal est donc scindé à racines simples donc il s'agit de $\mu_A(X) = X(X-1)(X+1)$.

Exercice 16 (correction)

1. Les n premières colonnes de A forment une famille libre. Les n suivantes sont les n premières réécrites dans le sens inverse. En particulier, elles sont liées aux n premières. Donc $\mathrm{rg}(A) = n$.
2. Si on pose I la matrice identité $n \times n$ et S la matrice $n \times n$ avec seulement des 1 sur l'antidiagonale on a $A = \begin{pmatrix} I & S \\ S & I \end{pmatrix}$ et on a le calcul par blocs $A^2 = \begin{pmatrix} I^2 + S^2 & S + S \\ S + S & S^2 + I^2 \end{pmatrix} = 2A$ car $S^2 = I$.
3. D'après la première question 0 est une valeur propre et, d'après le théorème du rang l'espace propre associé est de dimension n. Les relations d'égalité des colonnes donnent pour vecteurs propres

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 1 \\ -1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

famille évidemment libre et de taille n donc il s'agit d'une base de $\ker A$. De la même façon on remarque que $A - 2I$ n'est pas inversible et possède pour vecteurs propres

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}$$

donc $\dim\ker(A-2I)\geq n$ mais puisque $\ker(A)\oplus\ker(A-2I)\subseteq\mathbb{R}^{2n}$ on a $\dim\ker(A-2I)=n$.

Exercice 17 (correction)

On remarque que 1 et X sont dans le noyau de f et que ces deux vecteurs engendrent le noyau. Ensuite pour $m\geq 2$ on a $f(X^m)=m\cdot(m-1)\cdot X^m+$ termes de degré $\leq m-1$. La matrice de f dans la base canonique est donc triangulaire supérieure et ses valeurs propres sont 0 avec multiplicité 2 et $m(m-1)$ pour $2\leq m\leq n$ de multiplicité 1. Puisque 0 est de même multiplicité que la dimension de l'espace propre qui lui est associé ($\ker f$) on en déduit que f est diagonalisable.

Exercice 18 (correction)

Soit P de degré $n\geq 0$ associé à la valeur propre λ. On a alors $f(P)=XP'=\lambda P$. En considérant le terme dominant on obtient $n=\lambda$. En considérant les autres coefficients on voit qu'ils sont tous nuls donc $P=X^n$ est un vecteur propre associé à la valeur propre n. Donc $\mathrm{Sp}(f)=\mathbb{N}$ et $E_n=\ker(f-n\,\mathrm{id})=\mathrm{Vect}(X^n)$.

Exercice 19 (correction)

1. On procède par analyse-synthèse.

   Analyse Soit $x\in E$ et tentons de déterminer de quelle manière on peut l'écrire sous la forme $x=x_0+y$ avec $x_0\in\ker u$ et $y\in\operatorname{im}u$. Si une telle écriture existe alors il existe $z\in E$ tel que $y=u(z)$. On aurait alors

   $$u^{m-1}(x)=u^{m-1}(x_0)+u^m(z)=u(z)=y$$

   et donc $x_0=x-y=x-u^{m-1}(x)$. Ceci conclut l'analyse. On note dans un coin que si la synthèse aboutit alors on a la somme directe par unicité des solutions trouvées.

   Synthèse Soit $x\in E$. On pose $x_0=x-u^{m-1}(x)$ et $y=u^{m-1}(x)$. On a alors $x=x_0+y$. On a bien $u(x_0)=u(x)-u^m(x)=0$ donc $x_0\in\ker u$. Par ailleurs, $m\geq 2$ donc $y\in\operatorname{im}u$.

2. Le polynôme X^m-X est donc un polynôme annulateur de u. Or $X^m-X=X(X^{m-1}-1)$ et $X^{m-1}-1$ a pour racines les racines $m-1$-èmes de l'unité, toutes distinctes et non nulles. Donc u est annulé par un polynôme scindé à racines simples donc est diagonalisable.

Exercice 20 (correction)

Soit λ une valeur propre et $v\neq 0$ un vecteur propre associé à cette valeur propre. On remarque qu'on a pour tout k, $A^k\cdot v=\lambda^k v$ (récurrence immédiate). On en déduit que

$$P(A)\cdot v=P(\lambda)\cdot v=0$$

donc $P(\lambda)=0$ (car $v\neq 0$).

Exercice 21 (correction)

On fait $1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4 \Rightarrow 2$ (car $2 \Rightarrow 1$ est immédiat en prenant les dimensions). On note $n = \dim(E)$.

$\boxed{1 \Rightarrow 2}$ On a $\operatorname{im} f^2 \subseteq \operatorname{im} f$ toujours vrai donc égalité par égalité des dimensions.

$\boxed{2 \Rightarrow 3}$ On a toujours $\ker f \subseteq \ker f^2$ et, par le théorème du rang, $\dim(\ker f^2) + \operatorname{rg} f^2 = n = \dim(\ker f) + \underbrace{\operatorname{rg}(f)}_{=\operatorname{rg} f^2}$. Donc $\dim(\ker f^2) = \dim(\ker f)$ et on conclut comme au dessus.

$\boxed{3 \Rightarrow 4}$ On commence par montrer que la somme est directe. Soit $x \in \ker f \cap \operatorname{im} f$. Alors $\exists z \in E, f(z) = x$ et $f(x) = 0$ donc $f^2(z) = 0$ mais $\ker f = \ker f^2$ donc $z \in \ker f$ donc $x = 0$. Donc $\operatorname{im} f$ et $\ker f$ sont en somme directe et, par le théorème du rang, $\operatorname{im} f \oplus \ker f = E$.

$\boxed{4 \Rightarrow 2}$ Il suffit de montrer que $\operatorname{im} f \subseteq \operatorname{im} f^2$. Soit $y \in \operatorname{im} f$, i.e. $\exists x \in E, f(x) = y$. Par hypothèse $\exists z, w \in \ker f \times E, x = z + f(w)$ donc $y = f(z + f(w)) = f^2(w)$ donc $y \in \operatorname{im} f^2$.

Exercice 22 (correction)

Puisque X^2 est un polynôme annulateur f possède pour unique valeur propre 0. De plus le polynôme minimal de f est X ou X^2. Si c'est X alors f est l'endomorphisme nul et $g = 0$ et v quelconque conviennent. Supposons donc que X^2 est le polynôme minimal de f. Puisque X^2 est scindé dans $\mathbb{R}$, f est trigonalisable. Dans une base bien choisie la matrice de f s'écrit donc

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \alpha & \gamma \\ 0 & 0 & \beta \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

avec $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0,0,0)$. Puisque $M^2 = 0$ on a $\alpha\beta = 0$ donc $\alpha = 0$ ou $\beta = 0$. Dans chacun des cas on a $\operatorname{rg}(f) = 1$. Puisque f est de rang 1 il existe $v \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ tel que $\operatorname{im} f \in \operatorname{Vect}(v)$, i.e. $\forall x \in \mathbb{R}^3, \exists g(x) \in \mathbb{R}, f(x) = g(x)v$. La linéarité de g provient de celle de f.

Exercice 23 (correction)

1. Soit $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ une valeur propre de A. Soit $V \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ un vecteur propre. On a $AV = \lambda V$ donc, en passant au conjugué $A\overline{V} = \overline{\lambda V}$. Puisque $\lambda \neq \overline{\lambda}$ par hypothèse alors $\overline{\lambda}$ est une valeur propre de A distincte de λ.
2. Soit $V \in \mathbb{C}^2 \setminus \{(0,0)\}$ un vecteur propre. On a $AV = \lambda V$ donc, en passant au conjugué $A\overline{V} = \overline{\lambda V}$. On a donc $V \neq \overline{V}$ sinon on aurait un même vecteur non nul dans deux espaces propres distincts ce qui est absurde. On a donc $V = W_1 + iW_2$ avec $W_1, W_2 \in \mathbb{R}^2$ et $W_2 \neq 0$. On pose $\lambda = a + ib$. On a alors

$$AV = \lambda V \Leftrightarrow AW_1 + iAW_2 = aW_1 - bW_2 + i(bW_1 + aW_2) \Leftrightarrow \begin{cases} AW_1 = aW_1 - bW_2 \\ AW_2 = bW_1 + aW_2 \end{cases} \tag{3}$$

On remarque que la famille (W_1, W_2) est une base de $\mathbb{R}^2$ car sinon on avait $W_1 = \gamma W_2$ on aurait $V = (\gamma + i)W_2$ et $\overline{V} = (\gamma - i)W_2$ et on aurait alors $V, \overline{V} \in \operatorname{Vect}_{\mathbb{C}}(W_2)$ ce qui est absurde car ils doivent être dans des espaces propres distincts. On pose alors Q la matrice réelle dont les colonnes sont les vecteurs de la base (W_1, W_2) donc, d'après la relation (3)

$$Q^{-1}AQ = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}.$$

Exercice 24 (correction)

1. On a $u(X^k) = (X+1)^k = X^k +$ termes de degré $\leq k-1$. Donc la matrice A de u dans la base canonique est triangulaire avec des 1 sur la diagonale. Son polynôme caractéristique est donc $\chi_u(X) = (X-1)^n$.
2. D'après la question précédente u est trigonalisable (la base canonique est même une base qui le trigonalise). Elle n'est évidemment pas diagonale car, dans cette base, il y a des termes non-nuls au dessus de la diagonale (donc $\ker(u - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(1)$ de dimension $1 < n$).
3. On remarque que $A - I_n$ est nilpotente, i.e. $(A - I_n)^n = 0$. Puisque A commute avec I_n on peut appliquer le binôme de Newton qui donne

$$(A - I_n)^n = A^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k A^k = 0$$

donc en termes d'endomorphismes on a

$$(u - \mathrm{id})^n = u^n + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} (-1)^k u^k = 0.$$

On remarque qu'on a $(X^k)(u)(P) = u^k(P) = P(X+k)$ ce qui donne la réponse à la question pour $a_k = \binom{n}{k}(-1)^k$.

Exercice 25 (correction)

On commence par remarquer que si $f \in \mathcal{L}(E)$ est un endomorphisme, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, $\chi_f(f) = f^n + \cdots + a_1 f + (-1)^n \det(f)\,\mathrm{id} = 0$ donc, si f inversible [5]

$$f \frac{1}{(-1)^{n+1}\det(f)} \left(f^{n-1} + \cdots + a_1\,\mathrm{id} \right) = \mathrm{id}$$

i.e. l'inverse de f est $f^{-1} = \dfrac{1}{(-1)^{n+1}\det(f)} \left(f^{n-1} + \cdots + a_1\,\mathrm{id} \right) \in \mathbb{K}[f]$. On en déduit que si $P(u)$ est inversible alors son inverse est dans $\mathbb{K}[P(u)] \subseteq \mathbb{K}[u]$. On le note désormais $Q(u)$. On a alors $P(u) \circ Q(u) = \mathrm{id}$ ce qui signifie que $PQ - 1$ est un polynôme annulateur de u donc il est dans l'idéal engendré par μ_u donc il existe $H \in \mathbb{K}[X]$ tel que $PQ + Hu = 1$ donc P et u sont premiers entre eux d'après l'identité de Bézout. La réciproque fonctionne pareil.

Exercice 26 (correction)

1. On a

$$\begin{aligned}
\Phi^2(u) &= \Phi(u + \mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{id}) = u + \mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{id} + \mathrm{Tr}(u)\Phi(\mathrm{id}) \\
&= u + \mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{id} + \mathrm{Tr}(u)(\mathrm{id} + n\,\mathrm{id}) = u + (n+2)\,\mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{id} \\
&= (n+2)u + (n+2)\,\mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{id} - (n+1)u \\
&= (n+2)\Phi(u) - (n+1)\,\mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}(u).
\end{aligned}$$

2. Le polynôme $X^2 - (n+2)X + n + 1$ est annulateur de u. Par ailleurs, on a $X^2 - (n+2)X + n + 1 = (X-1)(X-(n+1))$. Puisqu'il est scindé à racines simples Φ est diagonalisable. On a $u \in \ker\left(\Phi - \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}\right)$ si, et seulement si $\mathrm{Tr}(u) = 0$. On a donc $\ker\left(\Phi - \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}\right) = \ker(\mathrm{Tr})$ qui est un hyperplan de $\mathcal{L}(E)$ donc de dimension $n^2 - 1$. Enfin, on a $\Phi(\mathrm{id}) = (n+1)\,\mathrm{id}$ donc $\mathrm{Vect}(\mathrm{id}) \subseteq \ker\left(\Phi - (n+1)\,\mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}\right)$. Or puisque $\ker\left(\Phi - \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}\right)$ et $\ker\left(\Phi - (n+1)\,\mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}\right)$ sont en somme directe on a $\dim\left(\ker\left(\Phi - (n+1)\,\mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}\right)\right) = 1$ donc

$$\mathcal{L}(E) = \ker\left(\Phi - \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}\right) \oplus \ker\left(\Phi - (n+1)\,\mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}\right) = \ker(\mathrm{Tr}) \oplus \mathrm{Vect}(\mathrm{id}).$$

5. Le même argument fonctionne sans utiliser Cayley-Hamilton en prenant le polynôme minimal au lieu du polynôme caractéristique, il suffit alors de remarque que le terme constant du polynôme minimal est un produit de valeurs propres (ces dernières sont non nulles car f inversible).

3. Le déterminant de Φ est le produit des valeurs propres comptées avec multiplicité, donc $\det(\Phi) = n + 1$.

Exercice 27 (correction)

On remarque en effet que $(\Phi - \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)})(u) = \mathrm{Tr}(u)\,\mathrm{id}_E$ qui est nul dès lors que $\mathrm{Tr}(u) = 0$. On a donc $\ker\left(\Phi - \mathrm{id}_{\mathcal{L}(E)}\right) = \ker \mathrm{Tr}$. Puisque Tr est une forme linéaire son noyau est de dimension $\dim(\mathcal{L}(E)) - 1 = n^2 - 1$. Ainsi, 1 est valeur propre de multiplicité au moins $n^2 - 1$. On note λ la dernière valeur propre. Elle satisfait $\mathrm{Tr}(\Phi) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n^2-1 \text{ fois}} + \lambda$ donc $\lambda = \mathrm{Tr}(\Phi) - n^2 + 1$. Il suffit donc de déterminer la trace de Φ. On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E et une base u_{ij} de $\mathcal{L}(E)$ avec u_{ij} définie par $u_{ij}(e_j) = e_i$ (si on identifiait $\mathcal{L}(E)$ à $M_n(\mathbb{K})$ via l'isomorphisme $u \mapsto M_{\mathcal{B},\mathcal{B}}(u)$ il u_{ij} seraient les matrices élémentaire $E_{ij} = \left(\delta_{ij}\right)$). Ce qui nous intéresse c'est de savoir seulement les coefficients diagonaux de Φ dans la base (u_{ij}) c'est à dire pour tout (i, j) déterminer le coefficient en u_{ij} de $\Phi(u_{ij})$. On a $\Phi(u_{ij}) = u_{ij} + \mathrm{Tr}(u_{ij})\,\mathrm{id}_E$. Si $i \neq j$ alors $\mathrm{Tr}(u_{ij}) = 0$ donc le coefficient en u_{ij} de $\Phi(u_{ij})$ est 1. Sinon $\mathrm{Tr}(u_{ii}) = 1$ et $\mathrm{id}_E = u_{11} + \cdots + u_{nn}$ donc le coefficient en u_{ii} de $\Phi(u_{ii})$ est 2. On a donc

$$\mathrm{Tr}(\Phi) = \underbrace{1 + \cdots + 1}_{n^2-n \text{ fois}} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{n \text{ fois}} = n^2 - n + 2n = n^2 + n = n^2 - 1 + \lambda \text{ donc } \lambda = n + 1.$$

On en déduit donc que la dernière valeur propre est $n + 1$ avec multiplicité au moins 1 car c'est une valeur propre et au plus 1 car $\dim(\ker(\Phi - \mathrm{id}_{\mathcal{L}})) = n^2 - 1$. On en déduit aussi que 1 est de multiplicité exactement $n^2 - 1$ donc Φ est diagonalisable et, en considérant son déterminant dans une base qui la diagonalise on a $\det(\Phi) = n + 1$.

Exercice 28 (correction)

1. (a) Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(g)$ et $M \in \ker(g - \lambda\,\mathrm{id}_{M_n(\mathbb{K})}) \setminus \{0\}$ alors $g(M) = AM = \lambda M$. En notant $M = (c_1 \cdots c_n)$ avec c_j les colonnes de M on a
$$AM = (Ac_1 \cdots Ac_n) = (\lambda c_1 \cdots \lambda c_n), \text{ i.e. } \forall j, Ac_j = \lambda c_j.$$
Puisque M est non-nulle, une de ses colonnes est non nulle donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$. Réciproquement si $\lambda \in \mathrm{Sp}(A)$ et X est un vecteur propre associé à λ on a $A(X 0 \cdots 0) = (\lambda X 0 \cdots 0)$. Donc la matrice donnée par ses colonnes $M = (X 0 \cdots 0)$ est un vecteur propre de g donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(g)$.
   (b) On remarque que $\mathrm{Sp}(A) = \mathrm{Sp}(A^T)$ (même polynômes caractéristiques/minimaux). Si on a $\lambda \in \mathrm{Sp}(d)$ et $M \in \ker(g - \lambda\,\mathrm{id}_{M_n(\mathbb{K})}) \setminus \{0\}$ alors $MA = \lambda M$ donc on a $LA = \lambda L$ pour chaque ligne L de M donc $A^T L^T = \lambda L^T$. Puisque M non nulle elle a une ligne L non nulle et dans ce cas L^T est un vecteur propre de A^T associé à λ donc $\lambda \in \mathrm{Sp}(A^T) = \mathrm{Sp}(A)$. On montre de la même façon que $\mathrm{Sp}(A^T) \subseteq \mathrm{Sp}(d)$.

   Je me permets de mentionner une solution plus astucieuse qui permet de répondre aux deux questions en même temps. On a $g^k(M) = A^k M$ et, plus généralement, $\forall P \in \mathbb{K}[X], P(g)(M) = P(A)M$. Cette relation permet de prouver que g et A ont les mêmes polynômes annulateurs. En particulier, ils ont les mêmes polynômes minimaux ce qui, non seulement donne l'égalité des spectres mais permet aussi de justifier que l'un est diagonalisable si, et seulement si l'autre l'est. Bien évidemment, cela marche aussi pour d.
2. Puisque d et g sont simultanément trigonalisable, en choisissant une base $\mathcal{B}$ de $M_n(\mathbb{K})$ qui les trigonalise on a $M_{\mathcal{B}}(\varphi)$ triangulaire avec sur chaque coefficient diagonal la somme d'une valeur propre de g et d'une de d ce qui prouve que $\mathrm{Sp}(\varphi) \subseteq \{\lambda + \mu \mid \lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(A)\}$ d'après la question 1. Réciproquement si on considère $\lambda, \mu \in \mathrm{Sp}(A)$ et $X \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre de A associé à λ et $Y \in M_{n,1}(\mathbb{K})$ un vecteur propre de A^T associé à μ alors $M = XY^T \in M_n(\mathbb{K})$ et on a
$$\varphi(M) = AM + MA = AXY^T + XY^T A = \lambda XY^T + X(A^T Y)^T = \lambda XY^T + X(\mu Y)^T = (\lambda + \mu)XY^T.$$
Par ailleurs, puisque $X \neq 0$ et $Y \neq 0$ alors $XY^T \neq 0$ (il s'agit d'une matrice de rang 1, d'ailleurs elles s'écrivent toutes ainsi !).
3. Puisque φ est un endomorphisme il faut et il suffit que $\ker(\varphi) = \{0\}$ pour que ce soit un automorphisme. Or $\ker(\varphi)$ est l'espace propre associé à 0. Donc il faut et il suffit que φ n'admette pas 0 comme valeur propre. Ceci équivaut, par la question 2, à ce que A n'admette pas une valeur propre λ et son opposée $-\lambda$.
4. *(Bonus)* À terminer, la question ne figurait pas dans l'énoncé original.

Exercice 29 (correction)

Soit λ une valeur propre non nulle et $x \in E\setminus\{0\}$ un vecteur propre de $u\circ v$, i.e. $u(v(x)) = \lambda x$. On a alors $(v\circ u)(v(x)) = v(u(v(x))) = v(\lambda x) = \lambda v(x)$. Ainsi, on est tenté de dire $v(x)$ est un vecteur propre associé à λ. Pour cela il faudrait que $v(x)$ soit non nul. Si $v(x) = 0$ alors $u(v(x)) = \lambda x = 0$ ce qui impose $\lambda = 0$ (car la famille (x) est libre ou par l'absurde, attention à ne pas justifier « $\lambda x = 0$ donc $\lambda = 0$ »avec un argument d'intégrité). On en déduit que $u\circ v$ et $v\circ u$ ont les mêmes valeurs propres non nulles.

Il reste à traiter le cas où $\lambda = 0$ est une valeur propre. On remarque que l'espace propre associé est $\ker(u\circ v)$ qui est réduit à 0 si, et seulement si 0 n'est pas valeur propre et si, et seulement si $u\circ v$ inversible.

Ainsi on a

$$0 \text{ valeur propre de } u\circ v \Leftrightarrow \det(u\circ v) = 0 \Leftrightarrow \det(v\circ u) = 0 \Leftrightarrow 0 \text{ valeur propre de } v\circ u.$$

Exercice 30 (correction)

1. On suppose que A est inversible. On a

$$\chi_{AB}(X) = \det(AB - XI_n) = \det(A)\det(B - XA^{-1}) = \det(B - XA^{-1})\det(A) = \det(BA - XI_n) = \chi_{BA}.$$

2. Pour tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel V de dimension finie m, l'application $\det : \operatorname{End}(V) \longrightarrow \mathbb{K}$ est continue (polynôme en les coefficients lorsqu'on fixe une base qui permet d'identifier $\operatorname{End}(V)$ à $M_m(\mathbb{K})$). De même l'application

$$\begin{array}{rcl} M_n(\mathbb{K}_n[X]) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}_n[X]) \\ B & \longmapsto & AB - I_nX \end{array}$$

est continue (il s'agit de la somme d'une application linéaire en dimension finie donc continue et d'une application constante). Ainsi $B \longmapsto \det(AB - XI_n) = \chi_{AB}$ est continue.

On fixe $A \in M_n(\mathbb{K})$. L'application continue $B \longmapsto \chi_{AB} - \chi_{BA}$ définie sur $M_n(\mathbb{K})$ coïncide, d'après la question précédente, avec l'application nulle sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$. Or $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ est une partie dense de $M_n(\mathbb{K})$ donc pour toute matrice $A, B \in M_n(\mathbb{K})$, $\chi_{AB} = \chi_{BA}$.

Exercice 31 (correction)

On trigonalise A dans $\mathbb{C}$. Il existe donc une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ et une matrice $T \in M_n(\mathbb{C})$ triangulaire telles que $A = P^{-1}TP$. Par téléscopage on a

$$\exp(A) = P^{-1}\exp(T)P.$$

Or sur la diagonale de T on trouve les valeurs propres de A et $\exp(T)$ est toujours triangulaire et sur sa diagonale on a l'exponentielle des valeurs propres de A. Si on note $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ ses valeurs propres on a donc

$$\det(\exp(A)) = \det(\exp(T)) = \prod_{i=1}^{n} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{n} \lambda i} = e^{\mathrm{Tr}(A)}.$$

Exercice 32 (correction)

1. Il suffit de montrer qu'il s'agit d'un sous espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. On pose $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de f associés aux valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Soit $g \in C_f$ ceci revient à dire que g commute avec f sur la base $\mathcal{B}$. Ainsi on a $\forall i, f(g(e_i)) = g(f(e_i)) = \lambda_i g(e_i)$, i.e. $g(e_i) \in E_{\lambda_i}$ donc $g(E_{\lambda_i}) \subseteq E_{\lambda_i}$. La commutativité et la stabilité pouvant se caractériser sur une base on peut remonter notre raisonnement étape par étape dans l'autre sens pour terminer la preuve.

3. La question précédente prouve que l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi\colon & C_f & \longrightarrow & \bigoplus_\lambda \mathcal{L}(E_\lambda) \\ & g & \longmapsto & (g_{|E_\lambda})_\lambda \end{array}$$

est bien définie. Elle est injective car si $\phi(g) = 0$ alors g est nulle sur tous les espaces propres et la somme directe de ces derniers est E tout entier donc $g = 0$. Elle est surjective car étant donné $(g_\lambda) \in \bigoplus_\lambda \mathcal{L}(E_\lambda)$ on a $g = \sum_\lambda g_\lambda$ qui commute avec f et qui satisfait $\phi(g) = (g_\lambda)_\lambda$.
Enfin, puisque f est diagonalisable on a $\dim E_\lambda = \alpha_\lambda$ pour tout λ. D'où $\dim \mathcal{L}(E_\lambda) = \alpha_\lambda^2$ puis la somme voulue par somme directe des espaces propres.

4. D'après la question précédente on a $\dim C_g = n$. Il suffit donc de prouver que la famille $\left(\mathrm{id}_E, f, f^2, \dots, f^{n-1}\right)$ est libre. Supposons qu'on ait une relation

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i f^i = 0 \tag{4}$$

Soit λ une valeur propre et $v \in E_\lambda \setminus \{0\}$. Lorsqu'on applique v à l'endomorphisme (L_i) on obtient $(\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i) \cdot v = 0$ donc $\sum_{i=0}^{n-1} a_i \lambda^i = 0$. Autrement dit, toutes les valeurs propres de f sont annulées par un polynôme de degré $\leq n-1$ qui a donc au plus $n-1$ racines ce qui est absurde. Donc la famille est libre et il s'agit d'une base.

Exercice 33 (correction)

1. Par le théorème du rang $\ker(A)$ est de dimension $n-1$. On considère une base $(e_1, \dots, e_{n-1})$ de $\ker(A)$ que l'on complète par un vecteur $v \notin \ker(A)$. Dans une telle base la matrice de A s'écrit

$$B = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & c_1 \\ 0 & \dots & 0 & c_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & c_n \end{pmatrix}.$$

donc $\mathrm{Tr}(A) = c_n$ et on voit alors par un calcul immédiat que $B(B - \mathrm{Tr}(B)I) = 0$ donc $PBP^{-1}(PBP^{-1} - \mathrm{Tr}(PBP^{-1})) = A(A - \mathrm{Tr}(A)I) = 0$.
J'en profite pour mentionner une autre très jolie (mais moins intuitive) preuve de cette question. Il est possible de prouver que si A est de rang 1 si, et seulement s'il existe une matrice ligne L et une matrice colonne C telles que $A = CL$ (exercice). On a alors $A^2 = CLCL = C(LC)L = (LC)CL = (LC)A$ car le produit LC est un scalaire. Par ailleurs, $\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}(CL) = \mathrm{Tr}(LC) = LC$.

2. Puisque $X(X - \mathrm{Tr}(A))$ est annulateur le polynôme minimal de A est soit X, soit $X - \mathrm{Tr}(A)$ soit $X(X - \mathrm{Tr}(A))$. Il ne peut être X car A de rang 1 donc non nulle, ça ne peut pas être $X - \mathrm{Tr}(A)$ car $\mathrm{Tr}(A)I$ est soit nulle soit inversible. Donc $\mu_A(X) = X(X - \mathrm{Tr}(A))$ et A est diagonalisable si, et seulement si μ_A est scindé à racines simples, i.e. si, et seulement si $\mathrm{Tr}(A) \neq 0$.
On suppose que $\mathrm{Tr}(A) = 0$ et on considère $e_1 = Av$ un vecteur directeur de $\mathrm{im}(A)$. Puisque $A^2 = 0, e_1 \in \ker(A)$. On complète la famille libre (e_1) en une base $(e_1, e_2, \dots, e_{n-1})$ de $\ker(A)$. Puisque $v \notin \ker(A)$ la famille $(e_1, \dots, e_{n-1}, v)$ est une base de $\mathbb{R}^n$ dans laquelle A a bien la forme voulue.

3. La matrice est bien de rang 1 car $c_j = \frac{1}{j} c_1$ où c_j désigne la j-ème colonne de A. Sa trace est $1 + 1 + \dots + 1 = n \neq 0$ donc A est bien diagonalisable. Les relations sur les colonnes nous donnent une base de $\ker(A)$. En effet, on a $(1, 0, \dots, -j, 0, \dots, 0) \in \ker(A)$ et ces vecteurs forment une famille libre de $n-1$ vecteurs. Enfin, on remarque que $(1, 2, \dots, n) \in \ker(A - nI_n)$ ce qui complète la base de vecteurs propres.

Exercice 34 (correction)

Les applications $P \mapsto P(X^2+1)$ et $Q \mapsto Q^{(n)}$ étant linéaires (à valeurs dans $\mathbb{R}[X]$ cependant) f est bien linéaire par composition. Si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ alors $\deg P(X^2+1) = 2 \deg P$ et donc $\deg P(X^2+1)^{(n)} = \min(0, 2\deg P - n)$. Donc f définit bien un endomorphisme. Regardons à quoi elle ressemble sur les monômes X^m pour $0 \leq m \leq n$.

On a

$$\begin{aligned} f(X^m) &= \left(\left(X^2+1\right)^m\right)^{(n)} \\ &= \left(X^{2m} + \text{ termes de degré } < 2m\right)^{(n)} \\ &= \begin{cases} 0 \text{ si } 2m < n \\ 2m\cdot(2m-1)\cdots(2m-n+1)\cdot X^{2m-n} + \text{ termes de degré } < 2m-n \end{cases} \end{aligned}$$

Puisque $2m-n \leq m$ la matrice de f dans la base canonique est triangulaire supérieure et puisque $2m-n < m$ si $m < n$ elle n'a que des 0 sur la diagonale sauf pour la dernière colonne. On distingue maintenant deux cas. Si $n = 1$ alors la matrice de f est tout simplement $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ qui est diagonale donc fin du problème. Sinon on considère $f(X^{n-1}) = 2(n-1)\cdot(2n-3)\cdots(n-1)\cdot X^{n-2}+$ termes de degré $< 2m-n \neq 0$ donc $\mathrm{Vect}(X^{n-1}, X^n) \cap \ker f = \{0\}$. Autrement dit, $\dim\ker f \leq n-2$ or 0 est une valeur propre de multiplicité $n-1$. Donc f n'est pas diagonale.

Exercice 35 (correction)

1. Puisque $J^2 = I$ on a $S^2(M) = J\cdot JMJ\cdot J = J^2MJ^2 = M$.
2. On fait une analyse-synthèse.

   Analyse : Si une telle décomposition existe alors pour toute matrice $M \in M_2(\mathbb{R})$ on a $M = M_1 + M_2$ avec $M_1 \in F$ et $M_2 \in G$. On a alors $S(M) = M_1 - M_2$ qui donne $M + S(M) = 2M_1$ et donc $M_1 = \frac{1}{2}(M + S(M))$ et $M_2 = \frac{1}{2}(M - S(M))$.

   Synthèse : On a bien $S\left(\frac{1}{2}(M+S(M))\right) = \frac{1}{2}(M+S(M))$ et $S\left(\frac{1}{2}(M-S(M))\right) = \frac{1}{2}(S(M)-M) = -\frac{1}{2}(M-S(M))$ donc les matrices que l'on trouve sont bien des solutions.

   Puisque partant d'une décomposition générale dans l'analyse on aboutit à une unique écriture des solutions la décomposition est unique et la somme est directe.
3. Les espaces F et G sont respectivement $\ker(S - \mathrm{id})$ et $\ker(S + \mathrm{id})$. On en déduit que -1 et 1 sont les seules valeurs propres de S et que S est diagonalisable (car décomposition de $M_2(\mathbb{R})$ en sous-espaces propres de S).
4. On voit facilement que I et J sont dans F et que $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ sont dans G et qu'elles sont linéairement indépendantes. On en déduit que $\dim F \geq 2$ et $\dim G \geq 2$ donc les deux sont de dimension 2.

Exercice 36 (correction)

On remarque d'abord que, puisque la première et la dernière colonne sont identiques M_z admet 0 pour valeur propre avec multiplicité au moins 1 car $\dim\ker M_z = 1$ par le théorème du rang. Le polynôme caractéristique est $\chi_z(X) = X(X^2 - zX - 2)$ donc 0 est toujours de multiplicité 1. Si $X^2 - zX - 2$ est à racines simples M_z est diagonalisable. Autrement on a $\Delta = z^2 + 8 = 0$, i.e. $z = \pm 2i\sqrt{2}$ et la valeur propre correspondante est alors $\lambda = \pm i\sqrt{2}$. On a $M_{\pm 2i\sqrt{2}} - \pm i\sqrt{2}I_3 = \begin{pmatrix} \mp i\sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \pm i\sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \mp i\sqrt{2} \end{pmatrix}$ qui est de rang 2 (de rang au plus 2 puisqu'elle est non inversible par définition et de rang au moins 2 car deux colonnes sont libres). Donc $\dim\ker(M_{\pm 2i\sqrt{2}} - \pm i\sqrt{2}I_3) = 1$ par le théorème du rang. Or $\pm i\sqrt{2}$ de multiplicité $2 \neq 1$ donc

$$M_z \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow z \notin \left\{2i\sqrt{2}, -2i\sqrt{2}\right\}.$$

Exercice 37 (correction)

Le polynôme caractéristique de M_z est $\chi_z(X) = X^3 - z(X+1)$. Une condition nécessaire pour que M_z ne soit pas diagonalisable est que $\chi_z(X)$ ait une racine double ou triple. Les racines de $\chi_z'(X) = 3X^2 - z$ sont $\pm\alpha$ avec $\alpha^2 = \frac{z}{3}$. On a $\chi_z(\alpha) = z\left(\frac{\alpha}{3} - \alpha - 1\right) = -\frac{z}{3}(2\alpha+3)$. Donc une condition nécessaire pour que M_z ne soit pas diagonalisable est que $z = 0$ ou $\alpha = -\frac{3}{2}$. Dans le premier cas $z = 0$ on a évidemment M_z non diagonalisable (triangulaire non nulle avec une seule valeur sur la diagonale). Dans le second cas $\alpha^2 = \frac{z}{3} = \frac{9}{4}$, i.e. $z = \frac{27}{4}$ et la racine multiple est $-\frac{3}{2}$. La matrice $M_{27/4} + \frac{3}{2}I_3$ est de rang 2 car elle ne peut pas être de rang 3 puisque $-\frac{3}{2}$ est une valeur propre et possède deux colonnes qui forment une famille libre. Donc son noyau est de dimension 1 pourtant la multiplicité de $\frac{-3}{2}$ est au moins 2 donc $M_{27/4}$ n'est pas diagonalisable. En résumé

$$M_z \text{ diagonalisable } \Leftrightarrow z \notin \left\{0, \frac{27}{4}\right\}.$$

Exercice 38 (correction)

1. Les deux première colonnes forment une famille libre, les deux suivantes sont évidemment liées donc A est de rang 2. Par le théorème du rang A le noyau de A est de dimension 2. Autrement dit, 0 est une valeur propre de multiplicité au moins 2 donc $\chi_A = X^2(X-\lambda)(X-\mu)$.
2. La trace de A est la somme des valeurs propres donc $\lambda + \mu = k$; On peut faire de même avec A^2 dont la trace est k^2+6 (inutile de calculer les coefficients hors diagonale) et dont les valeurs propres sont les carrés des valeurs propres de A donc λ^2, μ^2 et 0 d'où le système.
   On a $(\lambda+\mu)^2 = \lambda^2 + \mu^2 + 2\lambda\mu$ on en déduit que $\lambda\mu = -3$ et donc que λ et μ sont les racines du polynôme de degré 2, $P = X^2 - kX - 3$. Ces dernières sont $\frac{k \pm \sqrt{k^2+12}}{2}$ (attention k étant complexe on commet un petit abus en notant $\sqrt{k^2+12}$ il faut comprendre qu'on fixe une des racines de k^2+12 puisque, contrairement aux réels, dans le cas complexe on ne peut en choisir une canoniquement).
3. La matrice est diagonalisable si et seulement si les valeurs propres sont de multiplicité la dimension de l'espace propre associé. Il faut donc que λ et μ soient tous deux différents de 0 sinon la multiplicité sera plus grande que la dimension à savoir 2. On voit bien dans le système de la question 2. que ni l'un ni l'autre ne peut valoir 0 (sans quoi $6 = 0$). Donc on peut écarter ce cas. Si λ et μ sont distinctes il n'y a pas de problème.
   Il reste à traiter le cas où $\lambda = \mu$, i.e. $\Delta = \sqrt{k^2+12} = 0$ donc $k = \pm 2i\sqrt{3}$. On ne traite que le cas $k = 2i\sqrt{3}$ car l'autre est similaire. On remarque qu'alors on a $\lambda = \mu = i\sqrt{3}$ et on a $A - \lambda I_4 = \begin{pmatrix} -i\sqrt{3} & 1 & 0 & 0 \\ 1 & i\sqrt{3} & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -i\sqrt{3} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -i\sqrt{3} \end{pmatrix}$. Cette dernière est évidemment une matrice de rang ≥ 3 (les colonnes $1, 3$ et 4 forment une famille libre) et de rang ≤ 3 car, par définition de λ la matrice n'est pas inversible. Il s'agit donc d'une valeur propre de multiplicité 2 dont l'espace propre est de dimension 1 (l'espace propre associé est Vect $\begin{pmatrix} 1 & i\sqrt{3} & 1 & 1 \end{pmatrix}$). La matrice n'est donc pas diagonalisable. Enfin, on peut conclure que A est diagonalisable si, et seulement si, $k \notin \left\{\pm 2i\sqrt{3}\right\}$.

Exercice 39 (correction)

1. (a) Puisque M est triangulaire on peut lire ses valeurs propres sur la diagonale qui sont $6, 3$ et 2. Ces trois valeurs propres étant distinctes M est bien diagonalisable. On trouve comme vecteurs propres $v_6 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$ respectivement.

(b) D'après la question précédente on a $M = PDP^{-1}$ avec

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Donc, par téléscopage on a $M^n = PD^nP^{-1}$ ce qui donne

$$M^n = \begin{pmatrix} 6^n & 6^n - 3^n & 6^n - 4 \cdot 3^n + 3 \cdot 2^n \\ 0 & 3^n & 4 \cdot 3^n - 4 \cdot 2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

2. (a) On a, par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} x_{n+1} &= \mathbb{P}(X_{n+1} = 0) \\ &= \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 0)}_{=1} \mathbb{P}(X_n = 0) + \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 1)}_{=\frac{1}{2}} \mathbb{P}(X_n = 1) + \underbrace{\mathbb{P}(X_{n+1} = 0 | X_n = 2)}_{=0} \mathbb{P}(X_n = 2) \\ &= x_n + \frac{1}{2} y_n \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} y_{n+1} &= \frac{1}{2} y_n + \frac{2}{3} z_n \\ z_{n+1} &= \frac{1}{3} z_n \end{aligned}$$

En conclusion $U_{n+1} = \frac{1}{6} M U_n$.

(b) On en déduit par une récurrence immédiate que pour tout $n \in \mathbb{N}, U_n = \frac{1}{6^n} M^n U_0$ et on a $U_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ par hypothèse. Donc

$$U_n = \begin{pmatrix} 1 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n + 3 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n - 4 \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

(c) On a donc bien $x_n \to 1$ et $y_n, z_n \to 0$, la probabilité que les boules blanches disparaissent tend bien vers 0.

Exercice 40 (correction)

1. La matrice $M(1,0) + I_n$ est la matrice avec seulement des 1 en entrée. Elle est donc de rang 1 et son noyau est de dimension $n-1$ d'après le théorème du rang. On en déduit que -1 est une valeur propre de multiplicité au moins $n-1$. On note λ la dernière valeur propre. On considérant la trace, on a $-1 \times (n-1) + \lambda = 0$ donc $\lambda = n-1$. Donc les valeurs propres de $M(1,0)$ sont -1 avec multiplicité $n-1$ et $n-1$ avec multiplicité 1 donc $P_{1,0}(X) = (X - (n-1))(X+1)^n$.
2. On a

$$\begin{aligned} P_{a,b}(X) &= \det(XI_n - M(a,b)) = \det(XI_n - bI_n - aM(1,0)) \\ &= \det\left(a\left(\frac{X-b}{a} I_n - M(1,0)\right)\right) = a^n \det\left(\frac{X-b}{a} I_n - M(1,0)\right) \\ &= a^n P_{1,0}\left(\frac{X-b}{a}\right). \end{aligned}$$

Donc μ racine de $P_{a,b}$ si et seulement si $\frac{\mu-b}{a} = n-1$ i.e. $\mu = b+(n-1)a$ ou $\mu = b-a$. De plus, puisque $b-a = b+(n-1)a$ équivaut à $a=0$ les multiplicités sont respectivement 1 et $n-1$.

3. La matrice $M(a,b)-(b-a)I_n$ est la matrice $a(1)_{1\leq i,j\leq n}$, la matrice avec que des a en entrée. La matrice $M(a,b)-(b+(n-1)a)I_n$ est la même mais avec des $-(n-1)a$ sur la diagonale. Le produit est facile à calculer ; les entrées sont toutes $\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n-1 \text{ fois}} -(n-1) = 0$.
4. Si $a=0$ alors $M(a,b)$ est diagonale (donc diagonalisable). Sinon $Q_{a,b}(X)$ est un polynôme annulateur de $M(a,b)$ à racines simples donc $M(a,b)$ est diagonalisable.
5. On écrit le reste $R(X) = \alpha X + \beta$ et $T \in \mathbb{C}[X]$ tel que

$$X^k = TQ_{a,b} + R.$$

En évaluant en $(b-a)$ on a $(b-a)^k = \alpha(b-a)+\beta$ et en évaluant en $b+(n-1)a$ on a $(b+(n-1)a)^k = \alpha(b+(n-1)a)+\beta$. En soustrayant ces deux équations on a

$$\alpha = \frac{1}{n}\left((b+(n-1)a)^k - (b-a)^k\right)$$
$$\beta = \frac{n+1}{n}(b-a)^k - \frac{1}{n}(b+(n-1)a)^k.$$

On a donc

$$M(a,b)^k = T(M(a,b))Q_{a,b}(M(a,b)) + R(M(a,b)) = R(M(a,b)) = \alpha M(a,b) + \beta I_n$$

(simplifiez les calculs si ça vous amuse !).

Exercice 41 (correction)

On remarque que $\Phi^2(A) = A$ donc Φ est une symétrie par rapport à $\ker(\Phi - \mathrm{id})$ parallèlement à $\ker(\Phi+\mathrm{id})$ donc de polynôme minimal X^2-1 (ce n'est ni l'identité ni l'opposé de l'identité). L'espace $\ker(\Phi-\mathrm{id})$ (resp. $\ker(\Phi+\mathrm{id})$) est l'ensemble des matrices symétriques (resp. antisymétriques) donc de dimension $\frac{n(n+1)}{2}$ (resp. de dimension $\frac{n(n-1)}{2}$). Donc, dans une base de vecteur propres la matrice de Φ s'écrira comme une diagonale avec $n(n+1)/2$ valeurs 1 sur la diagonale et $n(n-1)/2$ valeurs -1. Son déterminant est donc $(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}$ qui vaut 1 si et seulement si $n = 0,1 \mod 4$. Sa trace est $\mathrm{Tr}(\Phi) = \dfrac{n(n+1)}{2} - \dfrac{n(n-1)}{2} = n$.

Exercice 42 (correction)

L'application définie par $\langle M,N\rangle = \mathrm{Tr}(M^TN)$ est bien bilinéaire et symétrique car $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \mathrm{Tr}(A^T) = \mathrm{Tr}(A)$. Par ailleurs,

$$\mathrm{Tr}(M^TM) = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n m_{ik}^T m_{ik} = \sum_{i=1}^n\sum_{k=1}^n m_{ik}^2$$

donc $\mathrm{Tr}(M^TM) = 0 \Rightarrow M = 0$ ce qui prouve que $\langle\ ,\ \rangle$ définit bien un produit scalaire.

On propose alors deux méthodes pour conclure.

Méthode 1 : On remarque alors que

$$\begin{aligned}\langle f(M),N\rangle &= \mathrm{Tr}(f(M)^TN) = \mathrm{Tr}\left(\mathrm{Tr}(A^TM)B^TN + \mathrm{Tr}(B^TM)A^TN\right)\\ &= \mathrm{Tr}(A^TM)\,\mathrm{Tr}(B^TN) + \mathrm{Tr}(B^TM)\,\mathrm{Tr}(A^TN)\\ &= \mathrm{Tr}(A^TM)\,\mathrm{Tr}(B^TN) + \mathrm{Tr}(B^TM)\,\mathrm{Tr}(A^TN) = \langle f(N),M\rangle = \langle M,f(N)\rangle\end{aligned}$$

donc f est autoadjoint donc diagonalisable par le théorème spectral.

Méthode 2 : Si A et B sont colinéaires alors si elles sont nulles f est nulle donc diagonale. Si $B = \lambda A$ avec $A \neq 0$ alors $f(M) = 2\lambda\,\mathrm{Tr}(A^T M)A$ et f est alors diagonale dans n'importe quelle base adaptée à la décomposition $A^\perp \oplus \mathrm{Vect}(A)$. Sinon A et B non colinéaire et on remarque que $\mathrm{Vect}(A,B)^\perp \subseteq \ker(f)$. Dans une base $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_{n^2-2}, A, B)$ adaptée à la décomposition $\mathrm{Vect}(A,B)^\perp \oplus \mathrm{Vect}(A,B) = M_n(\mathbb{R})$ l'expression par blocs de la matrice de f est

$$\Gamma = M_{\mathcal{B}}(f) = A = \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \langle A,B\rangle & ||B||^2 \\ \mathbf{0} & ||A||^2 & \langle A,B\rangle \end{array}\right) \in M_{n^2}(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est alors

$$\chi_\Gamma(X) = X^{n^2-1}\left(X^2 - (||A||^2\,||B||^2 - \langle A,B\rangle^2)\right).$$

Or par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a $|\langle A,B\rangle| \leq ||A||\,||B||$ donc $\langle A,B\rangle^2 \leq ||A||^2\,||B||^2$ avec égalité si, et seulement si A et B sont colinéaires. Puisqu'on a supposé que ça n'est pas le cas l'inégalité est stricte. Ainsi $||A||^2\,||B||^2 - \langle A,B\rangle^2 > 0$ et f a deux valeurs propres non réelles donc n'est pas diagonalisable.

Exercice 43 (correction)

L'application définie par $\langle M, N\rangle = \mathrm{Tr}(M^T N)$ est bien bilinéaire et symétrique car $\forall A \in M_n(\mathbb{K}), \mathrm{Tr}(A^T) = \mathrm{Tr}(A)$. Par ailleurs,

$$\mathrm{Tr}(M^T M) = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ik}^T m_{ik} = \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n m_{ik}^2$$

donc $\mathrm{Tr}(M^T M) = 0 \Rightarrow M = 0$ ce qui prouve que $\langle\ ,\ \rangle$ définit bien un produit scalaire.

On remarque que $\mathrm{Vect}(A,B)^\perp \subseteq \ker(f)$. Dans une base $\mathcal{B} = (E_1, \dots, E_{n^2-2}, A, B)$ adaptée à la décomposition $\mathrm{Vect}(A,B)^\perp \oplus \mathrm{Vect}(A,B) = M_n(\mathbb{R})$ l'expression par blocs de la matrice de f est

$$\Gamma = M_{\mathcal{B}}(f) = A = \left(\begin{array}{c|cc} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \langle A,B\rangle & ||B||^2 \\ \mathbf{0} & -||A||^2 & -\langle A,B\rangle \end{array}\right) \in M_{n^2}(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est alors

$$\chi_\Gamma(X) = X^{n^2-1}\left(X^2 + ||A||^2\,||B||^2 - \langle A,B\rangle^2\right).$$

Or par l'inégalité de Cauchy-Schwartz on a $|\langle A,B\rangle| \leq ||A||\,||B||$ donc $\langle A,B\rangle^2 \leq ||A||^2\,||B||^2$ avec égalité si, et seulement si A et B sont colinéaires. Puisqu'on a supposé que ça n'est pas le cas l'inégalité est stricte. Ainsi $||A||^2\,||B||^2 - \langle A,B\rangle^2 > 0$ et f a deux valeurs propres non réelles donc n'est pas diagonalisable.

Exercice 44 (correction)

Notons $X = (p_1, \dots, p_{2n+1})^T$ le vecteur colonne des poids des cailloux. Par hypothèse il existe une matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \pm 1 & \cdots & & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & \cdots & & \pm 1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \pm 1 & & & 0 & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n+1}(\mathbb{R})$$

de diagonale nulle, contenant n coefficients 1 et n coefficients -1 par ligne telle que $AX = 0$. Par ailleurs, puisqu'il y a autant de 1 que de -1 par ligne le vecteur $(1, \dots, 1)$ est aussi dans le noyau de A. On remarque aussi que χ_A, le polynôme caractéristique de A, est à coefficients dans $\mathbb{Z}$. On note alors $\overline{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in M_{2n+1}(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$ la matrice obtenue en réduisant modulo 2 ses coefficients.

On note aussi $\overline{\chi_A} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ le polynôme obtenu en réduisant modulo 2 les coefficients de χ_A. Par propriétés du déterminant on a $\overline{\chi_A} = \chi_{\overline{A}}$. On peut expliciter sans calcul $\chi_{\overline{A}}$ en remarquant que 1 est une valeur propre de multiplicité au moins $2n$ car $\overline{A} - I_{2n+1}$ est de rang 1 donc $\dim(\ker(\overline{A} - I_{2n+1})) = 2n$. Puisque la somme des valeurs propres est égale à la trace la valeur propre la valeur propre λ manquante satisfait

$$\lambda + \underbrace{1 + \cdots + 1}_{2n \text{ fois}} = 0 \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

donc $\lambda = 0$. On en déduit que $\chi_{\overline{A}} = X(X-1)^{2n}$. Si la multiplicité de 0 dans χ_A était supérieure à 2 on pourrait l'écrire $\chi_A = X^2 Q$ avec $Q \in \mathbb{Z}[X]$ ce qui impliquerait que $\chi_{\overline{A}} = X^2 \overline{Q} \in (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})[X]$ ce qui est absurde. Ainsi $1 \geq \dim(\ker(A)) \geq 1$ donc $\dim(\ker(A)) = 1$ et $(p_1, \dots, p_{2n+1}) \in \mathrm{Vect}((1, \dots, 1))$, i.e. tous les cailloux pèsent le même poids.

Exercice 45 (correction)

1. Il s'agit d'une récurrence élémentaire.
2. On peut développer $\det(XI_3 - M)$ par rapport à la 1ère colonne. Une racine λ satisfait donc $\left(\frac{\lambda - t}{1-t}\right)^3 = 1$ donc dans la parenthèse c'est $1, j$ ou j^2.
3. Il suffit de vérifier que pour chacun on a $Mv_i = \lambda_i v_i$.
4. En élevant la relation à la puissance n on a $D^n = P^{-1}M^nP$ et D^n est la matrice diagonale avec sur la diagonale $1^n = 1, \lambda_2^n$ et λ_3^n. On peut vérifier que λ_2 et λ_3 sont de module < 1 donc D^n tend vers la matrice $D_\infty = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc M^n tend vers $PD_\infty P^{-1}$ qui est celle qu'on veut. J'en profite pour préciser une astuce de flemmard·e. Ici D_∞ est évidemment de rang 1 donc $L = PD_\infty P^{-1}$ l'est aussi. Par conséquent il suffit de calculer la première colonne de L qui est $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ puis un coefficient seulement de chaque autre colonne (on trouve 1) puis de se rappeler que ces deux autres colonnes sont engendrées par la première.
5. On a alors a_n, b_n et c_n qui tendent tous vers $\frac{a_0+b_0+c_0}{3}$, l'isobarycentre du triangle de départ. La limite ne dépend pas du paramètre t choisi au départ.

Exercice 46 (correction)

1. On a 1 valeur propre évidente car la matrice $M - I_n$ est de rang 1. Par le théorème du rang l'espace propre associé est de dimension $n-1$. On note λ la valeur propre de M qui est encore inconnue. Elle doit vérifier

   $$\mathrm{Tr}(M) = 0 = \lambda + 1 + \cdots + 1 = \lambda + n - 1$$

   donc $\lambda = -n + 1$. Puisque $-n + 1 \neq 1$ la dimension des espaces propres coïncide avec la multiplicité des valeurs propres donc la matrice est diagonalisable (lorsque vous l'aurez vu le théorème spectral permet de conclure immédiatement que M est diagonalisable en constatant que M est symétrique réelle).

2. D'après la question précédente le polynôme caractéristique de M vérifie $\chi_M(X) = \det(XI_n - M) = (X+n-1)(X-1)^n$. Par ailleurs, par définition du déterminant

$$\det(XI_n - M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{i,\sigma(i)}$$

avec $a_{i,\sigma(i)} = X$ si $\sigma(i) = i$ et 1 sinon. Donc on a bien

$$\det(XI_n - M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X^{\nu(\sigma)}.$$

3. On a $\Sigma_1 = \chi_M(1) = 0$, puis $\Sigma_2 = \chi_M'(1) = 0$ si $n \geq 3$ car alors 1 est une racine de χ_M de multiplicité $n-1 \geq 2$ et si $n = 2$, $\chi_M'(1) = 2$. Enfin

$$\Sigma_3 = \int_0^1 \chi_M(t)\,\mathrm{dt} = \int_0^1 (t-1)^n\,\mathrm{dt} + n\int_0^1 (t-1)^{n-1}\,\mathrm{dt} = \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} + (-1)^n = (-1)^n\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = (-1)^n \frac{n}{n+1}.$$

4. Le coefficient constant de χ_M correspond aux permutations sans point fixe donc aux éléments de $\mathfrak{D}_n$. En identifiant les coefficients constants des deux polynômes à gauche et à droite de l'égalité obtenue en question 2 on obtient

$$\mathrm{Card}\left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\right\} - \mathrm{Card}\left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\right\} = (-1)^{n-1}(n-1).$$

Exercice 47 (correction)

1. On se rappelle que les colonnes d'une matrice forment une base si, et seulement si elle est inversible. Il suffit donc d'énumérer les bases de $E = (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2$. Puisque E est de cardinal p^2 on a $p^2 - 1$ choix pour le premier vecteur de la base (tout vecteur non nul convient). Pour le second vecteur on doit le choisir de telle sorte qu'il ne soit pas colinéaire au premier, i.e. pas sur la même droite. Une droite de E étant de cardinal p on a donc $p^2 - p$ choix pour le second. On en déduit que $q = (p^2-1)(p^2-p)$.
2. Puisque $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ est un groupe de cardinal q pour toute matrice inversible $A^q = I_2$ donc $A^{q+2} = A^2$ par le théorème de Lagrange. Considérons alors A non inversible. Ceci signifie que son noyau est non nul, i.e. que 0 est une valeur propre. L'autre valeur propre a est alors un élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. En effet, le polynôme caractéristique de A est de la forme $\chi_A = X^2 - aX \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$.
   Si $a = 0$ alors, d'après le théorème de Cayley-Hamilton $A^2 = 0$ donc $A^{q+2} = A^2 = 0$. Sinon on remarque que, d'après le petit théorème de Fermat $a^{p-1} = 1$ donc, en passant à la puissance $(p+1)(p^2-p)$ on a $a^q = 1$ donc a est une racine de $X^q - 1$. On en déduit que $\chi_A \mid X^2(X^q - 1)$ donc que $A^2(A^q - I_2) = 0$.
3. De la même façon que pour la première question on a $q = (p^3-1)(p^3-p)(p^3-p^2)$ (le dernier vecteur choisi de ne doit pas être dans le plan engendré par les deux premiers). La relation reste toujours vraie pour $A \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})$ par le théorème de Lagrange mais elle n'est plus vraie en général pour les matrices non inversible. Un contre-exemple est donné par une matrice de polynôme minimal $\mu_A = X(X-1)^2$ comme, par exemple, celui de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   En effet, on peut montrer que $X^2(X^q - 1)$ n'est pas un polynôme annulateur car 1 n'est pas une racine double de $X^q - 1$. En effet, c'est bien une racine mais sa dérivée est qX^{q-1} qui ne s'annule qu'en 0 car $q \neq 0 \mod p$.
   En fait la relation est vraie pour les matrices inversibles, pour les nilpotentes et pour les diagonalisables.

Exercice 48 (correction)

1. Soit $g \in G$ un élément. D'après le théorème de Lagrange $g^n = e$. On en déduit que $\rho(g^n) = \rho(g)^n = \rho(e) = I_n$. Donc $\rho(g)$ est annulé par le polynôme $X^n - 1$ dont les racines sont les racines n-ème de l'unité qui sont toutes distinctes. Donc tous les éléments de l'image sont annulés par un polynôme scindé à racines simples donc sont diagonalisables.

2. L'image d'un groupe commutatif est toujours commutatif. Il suffit donc de montrer que des matrices diagonalisables qui commutent sont diagonalisables dans une même base. On va le faire plus généralement pour des endomorphismes.
   On commence par le cas de deux endomorphismes f et g.
   Par hypothèse, $E = \bigoplus_{\lambda\in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda$ avec $E_\lambda = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id})$. Soit $\lambda \in \mathrm{Sp}(f)$ une valeur propre de f. On veut montrer que E_λ stable par g. Soit $v \in E_\lambda$ on a
   $$f(g(v)) \underbrace{=}_{\text{car } f\circ g = g\circ f} g(f(v)) = g(\lambda v) = \lambda g(v)$$
   donc $g(v) \in E_\lambda$. Donc $g_\lambda = g_{E_\lambda}$ est un endomorphisme de E_λ et, puisque g est diagonalisable, alors g_λ l'est aussi. On peut donc pour chaque λ considérer une base $B_\lambda = (v_{1,\lambda}, \dots, v_{\alpha_\lambda,\lambda})$ de E_λ qui diagonalise g_λ. En concaténant les bases B_λ on obtient une base de E dans laquelle
   - f est diagonal car tous les vecteurs de B sont dans des espaces propres de f.
   - g est diagonal car tous les vecteurs de B sont des vecteurs propres de g.

   Si on a plus de deux endomorphismes $f_1, \dots, f_n$ alors on diagonalise successivement f_2 sur chaque espace propre E_λ de f_1 puis on diagonalise f_3 sur chaque espace propre de $f_{2,\lambda} = f_{2|E_\lambda}$ et ainsi de suite, on diagonalise chaque endomorphisme suivant sur l'intersection des espaces propres précédents.

Exercice 49 (correction)

1. On a
   $$\begin{aligned}||V(f)||_2^2 &= \int_0^1 \left(\int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 dx \le \int_0^1 x \int_0^x f(t)^2\,\mathrm{d}t\,dx \text{ par Cauchy-Schwartz}\\ &\le \int_0^1 \int_0^1 f(t)^2\,\mathrm{d}t\,dx \le ||f||_2^2\end{aligned}$$
   Donc V est bien continu est sa norme subordonnée est plus petite que 1. Supposons que V admette une valeur propre λ alors il existe $f \neq 0$ telle que $V(f) = \lambda f$. Puisque f est continue $V(f)$ est de classe C^1 et donc f aussi (si $\lambda \neq 0$). On a alors $V(f)'(x) = f(x) = \lambda f'(x)$ qui donne $f(x) = f(0)e^{x/\lambda}$ mais $f(0) = V(f)(0) = 0$ donc $f = 0$ ce qui est absurde. Même conclusion si $\lambda = 0$.
2. On a
   $$\begin{aligned}\langle V(f), g\rangle &= \int_0^1 \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t\, g(x)dx = [V(f)V(g)]_0^1 - \int_0^1 f(x)V(g)(x)dx \text{ par IPP}\\ &= \int_0^1 f(x)dx \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^1 f(x)V(g)(x)dx = \int_0^1 f(x)\left(\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t - \int_0^x g(t)\,\mathrm{d}t\right)dx\\ &= \int_0^1 f(x)\int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t\,dx\end{aligned}$$
   Donc $V^*(g)(x) = \int_x^1 g(t)\,\mathrm{d}t$. On a alors $V^*(f)' = -f$.
3. Soit λ une valeur propre (positive) de $V\circ V^*$ et f un vecteur propre. De la même façon que pour la première question on peut montrer que $\lambda \neq 0$ donc $\lambda > 0$. On a $(V\circ V^*)(f) = \lambda f$ qui implique que f est de classe C^2. On a, par continuité de V, $(V\circ V^*)(f)' = V(V^*(f)') = -V(f) = \lambda f'$ puis, en dérivant encore, $-f = \lambda f''$. On en déduit que $f(x) = a\cos(\omega x) + b\sin(\omega x)$ avec $\omega^2 = \frac{1}{\lambda}$. On a alors
   $$\lambda f(x) = V\circ V^*(f)(x) = \int_0^x \int_t^1 f(u)du\,\mathrm{d}t = \lambda f(x) + \left(\frac{a}{\omega}\sin(\omega) - \frac{b}{\omega}\cos(\omega)\right)x - a\lambda.$$
   Donc $a\lambda = 0$ donc $a = 0$ donc $-\frac{b}{\omega}\cos(\omega) = 0$. Puisque $f \neq 0, \cos(\omega) = 0$, i.e. $\exists n \in \mathbb{Z}, \omega = \frac{\pi}{2} + n\pi$ donc $\lambda = \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}$.
   Réciproquement, chaque $\lambda = \frac{4}{\pi^2(2n+1)^2}$ est une valeur propre.

Exercice 50 (correction)

1. On a facilement que pour $\deg(P) \leq n, \deg(u(P)) \leq n$.
2. On a en faisant deux IPP

$$\langle u(P), Q\rangle = \int_{-1}^{1}((1-x^2)P'(x))'Q(x)\,\mathrm{dx} = \underbrace{[(1-x^2)P'(x)Q(x)]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}(1-x^2)P'(x)'Q'(x)\,\mathrm{dx}$$

puis en refaisant une IPP on a bien $\langle u(P), Q\rangle = \langle P, u(Q)\rangle$.

3. On propose deux justifications

Méthode 1 : Tout endomorphisme réel symétrique est diagonalisable en base orthonormée par le théorème spectral.

Méthode 2 (si le théorème spectral n'a pas encore été vu) : Puisque $u(\mathbb{R}_n[X]) \subseteq \mathbb{R}_n[X]$ la matrice de u dans la base canonique est triangulaire et puisque $u(X^k) = -k(k+1)X^k + \cdots$ les valeurs sur la diagonale sont $-k(k+1)$ qui sont donc les valeurs propres de u. Puisqu'elles sont toutes distinctes u est bien diagonalisable.

4. (a) Remarquons que -1 et 1 sont des racines de $(X^2-1)^n$ de multiplicité n donc pour tout $k < n$, $\left[(x^2-1)^n\right]^{(k)}$ s'annule en -1 et 1. Soit $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a

$$\begin{aligned}
\langle P, Q\rangle &= \int_{-1}^{1}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)} Q(x)\,\mathrm{dx}\\
&= \underbrace{\left[\left[(x^2-1)^n\right]^{(n-1)} Q\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n-1)} Q'\,\mathrm{dx}\\
&\vdots\\
&= \underbrace{\left[\left[(x^2-1)^n\right]^{(n-k)} Q^{(k-1)}\right]_{-1}^{1}}_{=0} - \int_{-1}^{1}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n-k)} Q^{(k)}\,\mathrm{dx}
\end{aligned}$$

Pour $k = n$ cela donne bien 0 puisque Q est de degré $n-1$ au plus.

(b) On remarque que $\deg P_n = n$ donc $\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_{n-1}) = \mathbb{R}_{n-1}[X]$. On le montre par récurrence sur n. On a bien $u(P_0) = 0$ donc P_0 vecteur propre associé à la valeur propre 0. Supposons que $(P_0, \ldots, P_{n-1})$ soit une base de vecteurs propres de u_{n-1}. On sait par ailleurs que les espaces propres sont en somme directe orthogonale et que ce sont des droites car les valeurs propres sont distinctes. Soit Q_n un vecteur propre de u_n associé à la valeur propre $-n(n+1)$. Puisque P_n est orthogonal à $\mathrm{Vect}(P_0, \ldots, P_{n-1})$ on a $P_n \in \mathrm{Vect}(Q_n)$ (attention c'est vrai seulement par orthogonalité des sommes !!). Donc P_n vecteur propre de u_n.

Exercice 51 (correction)

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons A diagonalisable et (A_k) une suite de matrice de la forme $A_k = P_k^{-1}AP_k$ convergeant vers une matrice $B \in M_n(\mathbb{C})$. Puisque pour tout polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ et $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), Q(P^{-1}AP) = P^{-1}Q(A)P$ les matrices A_k ont toutes le même polynôme minimal μ qui est scindé à racines simples puisque A est diagonalisable. On en déduit que $\mu(A_k) \to \mu(B) = 0$. Donc B est également diagonalisable. Par ailleurs, pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$\chi(X) := \det(A - XI_n) = \det(P_k^{-1}AP_k - XI_n) = \det(A_k - XI_n) \to \det(B - XI_n).$$

Donc B est diagonalisable et possède les mêmes valeurs propres que A avec les mêmes multiplicités. Les matrices A et B sont donc toutes les deux semblables à la même matrice diagonale, elles sont donc conjuguées, i.e. $B \in C(A)$. Donc, par caractérisation séquentielle, $C(A)$ est fermé.

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ dont la classe de conjugaison est fermée. Puisque A est une matrice complexe elle est trigonalisable (son polynôme caractéristique est scindé par le théorème fondamental de l'algèbre). On écrit alors $P^{-1}AP = D + T$ avec D diagonale et T triangulaire supérieure stricte. Soit $t > 0$ et D_t la matrice diagonale $\operatorname{diag}(1, t, \dots, t^{n-1})$. On va montrer que $D_t^{-1}(D+T)D_t \to D$ qui est dans l'adhérence de la classe de conjugaison de A. Puisque $C(A)$ est fermée ceci prouvera alors que A possède une matrice diagonale dans sa classe de conjugaison, i.e. qu'elle est diagonale. Soit $1 \leq i < j \leq n$ et E_{ij} la matrice élémentaire dont le coefficient (i,j) est 1 et 0 ailleurs. Un calcul rapide montre que $D_t^{-1}E_{ij}D_t = t^{j-i-1} \to 0$. On a alors

$$(PD_t)^{-1}(PD_t) = D_t^{-1}DD_t + D_t^{-1}TD_t = D + D_t^{-1}TD_t \to D$$

en écrivant T comme combinaison linéaire de E_{ij} et par ce qui précède.

Exercice 52 (correction)

On pose

$$\Phi_A : \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & C(A) \\ P & \longmapsto & P^{-1}AP. \end{array}$$

Il s'agit d'une application continue par continuité du produit matriciel et du passage à l'inverse.

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit A une matrice diagonalisable. On commence par montrer que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs dans lesquelles se trouvent I_2 et $J_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

En effet, on peut commencer par constater que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ n'est pas connexe par arcs car $\det(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})) = \mathbb{R}^*$ qui n'est pas connexe par arcs. Si $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ était connexe par arcs son image par une application continue serait elle aussi connexe par arcs. On remarque tout d'abord que I et $-I$ sont reliées par le chemin $t \in [0,1] \mapsto R_{t\pi}$ où $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ désigne la matrice de rotation d'angle θ. Ensuite, on considère une matrice P de déterminant strictement positif. On considère alors deux cas :

Si P ne possède aucune valeur propre négative. On considère alors le chemin $t \in [0,1] \mapsto tP + (1-t)I_2$, s'il existe $t \in]0,1]$ tel que $\det(tP + (1-t)I_2) = 0$ alors $\det(P + \frac{1-t}{t}I_2) = 0$ ce qui implique que $-\frac{1-t}{t}$ est une valeur propre de P ce qui est exclu.

Sinon. Si P possède une valeur propre négative alors l'autre l'est aussi car leur produit est un réel positif. Dans ce cas $-I_2P$ a ses deux valeurs propres positives et on peut relier P à $-P$ puis $-P$ à I_2.

Si P est de déterminant négatif alors J_2P est de déterminant positif et est donc reliée continûment à I_2 par un chemin γ. Alors $J_2\gamma$ est un chemin continu de P à J_2. On en déduit que $\mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$ possède deux composantes connexes par arcs $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R}) = \left\{P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det P > 0\right\}$ et $\mathrm{GL}_2^-(\mathbb{R}) = \left\{P \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \mid \det P < 0\right\}$.

Puisque A est diagonalisable, on peut trouver une matrice de la forme $D = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix} = P^{-1}AP$ dans $C(A)$. On a alors $\Phi_A(P) = D$ et $\Phi_A(J_2P) = D$ donc l'image par Φ_A de $\mathrm{GL}_2^+(\mathbb{R})$ et celle de $\mathrm{GL}_2^-(\mathbb{R})$ possède une intersection non vide. Donc $\Phi_A(\mathrm{GL}_2(\mathbb{R}))$ est connexe par arcs comme union de deux connexes par arcs ayant une intersection non vide.

$\boxed{\Leftarrow}$ On note $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. On a $\Phi_A(I_2) = A$ et $\Phi_A(J_2) = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$ toutes les deux dans $C(A)$. On peut donc les relier par un chemin continu $\gamma(t) = \begin{pmatrix} a(t) & b(t) \\ c(t) & d(t) \end{pmatrix}$ telle que $\gamma(0) = A$ et $\gamma(1) = \Phi_A(J_2)$. On propose alors deux conclusions. La première est beaucoup plus courte mais utilise le théorème spectral.

Méthode 1 : L'application $f : t \mapsto b(t) - c(t)$ est continue car γ est continue et satisfait $f(0) = b - c$ et $f(1) = -b + c = -f(0)$ donc f s'annule par le théorème des valeurs intermédiaires. On en déduit qu'il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $\gamma(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha' \end{pmatrix} \in C(A)$. Donc A est conjuguée à une matrice symétrique réelle donc diagonalisable (en base orthonormée) d'après le théorème spectral.

Méthode 2 : On a alors $c(0) = c$ et $c(1) = -c$ et c continue donc, par le théorème des valeurs intermédiaires il existe $t_0 \in [0,1]$ tel que $c(t_0) = 0$, i.e. $\gamma(t_0)$ est triangulaire supérieure. On peut alors, sans perte de généralité, supposer que $c = 0$. On a alors

$$\Phi_A\left(\begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & b + t(d-a) \\ 0 & d \end{pmatrix}.$$

Donc si $d \neq a$ on construit un chemin de A vers $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

Si $d = a$ alors on est ramené au cas où $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$.

On remarque que $T := \Phi_A\left(\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. On considère $t \in [0,1] \mapsto A(t)$ un chemin continu de $C(A)$ tel que $A(0) = A$ et $A(1) = T$. En écrivant pour tout t $A(t) = \Lambda(t) + \Gamma(t)$ avec $\Lambda(t)$ symétrique et $\Gamma(t)$ antisymétrique. Les fonctions Λ et Γ sont toutes les deux continues car il s'agit des projections de $t \mapsto A(t)$ sur l'espace des matrices symétriques et antisymétrique respectivement. On remarque que

- $\Lambda(0) = \Lambda(1) = \begin{pmatrix} a & b/2 \\ b/2 & a \end{pmatrix}$ et $\Gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 & b/2 \\ -b/2 & 0 \end{pmatrix} = -\Gamma(1)$.
- L'espace des matrices antisymétriques $2x2$ est de dimension 1 engendré par $\Gamma(0)$ si $b \neq 0$ (si $b = 0$ alors A est déjà diagonale).

On peut donc réécrire $A(t) = \Lambda(t) + \lambda(t)\Gamma(0)$ avec $\lambda(0) = 1$ et $\lambda(1) = -1$ et λ continue car une application vectorielle est continue si et seulement si toutes ses coordonnées sont continues. On en déduit que λ s'annule en un certain t_0. On a alors $A(t_0) = \Lambda(t_0) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \alpha' \end{pmatrix}$. Puisqu'il s'agit d'un conjugué de A elle a la même trace que A à savoir $2a$ et le même déterminant a^2 donc $\begin{cases} \alpha + \alpha' & = 2a \\ \alpha\alpha' - \beta^2 & = a^2 \end{cases}$. Donc α et α' sont racines réelles de $X^2 - 2aX + a^2 + \beta^2$ de discriminant $\Delta = 4a^2 - 4(a^2 + \beta^2) = -4\beta^2$ donc $\beta = 0$ et $\alpha = \alpha' = a$. Donc $A(t_0) = aI_2$.

Il se trouve que si $b \neq 0$ alors la matrice A n'est pas diagonalisable, donc ce dernier cas que l'on traite n'arrive jamais.

2. *Espaces préhilbertien - corrections*

Exercice 53 (correction)

Soit $x \in \mathbb{R}$. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz aux vecteurs $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} \cos(x) \\ \sin(x) \end{pmatrix}$ (avec $\mathbb{R}^2$ muni du produit scalaire canonique). Ceci donne

$$|1 \times \cos(x) + 1 \times \sin(x)| \leq \sqrt{\cos^2(x) + \sin^2(x)}\sqrt{1+1} = \sqrt{2}.$$

Le cas d'égalité est si et seulement si les vecteurs sont colinéaires, i.e. $\cos(x) = \sin(x) \Rightarrow \cos(x)^2 + \sin(x)^2 = 2\cos(x)^2 = 1$, i.e. $\cos(x) = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ce qui arrive donc seulement lorsque $x \in \frac{\pi}{4} + \pi\mathbb{Z}$.

Exercice 54 (correction)

1. Les colonnes de J forment une base orthonormée de $\mathbb{R}^{2n}$ donc J est une isométrie. Par ailleurs $J^2 = I_{2n}$ donc c'est une symétrie. On a immédiatement
$$\ker(J - I_{2n}) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\1\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right) \text{ et } \ker(J + I_{2n}) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\-1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\-1\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\\vdots\\1\\-1\\\vdots\\0\end{pmatrix}\right).$$
La famille concaténée $(u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n)$ étant déjà orthogonale il suffit de diviser par $\sqrt{2}$ pour la normaliser.
2. On a $v = \frac{1}{2}(u_1 + v_1) + \cdots + \frac{1}{2}(u_n + v_n)$ donc la projection est $\frac{1}{2}u_1 + \cdots + \frac{1}{2}u_n$.

Exercice 55 (correction)

On remarque que, puisque $t \mapsto t$ est impaire, la famille $(1, t)$ est déjà orthogonale. Donc il suffit de la normaliser, i.e. $(e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, e_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}t)$ est une base orthonormée de F.

La projection de t^2 sur F est donnée par $p_F(t^2) = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}}, t^2 \right\rangle \frac{1}{\sqrt{2}} + \left\langle \sqrt{\frac{3}{2}}t, t^2 \right\rangle \sqrt{\frac{3}{2}}t$. Par imparité de t^3 on a donc $p_F(t^2) = \frac{1}{3}$. On a donc
$$d(t^2, F)^2 = \left\|t^2 - p_F(t^2)\right\|^2 = \int_{-1}^{1} \left(t^4 - \frac{2}{3}t^2 + \frac{1}{9}\right) dt = \frac{2}{5} - \frac{4}{9} + \frac{2}{9} = \frac{8}{45}.$$
Donc $d(t^2, F) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$.

Exercice 56 (correction)

Supposons $|a| \neq 1$. On considère $P = \sum_{k=0}^{n} c_k X^k$. On a
$$\begin{aligned}\left|f_a(P)\right| = |P(a)| &\leq \sum_{k=0}^{n} \left|c_k\right| \left|a^k\right| \leq \sqrt{\sum_{k=0}^{n} c_k^2}\sqrt{\sum_{k=0}^{n} a^{2k}} \qquad \text{(inégalité de Cauchy-Schwartz dans } \mathbb{R}^{n+1}\text{)}\\ &\leq ||P||_2 \sqrt{\frac{1 - a^{2(n+1)}}{1 - a^2}} \Rightarrow |||f_a||| \leq \sqrt{\frac{1 - a^{2(n+1)}}{1 - a^2}}\end{aligned}$$
On remarque désormais que si $c_k = a^k$ alors toutes les inégalités sont des égalités d'après le cas d'égalité de Cauchy-Schwartz. Le même raisonnement montre que $|||f||| = \sqrt{n+1}$ lorsque $|a| = 1$.

Exercice 57 (correction)

1. Les colonnes de M forment une base orthonormée il s'agit donc d'une isométrie. Puisque $\det M = 1$ c'est une isométrie directe donc une rotation autour d'un axe
2. On a $M^3 = I_3$ (on peut le faire sans calcul ! La matrice M permute les vecteurs de la base canonique). Les valeurs propres étant de M sont inclues dans l'ensemble des racines de tout polynôme annulateur donc $\mathrm{Sp}(M) \subseteq \{1, j, j^2\}$ avec $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

3. Le polynôme minimal μ_M de M est un polynôme à coefficient réel qui divise $X^3-1=(X+1)(X^2+X+1)$. Il s'agit donc soit de $X+1$ (impossible car $M\neq -I_3$), soit de X^2+X+1 (impossible car $M^2+M+I_3=(1)_{1\leq i,j\leq 3}\neq 0$), soit de X^3-1. C'est donc X^3-1. Puisque μ_M n'est pas scindé dans $\mathbb{R}$ la matrice M n'est pas diagonalisable dans $\mathbb{R}$.

4. On remarque que $\det M=1$ donc c'est une isométrie directe $M\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ donc $D=E_{-1}=\operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ est l'axe de rotation.

   Son plan de rotation est $P=D^{\perp}:\ x+y+z=0$. La restriction r_θ de M à ce plan est une rotation d'angle θ et satisfait toujours $r_\theta^3=r_{3\theta}=\mathrm{id}_P$ donc $3\theta=0\mod 2\pi$ donc $\theta=\frac{2\pi}{3}$ ou $\theta=-\frac{2\pi}{3}$ (si on avait $\theta=0$, la restriction de M à P serait l'identité et dans une base concaténée de P et D la matrice de M vérifierait $A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&-1\end{pmatrix}$ qui ne satisfait pas $A^3=I_3$). Pour déterminer s'il s'agit de $\frac{2\pi}{3}$ ou de $-\frac{2\pi}{3}$ on peut déterminer la matrice de M dans une base orthonormée plus sympathique. On considère $e_1=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$, $e_2=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ et $e_3=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}$ (pour la trouver vous pouvez appliquer Gram-Schmidt à $\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}\right)$. La première colonne de M dans cette base est $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ puisque e_1 est un vecteur propre associé à la valeur propre 1. La seconde est $\begin{pmatrix}0\\-\frac{1}{2}\\\frac{\sqrt{3}}{2}\end{pmatrix}$ car $Me_2=-\frac{1}{2}e_2+\frac{\sqrt{3}}{2}e_3$. Ceci nous donne $\cos(\theta)=\pm\frac{2\pi}{3}$ ce que l'on savait déjà mais surtout $\sin(\theta)=\frac{\sqrt{3}}{2}$ ce qui impose $\theta=\frac{2\pi}{3}$.

Exercice 58 (correction)

La norme du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{C}$ est donnée par le module. On a bien $\forall z\in\mathbb{C},\ |f(z)|=|i\bar{z}|=|z|$. Donc on a bien une isométrie. Par ailleurs, $f(z)=z\Leftrightarrow z\in\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(1+i)$. Donc f a une droite stable et $f(1)=i\notin\mathbb{R}$, c'est qu'il ne s'agit pas d'une rotation mais d'une symétrie orthogonale par rapport à $\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(1+i)$ parallèlement à $\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(1+i)^{\perp}=\operatorname{Vect}_{\mathbb{R}}(1-i)$.

Exercice 59 (correction)

Par définition

$$|||f|||^2=\sup_{E\setminus\{0\}}\frac{||f(x)||^2}{||x||^2}=\sup_{E\setminus\{0\}}\frac{\langle f(x),f(x)\rangle}{\langle x,x\rangle}=\sup_{E\setminus\{0\}}\frac{\langle f^*f(x),x\rangle}{\langle x,x\rangle}.$$

Par ailleurs, l'endomorphisme f^*f est auto-adjoint donc diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1,\dots,e_n)$ d'après le théorème spectral. En écrivant $x=\sum_{i=1}^n x_ie_i$ on a donc

$$\langle f^*f(x),x\rangle=\left\langle\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i,x_i\right\rangle=\sum_{i=1}^n\lambda_ix_i^2\leq\max\left\{\lambda\in\operatorname{Spec}(f^*f)\right\}\sum_{i=1}^n x_i^2=\max\left\{\lambda\in\operatorname{Spec}(f^*f)\right\}||x||^2$$

Ceci prouve que $|||f|||^2\leq\max\{\lambda\in\operatorname{Spec}(f^*f)\}=\lambda_j$. Par ailleurs, en considérant $j\in\{1,\dots,n\}$ tel que e_j est un vecteur propre de la base qui est associé à la valeur propre maximale λ_j on a $\left\langle f^*f(e_j),e_j\right\rangle=\lambda_j=\lambda_j\times\left|\left|e_j\right|\right|^2$ ce qui prouve que $|||f|||^2\geq\lambda_j$.

Exercice 60 (correction)

1. Soit $x\in\mathbb{R}^n$. On a

$$\left\langle A^TAx,x\right\rangle=\langle Ax,Ax\rangle=||Ax||\geq 0.$$

2. D'après le théorème spectral il existe une base orthonormée $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de $\mathbb{R}^n$ de vecteurs propres de $A^T A$ associée à ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. On a alors pour $i \neq j$,

$$\left\langle Ae_i, Ae_j \right\rangle = \left\langle A^T Ae_i, e_j \right\rangle = \left\langle \lambda_i e_i, e_j \right\rangle = \lambda_j \left\langle e_i, e_j \right\rangle = 0.$$

La famille $(Ae_1, \dots, Ae_n)$ est donc orthogonale.

3. On suppose désormais que A est inversible. La famille $\mathcal{F}$ est alors une base de $\mathbb{R}^n$. On note $d_i = \left|\left|Ae_i\right|\right| > 0$ de sorte que la famille $\mathcal{F} = \left(\frac{1}{d_1}Ae_1, \dots, \frac{1}{d_n}Ae_n\right)$ est orthonormée. La matrice de l'endomorphisme associé à A dans les bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{F}$ est alors la matrice $D = \operatorname{diag}\left(d_1, \dots, d_n\right)$. Autrement dit, en notant C la base canonique on a

$$P_{C\mathcal{B}} A P_{\mathcal{F}C} = D$$

Si bien qu'on a $A = UDV$ avec $U = P_{\mathcal{B}C}$ et $V = P_{C\mathcal{F}}$ qui sont bien des matrices orthogonales car il s'agit de matrices de passage d'une base orthonormée à une autre. la matrice diagonale dont la diagonale est formée des d_i^{-1}. Les colonnes de la matrice $(Ae_1\ Ae_2\ \dots\ Ae_n)D$ forment une base orthonormée par construction donc il s'agit d'une matrice orthogonale.

Exercice 61 (correction)

Les colonnes $(c_1, \dots, c_n)$ de la matrice A forment une base que l'on orthonormalise grâce à l'algorithme de Gram-Schmidt. Pour $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ pose π_x la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect}(x)$. On définit alors

$$\begin{array}{llll}
e_1 &= \dfrac{1}{\left|\left|c_1\right|\right|}c_1 & \text{et} & r_1^T = \left(\left|\left|c_1\right|\right|^{-1} \quad 0 \quad \cdots \quad 0\right) \\
e_2 &= \dfrac{1}{\left|\left|c_2\right|\right|}\left(c_2 - \pi_{e_1}(c_2)\right) = \left|\left|c_2\right|\right|^{-1} c_2 - \lambda_{1,2}c_1 & \text{et} & r_1^T = \left(\lambda_{1,2} \quad \left|\left|c_2\right|\right|^{-1} \quad \cdots \quad 0\right) \\
\vdots & & & \\
e_n &= \dfrac{1}{\left|\left|c_n\right|\right|}\left(c_n - \pi_{e_{k-1}}(c_n) - \cdots - \pi_{e_1}(c_n)\right) = \left|\left|c_n\right|\right|^{-1} c_n - \lambda_{n-1,n}c_{n-1} - \cdots - \lambda_{1,n}c_1 & \text{et} & r_1^T = \left(\lambda_{1,n} \quad \lambda_{2,n} \quad \cdots \quad \left|\left|c_n\right|\right|^{-1}\right)
\end{array}$$

On note alors $Q = (e_1\ \cdots\ e_n)$ orthogonale par construction et $R^{-1} = (r_1\ \cdots\ r_n)$ triangulaire à diagonale strictement positive par construction aussi. On a bien, par définition $Q = AR^{-1}$ donc $A = QR$.

Exercice 62 (correction)

1. On a $\forall x, y \in E, \langle u(x+y), x+y\rangle = 0$. En développant par bilinéarité on a

$$\underbrace{\langle u(x), x\rangle}_{=0} + \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle + \underbrace{\langle u(y), y\rangle}_{=0} = 0.$$

Ce qui donne bien ce qu'on veut.

2. En reprenant la relation trouvée à la question précédente et, puisque l'inverse de u est son adjoint, on a

$$\forall x, y \in E, \langle u(x), y\rangle + \langle u(y), x\rangle = \langle u(x), y\rangle + \left\langle y, u^{-1}(x)\right\rangle = \left\langle u^{-1}(x) + u(x), y\right\rangle = 0$$

donc $\forall x \in E, u^{-1}(x) + u(x) = 0$, i.e. $u^2(x) = -x$. On en déduit que $X^2 + 1$ est un polynôme annulateur de u. Puisqu'il est irréductible il s'agit de son polynôme minimal et du seul diviseur irréductible de son polynôme caractéristique χ_u. Ainsi χ_u est une puissance de $X^2 + 1$. Ainsi, son degré, qui est la dimension de E, est pair.

3. Soit $x \in E$ un vecteur quelconque. On pose $P_1 = \mathrm{Vect}(x, u(x))$. Il s'agit d'un plan stable par u car $u(u(x)) = -x \in P_1$. Par conséquent, $P_1^\perp$ est un espace stable par u et de dimension $n-2$ et $u_{|P_1^\perp}$ est toujours une isométrie satisfaisant $u^2 = -\mathrm{id}$. On peut donc terminer par récurrence. Enfin, sur chaque P_i la restriction $u_i = u_{|P_i}$ de u reste une isométrie. La classification des isométries du plan nous indique alors que u_i est soit une symétrie orthogonale soit une rotation. Si u_i était une symétrie on aurait $u^2 = \mathrm{id}_{P_i}$ et pas $u_i^2 = -\mathrm{id}_{P_i}$ comme c'est le cas. Donc u_i est une rotation d'angle θ que l'on note r_θ qui vérifie $r_\theta^2 = r_{2\theta} = -\mathrm{id} = r_\pi$ donc $2\theta \equiv \pi \mod 2\pi$ donc $\theta \in \left\{ \pm\frac{\pi}{2} \right\}$

Exercice 63 (correction)

1. Soit f un endomorphisme autoadjoint de rang 1. Donc il existe $a \neq 0$ tel que $f(E) = \mathrm{Vect}(a)$. On écrit alors $f(x) = \ell(x)a$ avec ℓ une forme linéaire. D'après le théorème de représentation des formes linéaires $\exists b \in E, \forall x \in E, \ell(x) = \langle b, x\rangle$. Puisque f est autoadjoint on a pour tout $x, y \in E$,

$$\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle \Leftrightarrow \langle b, x\rangle \langle a, y\rangle = \langle b, y\rangle \langle a, x\rangle .$$

En prenant $y \in a^\perp$ et $x = a$ on a $\langle b, y\rangle = 0$ donc $b \in (a^\perp)^\perp = \mathrm{Vect}(a)$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R}, \forall x \in E, f(x) = \lambda \langle a, x\rangle a$. L'autre sens est immédiat.

2. Soit x un vecteur propre pour une valeur propre λ. On a $f(x) = \lambda x \Leftrightarrow (\lambda - 1)x = \langle x, a\rangle a$. On remarque alors que si $\lambda \neq 1, x \in \mathrm{Vect}(a) \setminus \{0\}$ auquel cas $x = \mu a$ donc $(\lambda - 1)\mu = \mu \langle a, a\rangle$ donc $\lambda = 1 + \langle a, a\rangle$ et $\ker(f - (1 + \langle a, a\rangle)\,\mathrm{id}) = E_{1+\langle a,a\rangle} = \mathrm{Vect}(a)$. D'autre part, $\lambda = 1$ équivaut à $x \in a^\perp$. On a donc

$$E = E_1 \oplus E_{1+\langle a,a\rangle} = \mathrm{Vect}(a) \oplus a^\perp.$$

On voit donc que f est l'identité sur l'hyperplan $a^\perp$ et une homothétie de rapport $1 + \langle a, a\rangle$ sur $\mathrm{Vect}(a)$.

Exercice 64 (correction)

On note m la dimension de E.

1. Soit $y \in \mathrm{im}\, g$ et $x \in \ker g$. Il existe alors $z \in E$ tel que $y = g(z)$ et $g(x) = f(x) - x = 0$, i.e. $f(x) = x$ et $x = f^*(x)$ car $f^{-1} = f^*$. On a alors

$$\begin{aligned}\langle y, x\rangle &= \langle g(z), x\rangle = \langle f(z) - z, x\rangle \\ &= \langle f(z), x\rangle - \langle z, x\rangle = \langle z, f^*(x)\rangle - \langle z, x\rangle = 0.\end{aligned}$$

On a alors $\mathrm{im}\, g \subseteq (\ker g)^\perp$. Par ailleurs, par le théorème du rang, $\dim(\mathrm{im}\, g) = m - \dim(\ker g) = \dim(\ker g)^\perp$. On a donc une inclusion d'un espace vectoriel de dimension finie dans un autre de même dimension donc ils sont égaux ; $\mathrm{im}\, g = (\ker g)^\perp$.

2. Puisque E est de dimension finie on a une décomposition en somme directe orthogonale $E = \ker g \oplus (\ker g)^\perp = \ker g \oplus \mathrm{im}\, g$. Soit $x \in E$, que l'on écrit de l'unique manière $x = x_0 + y$ avec $x_0 = p(x) \in \ker g$, i.e. $f(x_0) = x_0$ et $y = g(z) = f(z) - z$ pour un certain $z \in E$. On en déduit que $\forall k \in \mathbb{N}^*, f^k(x_0) = f^{k-1}(x_0) = x_0$ et $f^k(y) = f^{k+1}(y) - f^k(y)$. On a alors

$$\begin{aligned} p_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^k(x_0 + y) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \left(x_0 + f^k(y)\right) \\ &= x_0 + \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} f^{k+1}(z) - f^k(z) = p(x) + \frac{1}{n}\left(f^{n+1}(z) - z\right) \qquad \text{(par télescopage).}\end{aligned}$$

On a alors $\frac{1}{n}z \to 0$ et

$$\left|\left|\frac{1}{n} f^{n+1}(z)\right|\right| = \frac{1}{n}\left|\left|f^{n+1}(z)\right|\right| = \frac{1}{n}\,||z||$$

car f étant une isométrie, elle préserve la norme. On a donc bien $\lim\limits_{n\to+\infty} p_n(x) = p(x)$.

Exercice 65 (correction)

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $H = K$ alors $s_H = s_K$ donc ils commutent bien. Supposons que $H^\perp \subseteq K$. En particulier $H + K = E$ et d'après la formule de Grassmann on a

$$\dim(E) = \dim(H) + \dim(K) - \dim(H \cap K)$$

donc $\dim(H \cap K) = n - 2$. Puis on a une décomposition orthogonale $H \cap K \oplus K^\perp \oplus H^\perp$. Soit $(e_1, \dots, e_{n-2}, v_H, v_K)$ une base de E telle que $(e_1, \dots, e_{n-2})$ est une base de $H \cap K$ et v_H dirige $H^\perp$ et v_K dirige $K^\perp$. On a alors pour tout $i \leq n-2$,

$$\begin{aligned} s_K(s_H(e_i)) &= s_K(e_i) = e_i = s_H(s_K(e_i)) & \\ s_K(s_H(v_H)) &= -s_K(v_H) = -v_H & \text{car } H^\perp \subseteq K \\ &= s_H(s_K(v_H)) & \\ s_K(s_H(v_K)) &= s_K(v_K) = -v_K = s_H(s_K(v_K)) & \end{aligned}$$

Donc s_H et s_K commutent sur une base donc commutent (on peut aussi conclure que les deux endomorphismes sont diagonalisables dans une même base donc commutent car commutent sur chaque espace propre puisque leur restriction est alors une homothétie).

$\boxed{\Leftarrow}$ On pose $v_H \in H^\perp \setminus \{0\}$ et $v_K \in K^\perp \setminus \{0\}$ des vecteurs directeurs des orthogonaux. On a $s_K(s_H(v_H)) = s_K(-v_H) = -s_K(v_H)$ mais, puisque les deux endomorphismes commutent on a aussi $s_K(s_H(v_H)) = s_H(s_K(v_H)) = -s_K(v_H)$ donc $s_K(v_H) \in \ker(s_H + \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}(v_H)$. Puisque s_K est une isométrie on a $s_K(v_H) = \pm v_H$. Si $s_K(v_H) = v_H$ alors $H^\perp \subseteq K = \ker(s_K - \mathrm{id})$ sinon $H^\perp \subseteq K^\perp$, i.e. $K \subseteq H$ mais alors $K = H$ par égalité des dimensions.

Exercice 66 (correction)

Prenons le problème à l'envers et considérons un triangle du plan dont les sommets sont x_1, x_2 et $x_3 \in \mathbb{R}^2$. Quitte à déplacer notre triangle on peut supposer que ses médiatrices D_1, D_2 et D_3 se croisent en $(0,0)$. On considère les 3 symétries orthogonale s_i d'axe respectif D_i. Quitte à renommer les droites on peut supposer que $s_1(x_1) = x_2$, $s_2(x_2) = x_3$ et $s_3(x_3) = x_1$. Autrement dit,

$$s_3(s_2(s_1(x_1))) = x_1.$$

Ceci revient à dire que x_1 est un point fixe de l'isométrie $s_0 = s_3 \circ s_2 \circ s_1$. Cette isométrie du plan vérifie $\det s_0 = (-1)^3 = -1$. Il s'agit donc d'une isométrie indirecte du plan donc d'une symétrie qui admet pour axe de symétrie $\mathrm{Vect}(x_1)$. On construit les autres axes de façon similaire.

Partant de 3 droites distinctes on procède ainsi pour déterminer l'axe de s_0 :

- On part d'un point quelconque non nul $x \in \mathbb{R}^2$.
- On considère le symétrique x' de x par s_1, puis x'' de x' par s_2, puis y le symétrique de x'' par s_3.
- Le point y est donc le symétrique de x par la symétrie orthogonale s_0. Autrement dit $x_1 = \frac{x+y}{2}$ se trouve sur l'axe de s_0. On trace alors la droite $\mathrm{Vect}(x_1)$. On obtient alors $x_2 = s_1(x_1)$ puis $x_3 = s_2(x_2)$ ce qui nous donne un triangle dont les médiatrices sont D_1, D_2 et D_3.

Exercice 67 (correction)

Soit $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ de dimension 1. Les seules isométries sont $x \mapsto x$ (identité) et $x \mapsto -x$ (une réflexion). Donc c'est bon.

Soit $n \geq 1$ tel que toutes les isométries de tout espace euclidien de dimension n soient la composée d'au plus n réflexions.

On considère $f : E \to E$ isométrie d'un espace euclidien $(E, \langle\ ,\ \rangle)$ de dimension $n+1$ et $x \in E \setminus \{0\}$.

Cas 1 : $f(x) = x$. On a alors $D = \mathrm{Vect}(x)$ stable par f et, puisque f est une isométrie, $F = D^\perp$ est aussi stable par f. Par ailleurs, F est de dimension n puisque D est de dimension 1. D'autre part $f_{|F}$ est une isométrie de $(F, \langle\ ,\ \rangle)$ donc il existe $\rho_1, \dots, \rho_r$ des réflexions d'hyperplan H_i et d'axe D_i de F telles que $f_{|F} = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_r$ avec $r \leq n$. On pose $\widetilde{\rho_i} : E \to E$ telle que $\widetilde{\rho_i}(x) = x$ et $\widetilde{\rho}_{i|F} = \rho_i$. Il s'agit de réflexions d'axe D_i et d'hyperplan $\widetilde{H_i} = H_i + D$. En effet, ce sont des isométries car ce sont des isométries sur des sous-espaces de E qui sont orthogonaux et l'hyperplan $\widetilde{H_i}$ est bien stable de même qu'on continue d'avoir $\forall v \in D_i, \widetilde{\rho_i}(v) = \rho_i(v) = -v$.

Enfin, $\forall v \in F$ on a bien

$$f_{|H}(v) = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_r(v) = \widetilde{\rho_1} \circ \cdots \circ \widetilde{\rho_r}(v)$$

et $f(x) = x = \widetilde{\rho_1} \circ \cdots \circ \widetilde{\rho_r}(x)$. Donc on a bien $f = \widetilde{\rho_1} \circ \cdots \circ \widetilde{\rho_r}$ sur E.

Cas 2 : $f(x) \neq x$**.** Dans ce cas on considère ρ_0 la réflexion d'axe $D = \mathrm{Vect}(f(x) - x)$ et d'hyperplan $D^{\perp}$. On a alors $\rho_0(f(x)) = x$. On en déduit que l'isométrie $\rho_0 \circ f$ vérifie le cas 1 donc il existe au plus n réflexions $\rho_1, \ldots, \rho_r$ telles que $\rho_0 \circ f = \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_r$, i.e.

$$f = \rho_0 \circ \rho_1 \circ \cdots \circ \rho_r.$$

Donc f est bien composée d'au plus $n + 1$ réflexions.

Exercice 68 (correction)

1. Les isométries d'une droites sont juste $\pm\,\mathrm{id}$ donc c'est bon. Si $\dim E = 2$ alors les isométries sont
   - les symétries orthogonales f qui vérifient $f_{|V} = \mathrm{id}_V$ et $f_{|W} = -\mathrm{id}_W$ avec V la droite stable (le "miroir" de la symétrie) et $W = V^{\perp}$, la direction de la symétrie.
   - les rotations.

   donc c'est bon.
2. (a) Si on trouve un tel espace on pourra alors appliquer l'hypothèse de récurrence (forte) aux restrictions de f à F et $F^{\perp}$ et on aura gagné.

   (b) Si f à une valeur propre réelle λ et $x \in E \setminus \{0\}$ un vecteur propre alors $F = \mathrm{Vect}(x)$ est stable et non trivial donc on a gagné.

   (c) i. Puisqu'on travaille dans $\mathbb{R}^n$ on peut identifier f à sa matrice $M \in M_n(\mathbb{R})$ dans la base canonique. Un vecteur propre $x \in \mathbb{C}^n$ associé à λ satisfait donc $Mx = \lambda x$ donc $\overline{Mx} = M\overline{x} = \overline{\lambda x}$ puisque M est à coefficients réels.

   ii. On propose deux preuves :

   Méthode 1 : Chaque coordonnée des vecteurs $u = \frac{1}{2}\left(x + \overline{x}\right)$ et $v = \frac{1}{2i}\left(x - \overline{x}\right)$ est réelle donc ils sont bien dans $\mathbb{R}^n$. Par ailleurs, puisque $\lambda \neq \overline{\lambda}$ les vecteurs x et $\overline{x}$ ne sont pas colinéaires donc $(x, \overline{x})$ est une base de $F_{\mathbb{C}} = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x, \overline{x}) = \mathbb{C}x + \mathbb{C}\overline{x}$ et on a immédiatement $\mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(x, \overline{x}) = \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(u, v)$. Puisque $F_{\mathbb{C}}$ est stable par M on a bien Mu et $Mv \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{C}}(u, v)$ on peut alors écrire $Mu = \alpha u + \beta v$ pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ mais alors

   $$\overline{Mu} = Mu = \overline{\alpha} u + \overline{\beta} v.$$

   Par unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base on a alors $\overline{\alpha} = \alpha$ et $\overline{\beta} = \beta$ donc $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ et $Mu, Mv \in \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u, v)$ donc $F = \mathrm{Vect}_{\mathbb{R}}(u, v)$ stable par f.

   Méthode 2 : On pose $u = \frac{1}{2}\left(x + \overline{x}\right)$ et $v = \frac{1}{2i}\left(x - \overline{x}\right)$. On peut résoudre $f(u) = \frac{1}{2}\left(\lambda x + \overline{\lambda x}\right) = \alpha u + \beta v$, on trouve $\alpha = \frac{\lambda + \overline{\lambda}}{2} \in \mathbb{R}$ et $\beta = -\frac{\lambda - \overline{\lambda}}{2i} \in \mathbb{R}$. De même pour $f(v) = \gamma u + \delta v$ on trouverait bien des solutions avec $\gamma, \delta \in \mathbb{R}$.

Exercice 69 (correction)

1. (a) Si on peut exprimer un des x_j comme combinaison linéaire des autres $x_j = \sum_{k \neq j} \lambda_k x_k$ alors $\forall i$,

   $$\left\langle x_i, x_j \right\rangle = \sum_{k \neq j} \lambda_k \left\langle x_i, x_k \right\rangle$$

   ce qui donne une combinaison linéaire des colonnes de $\mathrm{Gram}(\mathcal{F})$ donc $\mathrm{G}(\mathcal{F}) = 0$.

   Réciproquement, si $\mathrm{G}(\mathcal{F}) = 0$ les colonnes de $\mathrm{Gram}(\mathcal{F})$ sont liées donc il existe λ_i tels que $\forall i$,

   $$\sum_{k=1}^{p} \lambda_k \left\langle x_i, x_k \right\rangle = \left\langle x_i, \sum_{k=1}^{p} \lambda_k x_k \right\rangle \qquad (L_i)$$

En faisant la somme des $\lambda_i L_i$ on obtient

$$\left\langle \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\rangle = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k \right\|^2 = 0$$

donc $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k = 0$ donc $\mathcal{F}$ est liée.

(b) **(Application)**. On pose $\forall 1 \leq i \leq n, x_i = e_i - e_{n+1}$ et on montre que cette famille est libre. Pour cela on va montrer que sa matrice de Gram est de déterminant non nul. On note $d = \left\| e_i - e_j \right\|^2$ lorsque $i \neq j$, la distance commune au carré. On commence par remarquer que tous les $\left\langle x_i, x_j \right\rangle$ sont égaux lorsque $i \neq j$. En effet,

$$\begin{aligned}\left\| e_j - e_i \right\|^2 &= \left\langle e_j - e_i, e_j - e_i \right\rangle \\ &= \left\langle e_j - e_{n+1} + e_{n+1} - e_i, e_j - e_{n+1} + e_{n+1} - e_i \right\rangle \\ &= \left\| e_j - e_{n+1} \right\|^2 - 2\left\langle e_j - e_{n+1}, e_i - e_{n+1} \right\rangle + \left\| e_{n+1} - e_i \right\|^2.\end{aligned}$$

Ce qui donne $\left\langle x_i, x_j \right\rangle = \frac{1}{2}d$. Ainsi, la matrice de Gram de la famille $(x_1, \dots, x_n)$ est

$$\mathrm{Gram}(x_1, \dots, x_n) = \frac{1}{2}d \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}dA$$

Pour voir que cette matrice est inversible il suffit de voir que A l'est. Pour cela on peut calculer ses valeurs propres qui sont évidentes. En effet, 1 est valeurs propres de multiplicité au moins $n-1$ car $A - 3I$ est la matrice composée que de -1 donc de rang 1 donc son noyau (l'espace propre associé à la valeur propre 1 est de dimension $n-1$ par le théorème du rang). La dernière valeur propre λ satisfait $\lambda + (n-1) = \mathrm{Tr}(A) = 2n$ donc $\lambda = n+1 \neq 0$. Puisque 0 n'est pas une valeur propre la matrice est inversible. Vous pouvez aussi bien calculer le déterminant directement et vous devriez trouver $\det(A) = n+1$.

2. (a) On pose $H = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ et on écrit $x = x_H + x^\perp$ avec $x_H \in H$ et $\left\langle x_H, x^\perp \right\rangle = 0$ de telle sorte que $d(x, H) = \left\| x^\perp \right\|$. On a

$$\begin{aligned}\det(G(x, x_1, \dots, x_m)) &= \begin{vmatrix} \langle x, x\rangle & \langle x_1, x\rangle & \cdots & \langle x_m, x\rangle \\ \langle x, x_1\rangle & & & \\ \vdots & & G(x_1, \dots, x_m) & \\ \langle x, x_m\rangle & & & \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} \left\langle x^\perp, x^\perp \right\rangle & \langle x_1, x\rangle & \cdots & \langle x_m, x\rangle \\ 0 & & & \\ \vdots & & G(x_1, \dots, x_m) & \\ 0 & & & \end{vmatrix} + \underbrace{\begin{vmatrix} \langle x_H, x_H\rangle & \langle x_1, x_H\rangle & \cdots & \langle x_m, x_H\rangle \\ \langle x_H, x_1\rangle & & & \\ \vdots & & G(x_1, \dots, x_m) & \\ \langle x_H, x_m\rangle & & & \end{vmatrix}}_{G(x_F, x_1, \dots, x_m) = 0 \text{ car famille liée}} \\ &= \left\| x^\perp \right\|^2 \det(G(x_1, \dots, x_m)) = d(x, H)^2 \det(G(x_1, \dots, x_m)).\end{aligned}$$

(b) On a $\det(G(1,t)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} \end{vmatrix} = \frac{4}{3}$ et $\det(G(1,t,t^2)) = \begin{vmatrix} 2 & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & \frac{2}{5} \end{vmatrix} = \frac{32}{135}$ donc $d(t^2, \mathrm{Vect}(1,t))^2 = \frac{32 \times 3}{135 \times 4} = \frac{8}{45}$ d'où $d(t^2, \mathrm{Vect}(1,t)) = \frac{2\sqrt{2}}{3\sqrt{5}}$.

Exercice 70 (correction)

1. Soit $P, Q \in E$, par croissance comparée $\lim_{x \to +\infty} x^2 P(x)Q(x)e^{-x} = 0$ donc $P(x)Q(x)e^{-x} = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ en $+\infty$ donc notre fonction est intégrable en $+\infty$ (pas de souci en 0).
2. Avec une intégration par partie en posant $u = x^m$ et $v = e^{-x}$ on obtient

$$\int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx = m \int_0^{+\infty} x^{m-1} e^{-x} dx.$$

   De plus $\int_0^{+\infty} e^{-x} dx = 1$ donc, par récurrence $\int_0^{+\infty} x^m e^{-x} dx = m!$.

3. (a) On a $\mathcal{H}_n^\perp \cap E_n \underset{\perp}{\bigoplus} \mathcal{H}_n = E_n$. En effet, l'inclusion $\boxed{\subseteq}$ est immédiate. Pour l'autre on sait que $E_n \subseteq E = \mathcal{H}_n^\perp \underset{\perp}{\bigoplus} \mathcal{H}_n$ donc pour tout P dans E_n on peut écrire $P = P_1 + P_2$ avec $P_1 \in \mathcal{H}_n^\perp$ et $P_2 \in \mathcal{H}_n$ donc $P_1 = P - P_2 \in E_n$ donc $P_1 \in \mathcal{H}_n^\perp \cap E_n$. Puisque $\dim \mathcal{H}_n = n$ on a bien $\dim \mathcal{H}_n^\perp \cap E_n = 1$.
   Attention : En général on n'a pas $(F \underset{\perp}{\bigoplus} F^\perp) \cap E = (F \cap E) \underset{\perp}{\bigoplus} (F^\perp \cap E)$ (prendre F une droite dans $\mathbb{R}^2$ et E une droite distincte de F et $F^\perp$).

   (b) La famille $(H_k)_{0 \le k \le n}$ est une famille libre de E_n. En effet, si on a $\sum_{k=0}^n \lambda_k H_k = 0$ alors en évaluant en $X = -1$ on a $\lambda_0 = 0$ puis en $X = -2$ on a $\lambda_1 = 0$ etc. Puisque cette famille comporte $n+1$ vecteurs et que $\dim E_n = n+1$ c'est une famille libre maximale donc une base donc tout polynôme de E_n s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire des H_k.

   (c) On a $g \in E_n$. Calculons $\left\langle g, X^\ell \right\rangle$ pour $1 \le \ell \le n$.

$$\begin{aligned}\left\langle g, X^\ell \right\rangle &= \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!} \int_0^{+\infty} x^{k+\ell} e^{-x} dx = \sum_{k=0}^n \frac{b_k}{k!}(k+\ell)! \\ &= \sum_{k=0}^n b_k H_k(\ell) = (\ell - 1) \cdots (\ell - \ell) \cdots (\ell - n) = 0.\end{aligned}$$

   On a donc bien $g \in \mathcal{H}_n \cap E_n$ et $g \neq 0$ car cela signifierait que tous les b_k sont nuls ce qui est impossible car $(X-1) \cdots (X-n) \neq 0$. Donc g dirige bien la droite vectorielle.

   (d) On a

$$\langle g, g \rangle = \sum_{i=0}^n \sum_{k=0}^n \frac{b_i b_k}{i!k!}(i+k)! = \sum_{i=0}^n b_i \sum_{k=0}^n b_k \underbrace{\frac{(i+k)!}{k!i!}}_{H_k(i)=0 \text{ si } i>0} = b_0 \sum_{k=0} b_k H_k(0) = b_0 (-1)^n n!$$

   On remarque, en évaluant 1 en -1 que $b_0 = (-1)^n (n+1)!$ ce qui conclu la preuve.

   (e) La projection de 1 sur $\mathcal{H}_n$ est $p_n(1) = \left\langle 1, \frac{g}{||g||_2} \right\rangle \frac{g}{||g||_2} = \frac{1}{n!(n+1)!} \langle 1, g \rangle g$. Or $\langle 1, g \rangle = \sum_{k=0} b_k H_k(0) = (-1)^n n!$ donc $p_n(1) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} g$. Enfin la distance de 1 à $\mathcal{H}_n$ est donnée par la racine de

$$\left|\left|1 - p_n(1)\right|\right|_2^2 = \langle 1, 1 \rangle - 2\frac{(-1)^n}{(n+1)!} \langle 1, g \rangle + \frac{1}{(n+1)!^2} \langle g, g \rangle = 1 - 2\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

   Donc $d(1, \mathcal{H}_n) = \sqrt{1 - \frac{1}{n+1}}$.

Exercice 71 (correction)

1. (a) On pose $I = \frac{1}{2}(A+B)$. On a $\forall M \in E$,

$$\begin{aligned}
||A-M||^2 = ||B-M||^2 &\Leftrightarrow \langle A-M, A-M\rangle = \langle B-M, B-M\rangle \\
&\Leftrightarrow \langle A-I+I-M, A-I+I-M\rangle = \langle B-I+I-M, B-I+I-M\rangle \\
&\Leftrightarrow ||A-I||^2 + 2\langle I-M, A-I\rangle + ||I-M||^2 = ||B-I||^2 + 2\langle I-M, B-I\rangle + ||I-M||^2 \\
&\Leftrightarrow 4\langle I-M, A-I\rangle = 0 \text{ car } ||A-I|| = ||B-I|| \\
&\Leftrightarrow \langle I-M, A-B\rangle = 0
\end{aligned}$$

Donc on a bien $M - I \in \mathrm{Vect}(B-A)$.

(b) Par définition on a $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$ et A_3 et A_4 sont à égale distance de A_1 et de A_2 donc font parti du plan affine $\mathrm{Vect}(A_1 - A_2)^\perp + \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$. On a donc

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2\left(\frac{1}{2}(A_1 + A_2)\right) + A_3 + A_4 = 0$$

puis, en divisant par 4 cela fait apparaître 0 comme barycentre de points du plan affine. Puisqu'un plan est convexe, 0 en fait parti. Autrement dit, $||A_1 - 0|| = ||A_2 - 0||$. De la même façon on a $||A_i|| = ||A_j||$ pour tout i, j. Quitte à composer par une homothétie on suppose dans la suite que $\forall i, ||A_i|| = 1$.

Si on considère un point $P \in T$, de norme 1 i.e. il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ tels que $0 \le \lambda_i \le 1$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_4 = 1$ et $P = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_4 A_4$ alors

$$1 = ||P|| \le ||\lambda_1 A_1|| + ||\lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4|| \le \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1$$

Par le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire on en déduit que $\lambda_1 A_1$ et $\lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4$ sont positivement colinéaires. Donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ ou alors il existe $\lambda \ge 0$ tel que $\lambda_1 A_1 = \lambda(\lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4)$. Mais, puisque $-A_1 = A_2 + A_3 + A_4$ est l'unique écriture de A_1 dans la base (A_2, A_3, A_4), on en déduit que $\lambda_1 = \lambda = 0$ (par positivité). On en déduit que $||\lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4|| = 1$ et on conclut de la même manière qu'un des λ_i vaut 1 et les autres sont nuls.

2. Il s'agit d'un sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$ car $\mathrm{id} \in \mathrm{Isom}(T)$ et $\forall f, g \in \mathrm{Isom}(T)$, $f \circ g^{-1}(T) = T$ donc $f \circ g^{-1} \in \mathrm{Isom}(T)$.

3. Les sommets de T sont les seuls points du tétraèdre de norme 1. Par ailleurs, $\forall f \in \mathrm{Isom}(T)$, $||f(A_i)|| = ||A_i||$ donc $f(A_i)$ est un élément de T de norme maximale donc c'est l'un des A_j. La restriction de f à S reste injective car f est injective mais puisque S a un nombre fini d'éléments et que $f_{|S}$ est à valeurs dans S elle est aussi surjective donc bijective.

4. (a) Il suffit de montrer que

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathrm{Isom}(T) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(S) \\ f & \longmapsto & f_{|S} \end{array}$$

est un isomorphisme de groupe car $\mathfrak{S}(S) \simeq \mathfrak{S}_4$. La question précédente montre que l'application φ est bien définie seulement.

φ est un isomorphisme de groupes : Il est clair qu'il s'agit d'un morphisme de groupes car les lois de groupe de $\mathrm{Isom}(T)$ et $\mathfrak{S}(S)$ sont la composition.

φ est injective : Soit $f \in \mathrm{Isom}(T)$ telle que $\varphi(f) = \mathrm{id}_S$, i.e. f fixe un à un les 4 sommets. Donc f est une isométrie (donc une application linéaire) qui coïncide avec id sur une base donc c'est l'identité sur $\mathbb{R}^3$.

φ est surjective : On va montrer qu'on peut atteindre toutes les transpositions. Soit $\tau = (A_1, A_2) \in \mathfrak{S}(S)$. On pose f la réflexion de plan $\mathrm{Vect}(A_3, A_4)$. On a vu qu'alors, puisque $\frac{1}{2}(A_1 + A_2)$, A_3 et A_4 sont à égale distance de A_1 et de A_2 ils appartiennent au plan tangent $\mathrm{Vect}(A_1 - A_2)^\perp$. Autrement dit, l'axe de la réflexion f est $\mathrm{Vect}(A_1 - A_2)$ donc

$$f(A_1) = f\left(\frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{1}{2}(A_1 - A_2)\right) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) - \frac{1}{2}(A_1 - A_2) = A_2.$$

Donc $\varphi(f) = \tau$.

Enfin, puisque les transpositions engendrent $\mathfrak{S}(S)$ et qu'elles sont toutes contenues dans l'image de φ il s'agit bien d'un morphisme surjectif.

(b) Le déterminant d'une isométrie réelle est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ donc det et $\varepsilon \circ \varphi$ sont des morphismes de groupes de $\mathrm{Isom}(T)$ dans $\{-1, 1\}$ et si f est une réflexion $\det(f) = -1$ et $\varepsilon(\varphi(f)) = -1$ car $\varphi(f)$ est une transposition. Puisque les réflexions engendrent $\mathrm{Isom}(T)$ d'après la question précédente det et $\varepsilon \circ \varphi$ coïncident sur des générateurs donc coïncident partout.

Exercice 72 (correction)

1. (a) On pose $I = \frac{1}{2}(A + B)$. On a $\forall M \in E$,

$$\begin{aligned}
||A - M||^2 = ||B - M||^2 &\Leftrightarrow \langle A - M, A - M\rangle = \langle B - M, B - M\rangle \\
&\Leftrightarrow \langle A - I + I - M, A - I + I - M\rangle = \langle B - I + I - M, B - I + I - M\rangle \\
&\Leftrightarrow ||A - I||^2 + 2\langle I - M, A - I\rangle + ||I - M||^2 = ||B - I||^2 + 2\langle I - M, B - I\rangle + ||I - M||^2 \\
&\Leftrightarrow 4\langle I - M, A - I\rangle = 0 \text{ car } ||A - I|| = ||B - I|| \\
&\Leftrightarrow \langle I - M, A - B\rangle = 0
\end{aligned}$$

Donc on a bien $M - I \in \mathrm{Vect}(B - A)$.

(b) Par définition on a $A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 0$ et A_3 et A_4 sont à égale distance de A_1 et de A_2 donc font parti du plan affine $\mathrm{Vect}(A_1 - A_2)^\perp + \frac{1}{2}(A_1 + A_2)$. On a donc

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 2\left(\frac{1}{2}(A_1 + A_2)\right) + A_3 + A_4 = 0$$

puis, en divisant par 4 cela fait apparaître 0 comme barycentre de points du plan affine. Puisqu'un plan est convexe, 0 en fait parti. Autrement dit, $\left|\left|A_1 - 0\right|\right| = \left|\left|A_2 - 0\right|\right|$. De la même façon on a $\left|\left|A_i\right|\right| = \left|\left|A_j\right|\right|$ pour tout i, j. Quitte à composer par une homothétie on suppose dans la suite que $\forall i, \left|\left|A_i\right|\right| = 1$.

Si on considère un point $P \in T$, de norme 1 i.e. il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ tels que $0 \leq \lambda_i \leq 1$ et $\lambda_1 + \dots + \lambda_4 = 1$ et $P = \lambda_1 A_1 + \dots + \lambda_4 A_4$ alors

$$1 = ||P|| \leq \left|\left|\lambda_1 A_1\right|\right| + \left|\left|\lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4\right|\right| \leq \sum_{i=1}^{4} \lambda_i = 1$$

Par le cas d'égalité de l'inégalité triangulaire on en déduit que $\lambda_1 A_1$ et $\lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4$ sont positivement colinéaires. Donc $\lambda_1 = 1$ et $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$ ou alors il existe $\lambda \geq 0$ tel que $\lambda_1 A_1 = \lambda(\lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4)$. Mais, puisque $-A_1 = A_2 + A_3 + A_4$ est l'unique écriture de A_1 dans la base (A_2, A_3, A_4), on en déduit que $\lambda_1 = \lambda = 0$ (par positivité). On en déduit que $\left|\left|\lambda_2 A_2 + \lambda_3 A_3 + \lambda_4 A_4\right|\right| = 1$ et on conclut de la même manière qu'un des λ_i vaut 1 et les autres sont nuls.

2. Il s'agit d'un sous-groupe de $O_3(\mathbb{R})$ car $\mathrm{id} \in \mathrm{Isom}(T)$ et $\forall f, g \in \mathrm{Isom}(T)$, $f \circ g^{-1}(T) = T$ donc $f \circ g^{-1} \in \mathrm{Isom}(T)$.

3. Les sommets de T sont les seuls points du tétraèdre de norme 1. Par ailleurs, $\forall f \in \mathrm{Isom}(T)$, $\left|\left|f(A_i)\right|\right| = \left|\left|A_i\right|\right|$ donc $f(A_i)$ est un élément de T de norme maximale donc c'est l'un des A_j. La restriction de f à S reste injective car f est injective mais puisque S a un nombre fini d'éléments et que $f_{|S}$ est à valeurs dans S elle est aussi surjective donc bijective.

4. (a) Il suffit de montrer que

$$\varphi : \begin{array}{rcl} \mathrm{Isom}(T) & \longrightarrow & \mathfrak{S}(S) \\ f & \longmapsto & f_{|S} \end{array}$$

est un isomorphisme de groupe car $\mathfrak{S}(S) \simeq \mathfrak{S}_4$. La question précédente montre que l'application φ est bien définie seulement.

φ est un isomorphisme de groupes : Il est clair qu'il s'agit d'un morphisme de groupes car les lois de groupe de $\mathrm{Isom}(T)$ et $\mathfrak{S}(S)$ sont la composition.

φ est injective : Soit $f \in \mathrm{Isom}(T)$ telle que $\varphi(f) = \mathrm{id}_S$, i.e. f fixe un à un les 4 sommets. Donc f est une isométrie (donc une application linéaire) qui coïncide avec id sur une base donc c'est l'identité sur $\mathbb{R}^3$.

φ est surjective : On va montrer qu'on peut atteindre toutes les transpositions. Soit $\tau = (A_1, A_2) \in \mathfrak{S}(S)$. On pose f la réflexion de plan $\mathrm{Vect}(A_3, A_4)$. On a vu qu'alors, puisque $\frac{1}{2}(A_1 + A_2)$, A_3 et A_4 sont à égale distance de A_1 et de A_2 ils appartiennent au plan tangent $\mathrm{Vect}(A_1 - A_2)^\perp$. Autrement dit, l'axe de la réflexion f est $\mathrm{Vect}(A_1 - A_2)$ donc

$$f(A_1) = f\left(\frac{1}{2}(A_1 + A_2) + \frac{1}{2}(A_1 - A_2)\right) = \frac{1}{2}(A_1 + A_2) - \frac{1}{2}(A_1 - A_2) = A_2.$$

Donc $\varphi(f) = \tau$.

Enfin, puisque les transpositions engendrent $\mathfrak{S}(S)$ et qu'elles sont toutes contenues dans l'image de φ il s'agit bien d'un morphisme surjectif.

(b) Le déterminant d'une isométrie réelle est à valeurs dans $\{-1, 1\}$ donc det et $\varepsilon \circ \varphi$ sont des morphismes de groupes de $\mathrm{Isom}(T)$ dans $\{-1, 1\}$ et si f est une réflexion $\det(f) = -1$ et $\varepsilon(\varphi(f)) = -1$ car $\varphi(f)$ est une transposition. Puisque les réflexions engendrent $\mathrm{Isom}(T)$ d'après la question précédente det et $\varepsilon \circ \varphi$ coïncident sur des générateurs donc coïncident partout.

3. *Groupes, anneaux et arithmétique - corrections*

Exercice 73 (correction)

Soit $x \in A \setminus 0$ alors xA est un idéal de A qui n'est pas réduit à $\{0\}$ car il contient x. Il s'agit donc de A donc il existe $y \in A$ tel que $xy = 1$. Donc A est un corps.

Exercice 74 (correction)

Par hypothèse l'ensemble $\{\langle x^n \rangle \mid n \in \mathbb{N}^*\}$ est fini donc il existe $j > i$ tel que $\left\langle x^j \right\rangle = \left\langle x^i \right\rangle$. Donc il existe $a \in A$ tel que $x^i = ax^j$ donc $x^i\left(1 - ax^{j-i}\right) = 0$ donc (par intégrité) $ax^{j-i} = 1$ donc x est inversible d'inverse ax^{j-i-1}.

Exercice 75 (correction)

1. C'est clair en écrivant $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ sous forme irréductible.
2. On a bien $0 \in I$. Soient $a \in A, x \in I$ et montrons que $ax \in I$. Si ax était inversible d'inverse alors x aurait ay pour inverse ce qui n'est pas possible. Soient $x, y \in I$. On écrit dans K

$$x + y = x\left(1 + x^{-1}y\right) \text{ et } x + y = y\left(1 + y^{-1}x\right)$$

or $x^{-1}y$ ou $xy^{-1} \in A$ par hypothèse donc au moins l'une des deux relations est dans A. On peut alors toujours factoriser $x + y$ par un non inversible donc $x + y \in I$.

3. Soit J un idéal quelconque et supposons qu'il contienne un inversible $x \in A$ alors $1 = xx^{-1} \in J$ par stabilité de J par produit par un élément de A. Donc pour tout $y \in A, 1 \cdot y \in J$ donc $J = A$. Donc les idéaux propres sont constitués de non inversibles donc sont inclus dans I.

Exercice 76 (correction)

On commence par remarquer que $\mathbb{Z} \subseteq A$ car $1 \in A$. On remarque aussi que si une fraction irréductible $\frac{a}{b}$ est dans A alors $\frac{1}{b} \in A$. En effet, en considérant une relation de Bézout $au + bv = 1$ on a

$$\frac{a}{b}\underbrace{u}_{\in A} + \underbrace{v}_{\in A} = \frac{au+bv}{b} = \frac{1}{b}.$$

On peut maintenant attaquer le cœur du problème. Soit $I \subseteq A$ un idéal quelconque. On veut montrer qu'il est principal.

L'ensemble $I \cap \mathbb{Z}$ est un idéal de $\mathbb{Z}$ donc de la forme $d\mathbb{Z}$ pour un certain $d \in \mathbb{N}$. On en déduit que $dA \subseteq I$. Réciproquement, soit $\frac{a}{b} \in I$ une fraction irréductible. L'élément $\frac{a}{b}b = a$ est dans $I \cap \mathbb{Z}$ comme produit d'un élément de I avec un élément de A donc $a = da'$ pour un certain $a' \in \mathbb{Z}$. On a donc $\frac{a}{b} = \underbrace{d}_{\in I}\underbrace{\frac{a'}{b}}_{\in A}$.

Exercice 77 (correction)

On a bien $0 \in J$. Soient $x \in J$ et $b \in A$, on a bien $\forall a \in A, 1 + abx \in A^\times$ car $x \in J$. Soient $x, y \in J$, on veut montrer que $x + y \in J$, i.e. que pour tout $a \in A$, $1 + a(x + y)$ inversible. Soit $a \in A$, on a

$$1 + a(x+y) = 1 + ax + ay = (1+ax)\left(1 + (1+ax)^{-1}\,y\right)$$

qui est bien inversible comme produit d'inversibles.

On pose $\mathfrak{M} = \bigcap_{\mathfrak{m}\text{ maximal}} \mathfrak{m}$ et on veut montrer $\mathfrak{M} = J$. On va faire une double inclusion « contraposée », c'est-à-dire qu'on va montrer que $A \setminus \mathfrak{M} \subseteq A \setminus J$ et l'inclusion réciproque.

Soit $x \notin \mathfrak{M}$ alors il existe $\mathfrak{m}$ un idéal maximal tel que $x \notin \mathfrak{m}$. On en déduit que l'idéal $\mathfrak{m} + xA$ est un idéal contenant $\mathfrak{m}$ mais différent de $\mathfrak{m}$ car il contient aussi x. Il s'agit donc de A tout entier. Il existe alors $m \in \mathfrak{m}$ et $a \in A$ tels que $m - ax = 1$ donc $1 + ax = m$. L'élément $1 + ax$ ne peut être inversible car il appartient à un idéal propre donc $x \notin J$.

Soit $x \notin J$ alors il existe $a \in A$ tel que $1 + ax$ non inversible. L'idéal principal $(1 + ax)A$ est alors un idéal propre qui est par conséquent inclus dans un idéal maximal $\mathfrak{m}$ d'après le Lemme de Krull. Donc $1 + ax \in \mathfrak{m}$ mais alors si on avait $x \in \mathfrak{m}$ on aurait aussi $1 = 1 + ax - ax \in \mathfrak{m}$ ce qui impliquerait que $\mathfrak{m}$ contient un inversible donc que $\mathfrak{m} = A$ ce qui est absurde.

Exercice 78 (correction)

Le chiffre des unités correspond au reste de la division euclidienne par 10. On a $2024^{2024} + 2023^{2023} = 4^{2024} + 3^{2023} \mod 10$. On remarque que 3 est inversible dans $\mathbb{Z}/10\mathbb{Z}$ et que, par le théorème d'Euler, $3^{\varphi(10)} = 3^4 \equiv 1 \mod 10$ donc $3^{2023} = 3^{2020+3} = 3^3 = 7 \mod 10$. On a $4^2 = 16 = 6 = -4 \mod 10$ d'où l'on déduit (par une récurrence qu'il faudrait rédiger) que puisque $\forall k \geq 1, 6^k = 6 \mod 10$ alors $4^{2k} = 16^k = 6^k = 6$. Finalement, $2024^{2024} + 2023^{2023} = 6 + 7 = 3 \mod 10$. Donc le chiffre des unités est 3.

Exercice 79 (correction)

Puisque 25 et 21 sont premiers entre eux, d'après le théorème d'Euler $21^{\varphi(25)} \equiv 1 \mod 25$. Or $\varphi(25) = \varphi(5^5) = 5 \times (5-1) = 20$. On en déduit donc que $21^{19} \equiv 21^{-1} \mod 25$ où 21^{-1} désigne l'inverse modulaire de 21. Pour le calculer il suffit de multiplier l'inverse modulaire de 3 avec l'inverse de 7. On remarque que $3 \times 8 = 24 \equiv -1 \mod 25$ donc -8 est l'inverse modulaire de 3. De même $7^2 \equiv 49 \equiv -1 \mod 25$ donc -7 est l'inverse de 7 modulo 25 (on pourrait aussi bien appliquer l'algorithme de Bézout étendu pour trouver les inverses modulaires si on ne voit pas directement ces relations). On en déduit que $21^{19} \equiv -8 \times -7 \equiv 6 \mod 25$.

Exercice 80 (correction)

Il s'agit de calculer $9^{10^n} \mod 10^n$. Pour cela on va appliquer le théorème d'Euler. On a $\varphi(10^n) = 2^{n-1}5^{n-1} \times (5-1) = 4 \cdot 10^{n-1}$. Par ailleurs

$$9^{10^n} = 9^{10^{n-1}\cdot 10} = 9^{2\times 4\times 10^{n-1}}9^{2\times 10^{n-1}} = 81^{4\times 10^{n-1}}3^{4\times 10^{n-1}} \equiv 1 \mod 10^n$$

d'après le théorème d'Euler.

Exercice 81 (correction)

1. Il faut vérifier que $\psi(a,b)$ ne dépend pas des classes de a et de b. On a

$$\psi(a+kn, b+\ell m) = vm(a+kn) + un(b+\ell m) = vma + unb + \underbrace{vkmn + u\ell mn}_{=0} = \psi(a,b).$$

Enfin, pour tout $x \in \mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$ on a $\psi(\varphi(x)) = vmx + unx = (vm+un)x = x$ (d'après ce qui précède on peut choisir la classe que l'on veut de a et de b pour calculer $\psi(a,b)$ donc pour $(x \mod n, x \mod m)$ on peut choisir x identifié avec un représentant entier). On en déduit que ψ est l'inverse à gauche de φ. Puisque les ensembles de départ et d'arrivée sont finis de même cardinaux on en déduit que ψ est bijectif et qu'il s'agit de l'inverse de φ.

2. On pose $\varphi : \mathbb{Z}/77\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/7\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$ l'isomorphisme du théorème des restes. Puisque φ est bijectif, un élément $x \in \mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$ vérifie $x^2+x+1 = 0$ si et seulement si $\varphi(x^2+x+1) = \varphi(0) = (0,0)$ et, puisque φ est un isomorphisme d'anneaux (il respecte l'addition et la multiplication) ceci équivaut encore à

$$\varphi(x)^2 + \varphi(x) + \varphi(5) = (0,0) \Leftrightarrow (x^2+x+5 \mod 7, x^2+x+5 \mod 11) = (0,0).$$

Autrement dit, résoudre x^2+x+5 dans $\mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$ est équivalent à résoudre x^2+x^2+5 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Si on obtient des solutions dans chacun des deux anneaux on pourra reconstituer les solutions dans $\mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$ grâce à ψ, l'inverse de φ.

Résolution locale : On veut résoudre x^2+x+5 dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$. Je propose trois méthodes, la première plus classique mais à prendre avec beaucoup de précautions au niveau des notations pour les raisons que je détaille à la fin. Je précise que je fais tous les calculs dans $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, je ne mets donc ni modulo, ni barre verticale car le contexte est clair.

Méthode 1 (avec le discriminant) : On calcule $\Delta = 1^2 - 4\times 5 = -19 = -19+21 = 2 = 2+7 = 9 = 3^2$. Ainsi $\delta = 3$ est une racine de $\Delta = 2$ (et -3 est l'autre). Par ailleurs l'inverse de 2 est 4 car $2\times 4 = 8 = 1$. Donc les deux solutions sont $x = 4(-1+3) = 1$ et $4(-1-3) = -16 = -16+21 = 5$. *Attention, ici il ne faudrait surtout pas écrire des grossièretés comme « Les racines sont $\frac{-1\pm\sqrt{2}}{2}$ ». Les écritures $\frac{1}{2}$ et $\sqrt{2}$ n'ont à priori aucun sens. C'est, selon moi le danger de cette méthode ; encore un encouragement à se passer le plus possible du discriminant et à chercher des racines évidentes/passer par la forme canonique le plus possible.*

Méthode 2 (avec racines évidentes, le plus rapide) : On remarque que 1 est une racine évidente. Par les relations coefficients racines l'autre racine x vérifie $1\times x = 5$ donc $x = 5$ est l'autre racine.

Méthode 3 (avec la forme canonique, la plus sûre et générale) : On écrit

$$x^2+x+5 = x^2+2\times 4x+5 = (x+4)^2-16+5 = (x+4)^2-4 = (x+4)^2-2^2 = (x+4-2)(x+4+2) = (x+2)(x+6) = (x-5)(x-1).$$

On a alors, par intégrité de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$, $x^2+x+5 = 0$ si, et seulement si $(x-1)(x-5) = 0$, i.e. $x = 1$ ou $x = 5$.

De la même façon on peut résoudre $x^2+x+5 = 0$ dans $\mathbb{Z}/11\mathbb{Z}$. Il faudrait bien sûr chercher les racines évidentes en priorité. On trouverait alors $x = 2$ puis on trouverait l'autre avec les relations coefficients-racines. On va faire comme si on avait rien vu et faire la forme canonique pour s'entraîner. On a

$$x^2+x+5 = x^2+2\times 6x+5 = (x+6)^2-36+5 = (x+6)^2-14+5 = (x+6)^2-9 = (x+3)(x+9) = (x-8)(x-2).$$

On en déduit que les racines sont 2 et 8 modulo 11.

Les racines dans $\mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$ sont donc $\psi(1,2), \psi(1,8), \psi(5,2)$ et $\psi(5,8)$. Pour déterminer l'expression de ψ il suffit de trouver une identité de Bézout entre 7 et 11. On a $-3\times 7+11\times 2 = 1$ (on la trouve de tête ou avec l'algorithme d'Euclide étendu). On a alors $\psi(a,b) = 22a - 21b$. Donc les solutions de x^2+x+2 dans $\mathbb{Z}/77\mathbb{Z}$ sont

- $\psi(1,2) = 22 - 42 = -20 = 57$.
- $\psi(1,8) = 22 - 21 \times 8 = 22 - 2 \times 4 \times 21 = 22 - 2 \times 7 = 8$.
- $\psi(5,2) = 5 \times 22 - 2 \times 21 = 110 - 42 = 68 (= -9)$.
- $\psi(5,8) = \psi(-2,-3) = -44 + 3 \times 21 = 19$.

On peut vérifier que ça marche pour une racine si on n'est pas sûr. On a $8^2+8+5 = 64+13 = 77 = 0$. Ce qui est plutôt rassurant.

Exercice 82 (correction)

1. Il est clair que -1 et 1 sont des solutions et $-1 \neq 1$ car $p \neq 2$. Réciproquement, si on a $x^2 - 1 = (x-1)(x+1) = 0$ alors $x = -1$ ou $x = 1$ par intégrité de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Le polynôme $X^{\frac{p-1}{2}} - 1 \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})[X]$ est à coefficients dans un corps donc possède au plus $\dfrac{p-1}{2}$ racines.
2. On considère le morphisme d'anneaux surjectif $\pi : \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $x \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ tel que $x^2 = 1$. On a alors $\pi(x)^2 = 1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ donc $\pi(x) = \pm 1$ d'après la question précédente. On en déduit qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = \pm 1 + kp$. On a alors $x^2 = 1 \pm 2kp + k^2p^2 = 1 \pm 2kp = 1$ donc $2kp = 0$. On en déduit que $p \mid k$ donc $x = \pm 1$.
3. Supposons qu'il existe $\alpha \in \mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z}$ tel que $\alpha^2 = -1$. Ceci implique que α est inversible. On remarque que $\varphi(p^2) = p(p-1)$ qui est pair car p est impair. D'après le théorème d'Euler on a alors

$$1 = \alpha^{\varphi(p^2)} = (\alpha^2)^{\varphi(p^2)/2} = (\alpha^2)^{p\frac{p-1}{2}} = (-1)^{\frac{p-1}{2}}$$

Puisque $-1 \neq 1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on a nécessairement $\frac{p-1}{2}$ pair, i.e. $p \equiv 1 \mod 4$.

Réciproquement, on considère l'application $x \in (\mathbb{Z}/p^2\mathbb{Z})^\times \mapsto x^{p\frac{p-1}{2}}$ qui est à valeur dans ± 1 d'après le théorème d'Euler. Il s'agit aussi de carrés car $x^{p\frac{p-1}{2}} = \left(x^{p\frac{p-1}{4}}\right)^2$. Il s'agit alors de montrer que cette application ne prend pas que la valeur 1. Supposons par l'absurde que ce soit le cas. On remarque que pour tout $x \in \mathbb{Z}, \mathrm{pgcd}(x,p) = 1 \Leftrightarrow \mathrm{pgcd}(x,p^2) = 1$ si bien que la restriction de π aux inversibles est surjective sur les inversibles de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. On remarque alors que si $x \in \mathbb{Z}$ satisfait $x^{p\frac{p-1}{2}} = 1 \mod p^2$ alors $x^{p\frac{p-1}{2}} \mod p$ mais, d'après le petit théorème de Fermat $x^p = x \mod p$ donc $x^{\frac{p-1}{2}} = 1 \mod p$. Par hypothèse et surjectivité de la restriction de π on en déduit que $\forall x \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times, x^{\frac{p-1}{2}} - 1 = 0$ ce qui contredit la question 1.

Exercice 83 (correction)

1. On pose tout simplement $\varphi(k) = g^k$ qui définit bien un morphisme et vérifie $\varphi(1) = g$. Il est unique car 1 est un générateur du groupe $\mathbb{Z}$ donc φ est totalement déterminé par son image par 1.

   Par définition de l'ordre d'un élément $\ker \varphi = n\mathbb{Z}$. On pose alors $\widetilde{\varphi}(\overline{k}) = g^k$ bien défini car si $\overline{k} = \overline{\ell}, k - \ell \in n\mathbb{Z}$ et donc $\widetilde{\varphi}(\overline{k}) = \widetilde{\varphi}(\overline{\ell})$. De plus l'image de $\widetilde{\varphi}$ est $\langle g \rangle$ par définition et il est injectif car $\ker \varphi = n\mathbb{Z}$.
   Il existe un théorème appelé théorème d'isomorphisme ou plus généralement propriété universelle du quotient de groupes généralement vu en niveau L3 qui rend l'isomorphisme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \simeq \langle g \rangle$ presqu'immédiat.
2. Soit G d'ordre p et $x \in G \setminus \{1\}$. D'après le théorème de Lagrange l'ordre de x divise p mais par hypothèse ce n'est pas 1. Donc x d'ordre p, i.e. $\langle x \rangle = G$ et on peut appliquer la question précédente.

Exercice 84 (correction)

1. On pose $\ell = \mathrm{ppcm}(n,m)$. Puisque $gh = hg$ on a $(gh)^\ell = g^\ell h^\ell = 1_G$ donc l'ordre de gh divise ℓ. Réciproquement, soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $(gh)^d = 1_G$. Alors $g^d = h^{-d}$ donc $g^d, h^{-d} \in \langle g \rangle \cap \langle h \rangle$ donc ils sont tous les deux nuls et donc $d \mid n$ et $d \mid m$ donc $d \mid \ell$. En particulier pour $d = o(gh)$, l'ordre de gh divise ℓ ce qui nous permet de conclure.

2. Il suffit de prouver qu'on peut se ramener à la question précédente, i.e. montrer que $\langle g\rangle \cap \langle h\rangle = \{1\}$. Je propose deux solutions pour ceci.

Méthode 1 : D'après la question précédente il suffit de montrer que $\langle g\rangle \cap \langle h\rangle = \{1\}$. Soit $x \in \langle g\rangle \cap \langle h\rangle$ donc $x^n = 1$ et $x^m = 1$. Si on considère $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $nu + mv = 1$ (relation de Bézout) alors $x^1 = x^{nu+mv} = (x^n)^u(x^m)^v = 1_G$. C'est ce qu'on voulait !

Méthode 2 : L'intersection $K = \langle g\rangle \cap \langle h\rangle$ est un sous-groupe de $\langle g\rangle$ donc son ordre divise $\#\langle g\rangle = n$ (théorème de Lagrange), de même pour $\langle h\rangle$. Donc l'ordre de K divise le $\mathrm{pgcd}(n, m) = 1$. Donc $K = \{1\}$.

Exercice 85 (correction)

1. Si $a = \pm 1$ alors $b^2 = -1$ qui n'a aucune racine donc on a nécessairement $a = 0$ mais alors $b^2 = 0$ donc $(0, 0)$ est l'unique solution.
2. D'après la question précédente pour $a + ib \neq 0$ on a $a^2 + b^2 \neq 0$ et

$$(a+ib) \times \left(\frac{a}{a^2+b^2} + i\frac{-b}{a^2+b^2}\right) = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} + i\frac{ab-ba}{a^2+b^2} = 1$$

qui est le neutre multiplicatif donc tous les éléments non nuls sont inversibles.

3. Puisque K est un corps à 9 éléments, $K^\times$ est de cardinal 8 donc tous ses éléments sont d'ordre $1, 2, 4$ ou 8. On a $(1 + i)^4 = (-2i)^2 = i^2 = -1$ donc $1 + i$ est d'ordre 8.

Plus généralement pour toute puissance p^s d'un nombre premier il existe un corps fini possédant p^s et tous vérifie $K^\times$ cyclique.

Exercice 86 (correction)

Je propose deux preuves de cet exercice.

Méthode 1: On pose pour tout $g \in G$, $P_g = \{g, g^{-1}\}$. On remarque que pour tout $g, h \in G$, $P_g = P_h$ ou $P_g \cap P_h = \emptyset$. En effet, si $g \in P_h, g = h$ ou $g = h^{-1}$ mais alors $g^{-1} = h$ donc $P_g = P_h$. De même si $g^{-1} \in P_h$. On remarque aussi que $\#P_g = 2$ si, et seulement si g est d'ordre > 2. Enfin, G est partitionné en ensemble de la forme P_g, i.e.

$$G = \bigsqcup_{g\in I} P_g$$

or $P_e = \{e\}$ donc les autres P_g de la partition ne peuvent être tous de cardinal 2 par imparité de $\#G$. Autrement dit, il existe $g \neq e$ tel que $P_g = \{g\}$, i.e. g d'ordre 2.

Méthode 2 : On pose

$$\varphi : \begin{array}{rl} G & \longrightarrow G \\ g & \longmapsto g^{-1} \end{array}$$

Il s'agit d'une involution car $\varphi\circ\varphi = \mathrm{id}_G$ (attention, si G n'est pas commutatif φ n'est pas un morphisme). Autrement dit, on peut considérer φ comme une permutation, i.e. $\varphi \in \mathfrak{S}(G)$. En notant $\varphi = c_1c_2\cdots c_m$ sa décomposition en cycles disjoints on a $\varphi^2 = \mathrm{id} = c_1^2c_2^2\cdots c_m^2$ donc tous les c_i^2 sont triviaux. En d'autres, termes la décomposition en cycles disjoints de φ est constituée de transpositions. Son support est donc de cardinal pair. Puisque $\varphi(e) = e$ l'élément e ne fait pas partie du support d'un cycle et donc il existe un autre élément $g \neq e$ qui ne fait pas partie de son support donc tel que $\varphi(g) = g$.

Exercice 87 (correction)

1. Soit $x, y \in G$ on a par hypothèse $(xy)^2 = xyxy = e$ donc en multipliant à droite par y puis par x on a

$$xyxyyx = xyxy^2x = xyx^2 = xy = e \times yx = yx$$

donc G est bien commutatif. On note désormais 0 le neutre de G et $+$ sa loi de composition interne.

2. On peut pose pour tout $x \in G$

$$0 \cdot x = 0 \text{ et } 1 \cdot x = x$$

et on montre que ceci munit G d'une structure de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-espace vectoriel. Pour cela il suffit de vérifier que pour tout $\lambda, \mu \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}, x, y \in G$ on a

— $1 \cdot x = x$ (vrai par construction).

— $(\lambda + \mu) \cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$ ce qui est le cas car $(1+1) \cdot x = 0 \cdot x = 0$ et d'autre part $x + x = 2x = 0$ par hypothèse.

— $\lambda \cdot (x + y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$ ce qui est vrai (il suffit de distinguer les cas $\lambda = 0$ ou 1).

— $(\lambda\mu) \cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$ vrai aussi.

Donc G est un $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})$-espace vectoriel donc isomorphe à $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^I$ pour un isomorphisme donné par le choix d'une base de G de cardinal I. Puisque G est fini alors I l'est aussi, disons de cardinal n, et on a $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ de cardinal 2^n.

3. Soit G un groupe d'ordre 4. Tous ses éléments non neutres sont d'ordre 2 ou 4 car divisent l'ordre du groupe. Supposons qu'il existe un élément g d'ordre 4 alors $\langle g \rangle = G$ et, dans ce cas, on a un isomorphisme $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \simeq G$ donné par $\overline{k} \mapsto g^k$. Sinon, d'après ce qui précède on a un isomorphisme de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$-espaces vectoriels $G \simeq (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2$ donc, en particulier, un isomorphisme de groupes. Donc, à isomorphisme près, les deux seuls groupes à 4 éléments sont

$$\mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \text{ et } (\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^2.$$

Ce dernier est souvent appelé *groupe de Klein*.

Exercice 88 (correction)

1. Si un tel morphisme existe alors il doit vérifier $\gamma_A(1) = 1_A$ et $\forall n \in \mathbb{N}, \gamma_A(n) = \gamma_A(1 + \cdots + 1) = \gamma_A(1) + \cdots + \gamma_A(1) = n1_A$. Enfin, $\gamma_A(1-1) = 0$ donc $\gamma_A(-1) = -1_A$. On en déduit que $\gamma_A(n) = n1_A$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. On définit alors γ_A de cette manière et il faut prouver qu'il s'agit d'un morphisme d'anneaux c'est-à-dire que pour tout $n, m \in \mathbb{Z}$

— $\gamma_A(1) = 1_A$

— $\gamma_A(n+m) = \gamma_A(n) + \gamma_A(m)$ vrai par définition.

— $\gamma_A(nm) = \gamma_A(n)\gamma_A(m)$ vrai car $\gamma_A(nm) = nm1_A = n1_A m1_A$.

2. Soit d un diviseur de m la caractéristique, i.e. $m = dd'$ alors

$$\gamma_K(m) = \gamma_K(dd') = \gamma_K(d)\gamma_K(d') = 0$$

donc $\gamma_K(d) = 0$ ou $\gamma_K(d') = 0$ car intégrité du corps. Donc $m \mid d$ ou $m \mid d'$ donc m n'a pas de diviseur strict et donc m premier.

3. Puisque γ_K est un morphisme d'anneaux il suffit de montrer que $\widetilde{\gamma}_K$ est bien défini et injectif. Si $\overline{k} = \overline{\ell}$ alors $k - \ell \in p\mathbb{Z}$ donc $\gamma_K(k-\ell) = 0$, i.e. $\gamma_K(k) = \gamma_K(\ell)$ donc $\widetilde{\gamma}_K$ bien défini. Par ailleurs, $\widetilde{\gamma}_K(\overline{k}) = 0 \Leftrightarrow k \in p\mathbb{Z} \Leftrightarrow \overline{k} = 0$ donc le morphisme est injectif.

4. On définit [6] une structure de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ espace vectoriel sur K à l'aide de $\widetilde{\gamma}_K$. On définit

$$\forall \lambda \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}, \forall x \in K, \lambda \cdot x = \widetilde{\gamma}_K(\lambda)x.$$

Il faut vérifier que tous les axiomes d'un espace vectoriel sont vérifiés ce qui est pénible et peu intéressant donc je ne le fais pas (héhé). Cela découle du fait que $\widetilde{\gamma}_K$ est un morphisme et des propriétés d'anneaux de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et de K.

Puisque K est fini alors il est de dimension finie, disons n sur $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui est un corps. Considérer une base de K fournit alors un isomorphisme d'espaces vectoriels

$$K \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^n.$$

6. C'est en fait généralement vrai que tout morphisme de corps $k \to K$ permet de définir une structure de k-espace vectoriel sur K.

Exercice 89 (correction)

1. Une isométrie du plan est soit une rotation (si de déterminant 1) soit une symétrie orthogonale (si de déterminant -1).
2. Sous l'identification de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{C}$ on peut écrire $r(z) = e^{i\frac{2\pi}{n}} z$ et $s(z) = \overline{z}$. Ce sont bien des isométries. On a alors $r\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = e^{i\frac{2(k+1)\pi}{n}} \in \mu_n$ et $s\left(e^{i\frac{2k\pi}{n}}\right) = e^{-i\frac{2k\pi}{n}} \in \mu_n$. Le neutre de G est l'identité. On a $r^n(z) = z$ donc l'ordre de r divise n et pour tout $m \leq n-1, r^m(1) = e^{i\frac{2m\pi}{n}} \neq 1$ donc r d'ordre $\geq n$ donc d'ordre n. Puisque s est une symétrie orthogonale elle est d'ordre 2.
3. On a $srs(z) = \overline{e^{i\frac{2\pi}{n}}\overline{z}} = e^{-i\frac{2\pi}{n}} z = r^{-1}(z)$ donc $srs = r^{-1}$. Si G était commutatif on aurait $srs = s^2 r = r$ mais alors $r = r^{-1}$ ce qui donnerait $r^2 = \mathrm{id}$ donc $n|2$ ce qui n'est pas possible puisque $n \geq 3$. Donc G n'est pas commutatif.
4. On peut écrire $r'(z) = e^{i\theta} z$ et, puisque $r'(\mu_n) \subseteq \mu_n$ il existe $0 \leq k \leq n-1$ tel que
$$r'(1) = e^{i\theta} = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$$
donc $\exists \ell \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta = \frac{2k\pi}{n} + 2\pi\ell$. Donc $r' = r^k$.
5. Soit f une isométrie telle que $f(\mu_n) \subseteq \mu_n$. Si f est une rotation alors $f \in \langle r \rangle$ d'après la question précédente. Sinon f est une symétrie donc de déterminant -1 mais alors sf est une isométrie de déterminant $-1 \times -1 = 1$ donc une rotation donc il existe k tel que $sf = r^k$ donc $f = sr^k$. Donc G est bien engendré par s et r.
6. La question précédente montre l'existence. Montrons l'unicité. Soit $f = s^{\varepsilon} r^k = s^{\varepsilon'} r^{k'}$ alors on a
$$s^{\varepsilon - \varepsilon'} = r^{k'-k}.$$
En considérant le déterminant on doit avoir $\varepsilon = \varepsilon' \mod 2$ donc $\varepsilon = \varepsilon'$. On a alors $r^{k'-k} = \mathrm{id}$ donc $k' = k \mod n$ donc $k' = k$.
7. La question précédente fournit une bijection
$$\begin{array}{rcl} \{0,1\} \times \{0, \dots, n-1\} & \longrightarrow & G \\ (\varepsilon, k) & \longmapsto & s^{\varepsilon} r^k. \end{array}$$
Donc G est de cardinal $2n$.

Exercice 90 (correction)

1. Il est clair que $Z(G)$ contient l'élément neutre et qu'il est stable par produit et inverse. On a $x \in Z(G) \Leftrightarrow \forall y \in G, xy = yx$, i.e. $x = yxy^{-1}$.
2. Soient $x, y, z \in G$
Réflexive car $x = exe^{-1}$
Symétrique car $y = gxg^{-1} \Leftrightarrow g^{-1}yg = x$.
Transitive car $y = gxg^{-1}$ et $z = hyh^{-1} \Rightarrow z = hgxg^{-1}h^{-1} = hgx(hg)^{-1}$.
3. Une relation d'équivalence partitionne un ensemble en classes d'équivalences. Si on pose $y_1, \dots, y_s$ des représentants des classes triviales, i.e. $y_j \in Z(G)$ et $x_1, \dots, x_r$ représentants des autres classes on a
$$G = \underbrace{\bigsqcup_{j=1}^{s} C(y_j)}_{=Z(G)} \sqcup \bigsqcup_{i=1}^{r} C(x_i) \text{ donc } \#G = \#Z(G) + \sum_{i=1}^{r} \#C(x_i).$$
4. (a) L'application $\iota : \begin{array}{rcl} A & \longrightarrow & xA \\ a & \longmapsto & xa. \end{array}$ a pour inverse $b \mapsto x^{-1}b$ donc les deux ensembles sont en bijection.

(b) Soit $z \in \varphi^{-1}(yxy^{-1})$, i.e. $zxz^{-1} = yxy^{-1}$ donc $y^{-1}zxz^{-1}y = y^{-1}zx(y^{-1}z)^{-1} = x$. Ainsi, $y^{-1}z \in \varphi^{-1}(x)$.

(c) D'après les deux questions précédentes les préimages par φ des singletons sont tous de même cardinal. Par ailleurs, les préimages d'une partition forment une partition de l'ensemble de départ, i.e.

$$G = \bigsqcup_{X \in C(x)} \varphi^{-1}(X) \text{ donc } \#G = \#C(x)\#\varphi^{-1}(x).$$

5. D'après la question 3. $\#Z(G) = \#G - \sum_{i=1}^{r} \#C(x_i)$. D'après ce qui précède $\#C(x_i)$ divise p^n et, par définition, $\#C(x_i) \neq 1$ donc $\#Z(G)$ divisible par p donc ne peut pas être trivial.

Exercice 91 (correction)

1. On a bien $\varphi(xy) = x^2y^2 = \varphi(x)\varphi(y)$.
2. Soit $x \in \ker\varphi$ alors $x^2 = 1$. Donc l'ordre de x divise 2. Par le théorème de Lagrange son ordre divise aussi $\#K^\times = \#K - 1$ impair par parité de K donc l'ordre de x divise $\operatorname{pgcd}(2, \#K - 1) = 1$. Donc $x = 1$. On en déduit que $\ker\varphi = \{1\}$ donc φ est injectif entre deux ensembles de même cardinal donc surjectif. Donc tous les éléments de $K^\times$ sont des carrés et $0^2 = 0$ donc tous les éléments de K sont des carrés.
3. (a) Soit $x \in \ker\varphi$ alors $x^2 = 1$, i.e. $(x-1)(x+1) = 0$. Par intégrité de K on a alors $x = 1$ ou $x = -1$. Le morphisme est donc injectif si, et seulement si $1 = -1$. Dans ce cas 1 est d'ordre 2 dans $(K, +)$ donc (Lagrange) 2 divise l'ordre de K ce qui est impossible.

   (b) Pour toute application $f : E \to F$ on a $E = \bigsqcup_{y \in F} f^{-1}(\{y\})$. En appliquant cela à φ en indexant l'union par son image on a l'égalité voulue. Pour $y \in S_K, \exists x \in K^\times, y = x^2$ on a alors $\varphi^{-1}(y) = \{-x, x\}$ en effet x et $-x$ sont bien des racines de y, $x \neq -x$ car sinon on aurait $1 = -1$ donc φ injectif. Et y ne peut avoir plus de deux racines distincts car cela signifierait que le polynôme $X^2 - y \in K[X]$ possède plus de racines que son degré. Donc

   $$q - 1 = \#K^\times = \# \bigsqcup_{y \in S_K} \varphi^{-1}(\{y\}) = \sum_{y \in S_K} \#\{x, -x\} = 2\#S_K.$$

   Donc $\#S_K = \frac{q-1}{2}$.

   (c) Si x est un carré non nul, i.e. $x = a^2$ pour un certain $a \in K$ alors $x^{\frac{q-1}{2}} = (a^2)^{\frac{q-1}{2}} = a^{q-1} = 1$ d'après le théorème de Lagrange. Donc l'ensemble des carrés non nul (de cardinal $\frac{q-1}{2}$) est racine du polynôme $X^{\frac{q-1}{2}} - 1 \in K[X]$ qui est de degré $\frac{q-1}{2}$. Donc les racines de ce polynôme sont exactement les carrés non nuls de K.

   (d) Puisque $x^{q-1} - 1 = \left(x^{\frac{q-1}{2}} - 1\right)\left(x^{\frac{q-1}{2}} + 1\right)$ donc pour x un non carré non nul on a $x^{\frac{q-1}{2}} = -1$. Si on considère alors x, y deux non carrés non nul on a $(xy)^{\frac{q-1}{2}} = x^{\frac{q-1}{2}} y^{\frac{q-1}{2}} = (-1) \times (-1) = 1$.

4. Dénombrabilité - corrections

Exercice 92 (correction)

On a une application surjective

$$\begin{array}{rcl} A \times B & \longrightarrow & A + B \\ (a, b) & \longmapsto & a + b. \end{array}$$

Or l'ensemble $A \times B$ est dénombrable comme produit cartésien fini d'ensembles dénombrables. Donc $A + B$ est dénombrable comme image par une application surjective d'un ensemble dénombrable.

Exercice 93 (correction)

On note A l'ensemble des entiers algébriques. On a

$$A = \bigcup_{d \in \mathbb{N}^*} \bigcup_{(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d} (X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_d)^{-1}(\{0\})$$

Puisqu'un polynôme de degré d a au plus d racines l'ensemble $\bigcup_{(a_1, \ldots, a_d) \in \mathbb{Z}^d} (X^d + a_1 X^{d-1} + \cdots + a_d)^{-1}(\{0\})$ est dénombrable comme union dénombrable d'ensembles finis.

Enfin, puisque l'union dénombrable d'ensembles dénombrables est dénombrable on a le résultat attendu.

Exercice 94 (correction)

Méthode 1 : changement de variables. On décompose $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ en tranches obliques ;

$$\mathbb{N} \times \mathbb{N} = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} \bigcup_{p+q=N} (p, q).$$

On a donc

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \sum_{q \in \mathbb{N}} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{N \in \mathbb{N}} \sum_{p+q=N} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{N \in \mathbb{N}} \sum_{p+q=N} \frac{1}{(N+1)^\alpha} = \sum_{N \in \mathbb{N}} \frac{1}{(N+1)^{\alpha-1}}$$

qui converge si et seulement si $\alpha - 1 > 1$ donc si et seulement si $\alpha > 2$.

Méthode 2 : force brute. La série $\sum_{q \in \mathbb{N}} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} = \sum_{n \geq p+1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$ (il s'agit de la série des restes d'une série de Riemann). Une comparaison série-intégrale donne l'équivalent

$$\sum_{n \geq p+1} \frac{1}{n^\alpha} \underset{p \to \infty}{\sim} \frac{1}{p^{\alpha-1}}.$$

Il suffit alors de réappliquer le critère de Riemann à la série $\sum_{p \in \mathbb{N}} u_p$ où $u_p = \sum_{q \in \mathbb{N}} \frac{1}{(p+q+1)^\alpha} \sim \frac{1}{p^{\alpha-1}}$. La conclusion est (heureusement) la même que pour la première méthode.

Exercice 95 (correction)

— La famille $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$. Donc oui.

— On montre que la famille $\left(\frac{1}{X-a}\right)_{a\in\mathbb{R}}$ est libre. Ceci prouvera que, si $\mathbb{R}(X)$ admet une base, cette dernière est de cardinal non dénombrable.

Soit $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ des réels distincts et $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ tels que

$$\frac{\lambda_1}{X-a_1} + \cdots + \frac{\lambda_n}{X-a_n} = 0.$$

On peut multiplier par $X - a_1$ puis évaluer en a_1 ce qui donne $\lambda_1 = 1$. On prouve de la même façon que $\lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0$. Donc la famille est bien libre.

Exercice 96 (correction)

On remarque déjà que

$$\mathbb{Q}[X,Y] = \bigcup_{(n,m)\in\mathbb{N}^2} \left\{ \sum_{i\leq n, j\leq m} a_{ij} X^i Y^j \right\}$$

qui est dénombrable car $\left\{ \sum_{i\leq n, j\leq m} a_{ij} X^i Y^j \right\}$ est dénombrable, par exemple car l'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Q}^{nm} & \longrightarrow & \left\{ \sum_{i\leq n, j\leq m} a_{ij} X^i Y^j \right\} \\ a_{ij} & \longmapsto & \sum_{i\leq n, j\leq m} a_{ij} X^i Y^j \end{array}$$

est surjective.

On a alors

$$C = \bigcup_{a\in A} \bigcup_{b\in B} \bigcup_{P\in\mathbb{Q}[X,Y]} \{P(a,b)\}$$

dénombrable comme union de dénombrables.

Exercice 97 (correction)

Supposons par l'absurde qu'il existe une surjection $f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ et considérons l'ensemble $A = \{n \in \mathbb{N} \mid n \notin f(n)\}$. Il s'agit d'une partie de $\mathbb{N}$ donc, il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $f(m) = A$. On a alors $m \in A \Leftrightarrow m \notin A$ ce qui est absurde.
Cette preuve se généralise plus généralement à n'importe quel ensemble E pour prouver que E et $\mathcal{P}(E)$ ne sont pas équipotent, i.e qu'il n'existe pas de bijection entre les deux. L'argument utilisé est souvent appelé paradoxe du barbier ou paradoxe de Russel

Exercice 98 (correction)

1. On note $(g_i)_{i\in I}$ des générateurs de G. Par hypothèse, I est au plus dénombrable. On a alors une application surjective

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{Z}^{(I)} & \longrightarrow & G \\ (k_i)_{i\in I} & \longmapsto & \prod_{i\in I} g_i^{k_i}. \end{array}$$

La question est donc de savoir si $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ est dénombrable. Pour cela on montre que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ l'est. En effet, si on note $p_0, p_1, \dots, p_n, \dots$ l'ensemble des nombres premiers on a une application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{N}^{(\mathbb{N})} & \longrightarrow & \mathbb{N}^* \\ (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} & \longmapsto & \prod_{n\in\mathbb{N}} p_n^{\alpha_n} \end{array}$$

L'application est bien définie car les familles (α_n) ont un nombre fini de valeur non-nulles et elle est injective par unicité de la décomposition en facteur premier des entiers (en fait il s'agit même d'une bijection mais ça ne nous intéresse pas trop). On en déduit que $\mathbb{N}^{(\mathbb{N})}$ est dénombrable et donc $\mathbb{Z}^{(\mathbb{N})}$ l'est aussi puisque $\mathbb{N}$ et $\mathbb{Z}$ sont en bijection.

2. Si G n'est plus supposé commutatif on a toujours un morphisme surjectif

$$\begin{array}{rl} \left(\mathbb{Z}^{(I)}\right)^{(\mathbb{N})} & \longrightarrow G \\ ((k_{ij})_{i\in I})_{j\in\mathbb{N}} & \longmapsto \prod_{j\in\mathbb{N}} \left(\prod_{i\in I} g_i^{k_{ij}}\right). \end{array}$$

mais puisque $\mathbb{Z}^{(I)}$ est dénombrable alors $\left(\mathbb{Z}^{(I)}\right)^{(\mathbb{N})}$ l'est aussi donc G est toujours dénombrable.

Exercice 99 (correction)

On remarque que $\mathbb{Q}(i) = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ est dense dans $\mathbb{C}$. On en déduit immédiatement que $M_n(\mathbb{Q}(i))$ est dense dans $M_n(\mathbb{C})$ pour la norme $||\cdot||_\infty$ donc pour la norme $||\cdot||$ car $M_n(\mathbb{C})$ étant de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes. Ceci nous permet de sélectionner une matrice $T_j \in B(x_j, r_j)$ dans chaque boule.

On pose alors l'application

$$\varphi : \begin{array}{rl} J & \longrightarrow M_n(\mathbb{Q}(i)) \\ j & \longmapsto T_j. \end{array}$$

Cette application est injective car les boules sont supposées deux à deux disjointes. On a donc une injection de J dans $M_n(\mathbb{Q}(i))$. Maintenant, $\mathbb{Q}(i) \simeq \mathbb{Q}^2$ donc $M_n(\mathbb{Q}(i)) \simeq (\mathbb{Q}^2)^{n^2}$ qui est un produit cartésien fini d'ensemble dénombrable donc est dénombrable. En conclusion, J s'injecte dans un ensemble dénombrable donc est lui même dénombrable.

Exercice 100 (correction)

Puisque E est infini il possède un sous-ensemble infini dénombrable D'. On pose alors $\widetilde{D} = D' \cup (D \setminus E)$. L'union de deux ensembles dénombrables étant dénombrable on a une bijection $\psi : \widetilde{D} \longrightarrow D'$. On définit alors

$$\varphi : \begin{array}{rl} E \cup D & \longrightarrow E \\ x \in \widetilde{D} & \longmapsto \psi(x) \\ x \notin \widetilde{D} & \longmapsto x \end{array}$$

Il s'agit bien d'une bijection car

φ injective : Soient $x, y \in E \cup D$ tels que $\varphi(x) = \varphi(y)$. Si x, y sont tous les deux dans $\widetilde{D}$ ou tous les deux à l'extérieur alors $x = y$ par injectivité de ψ ou de l'identité. Supposons donc que $x \in \widetilde{D}$ et $y \notin \widetilde{D}$ alors $\varphi(x) = \psi(x) = y$ ce qui ne se produit pas car ψ est à valeurs dans D' et $y \notin \widetilde{D}$ donc $y \notin D'$ puisque $D' \subseteq \widetilde{D}$.

φ surjective : Soit $y \in E$, si $y \in D'$ alors, par surjectivité de ψ il existe $x \in \widetilde{D}$ tel que $\varphi(x) = \psi(x) = y$. Sinon $y \notin D'$ et, bien sûr, $y \in E$ donc $y \notin D \setminus E$ donc $y \notin \widetilde{D}$. D'où $\varphi(y) = y$.

5. *Topologie des espaces vectoriels normés - corrections*

Exercice 101 (correction)

On a pour tout f continue sur $[0;1]$, $||f||_1 = \int_0^1 |f(t)|\,dt \leq ||f||_\infty$. Donc $||\cdot||_\infty$ plus fine que $||\cdot||_1$. On considère la fonction f_n affine par morceaux telle que $f_n(0) = 0$, $f_n(1/n) = n$, $f_n(2/n) = 0$ et $f_n(t) = 0$ pour $t \geq 2/n$. La fonction $f_n(t)$ est bien continue et l'aire sous sa courbe est $||f||_1 = 1$. Pourtant $||f||_\infty = n$. Donc $||\cdot||_1$ n'est pas plus fine que $||\cdot||_\infty$.

Exercice 102 (correction)

On a $N^2 = 0$ donc, puisque N et I commutent on a

$$\exp(A) = \exp(4I + N) = \exp(4I)\exp(N) = \begin{pmatrix} e^4 & 0 \\ 0 & e^4 \end{pmatrix}(I + N) = e^4(I + N) = e^4\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 103 (correction)

Par définition $f^2 = \mathrm{id}_E$ donc

$$\exp(f) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} f^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!} f^{2n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} f^{2n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n)!}\,\mathrm{id}_E + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)!} f = \mathrm{ch}(1)\,\mathrm{id}_E + \mathrm{sh}(1) f.$$

Exercice 104 (correction)

Soit F un fermé contenant A et $x \in \overline{A}$. Puisque x est situé sur l'adhérence, $\forall n \in \mathbb{N}^*, A \cap B_f\left(x, \frac{1}{n}\right) \subseteq B_f\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap F \neq \emptyset$. Soit $x_n \in A \cap B_f\left(x, \frac{1}{n}\right)$. On a bien entendu $x_n \longrightarrow x$. Mais x_n est une suite de F donc, par caractérisation séquentielle des fermés la limite est dans F donc $x \in F$, i.e. $\overline{A} \subseteq F$.

Exercice 105 (correction)

$\boxed{\Rightarrow}$ Procédons par la contraposée en supposant que A est infini. On veut alors montrer que A n'est pas compact. Puisque A est infini il existe une application injective

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &\longrightarrow A \\ n &\longmapsto x_n \end{aligned}$$

Soit $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite de (x_n) et supposons qu'elle est une limite $x \in A$. L'application $n \mapsto x_{\varphi(n)}$ est toujours injective comme composition d'applications injectives. Puisque $x \in A, \exists r > 0, B = B_f(x, A) \cap A = \{x\}$. Mais, par définition de la limite $\exists N \in \mathbb{N}, \forall n \geq N, \left|\left|x_{\varphi(n)} - x\right|\right| \leq r$, i.e. $x_{\varphi(n)} \in B$ donc $\forall n, m \geq N, x_{\varphi(n)} = x = x_{\varphi(m)}$ ce qui contredit l'injectivité. Donc $(x_n) \in A^{\mathbb{N}}$ est une suite ne possédant pas de valeur d'adhérence donc A n'est pas compact.

$\boxed{\Leftarrow}$ Supposons A fini alors A bornée par $\max\{||x||, x \in A\}$ et fermée car union finie de fermés. Puisque $\mathbb{R}^2$ de dimension finie A est compacte.

Exercice 106 (correction)

On rappelle que $H = \ker \varphi$ avec $\varphi : E \to \mathbb{K}$ une forme linéaire non nulle. On suppose que $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et on va montrer que $E \setminus H$ est l'union de deux composantes connexes par arcs. On pose $E^+ = \{x \in E \mid \varphi(x) > 0\}$ et $E^- = \{x \in E \mid \varphi(x) < 0\}$ de telle sorte que $E = E^+ \cup E^-$. Étant donnés $x, y \in E^+$ et $t \in [0, 1]$ on a, par linéarité de φ

$$\varphi(tx + (1-t)y) = t\varphi(x) + (1-t)\varphi(y) > 0$$

ce qui signifie que le segment $[x, y] \subset E$ reste dans E^+, i.e. que E^+ est convexe. De même E^- est convexe. Ainsi, $E \setminus H$ est l'union disjointe de deux convexes donc possède deux composantes connexes par arcs.

On traite maintenant le cas $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. On considère D, de dimension 1, supplémentaire à H et $\pi : E \to D$ la projection sur D parallèlement à H. Soit $x, y \in E \setminus H$, on remarque que les segments $[x, \pi(x)]$ et $[y, \pi(y)]$ sont contenus dans $E \setminus H$ car, en écrivant $x = h + d$ avec $h \in H$ et $d \in D \setminus \{0\}$ on a $tx + (1-t)\pi(x) = th + d \notin H$. Par ailleurs $D \setminus \{0\} \simeq \mathbb{C} \setminus \{0\}$ et $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ est connexe par arcs comme image d'un connexe par arcs par une application continue. En effet, $\exp : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ est continue et surjective et $\mathbb{C}$ est connexe par arcs car convexe. Ainsi, on peut relier $\pi(x)$ à $\pi(y)$ en restant dans $D \setminus \{0\}$ donc dans $E \setminus H$ donc on peut relier continument x à y en restant dans $E \setminus H$ donc ce dernier est connexe par arc.

Exercice 107 (correction)

Pour tout $n, m \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}, nf\left(\frac{m}{n}x\right) = n\left(f\left(\frac{1}{n}x + \cdots + \frac{1}{n}x\right)\right) = nmf\left(\frac{1}{n}x\right) = mf(x)$ donc $\forall q \in \mathbb{Q}, fqx = qf(x)$. L'application

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ \lambda & \longmapsto & f(\lambda x) - \lambda f(x) \end{array}$$

est continue et nulle sur $\mathbb{Q}$ qui est dense dans $\mathbb{R}$ donc elle est nulle sur $\mathbb{R}$ donc f est $\mathbb{R}$-linéaire. Si on supprime l'hypothèse de continuité le résultat est faux. En effet, il suffit de considérer une $\mathbb{Q}$-base (e_i) de $\mathbb{R}$ et f une application $\mathbb{Q}$-linéaire définie par $f(e_1) = 1$ et $f(e_k) = 0$ pour tout $k \geq 2$.

Exercice 108 (correction)

Soit $y \in A^\times$ et $x \in A$ tel que $||x|| < \frac{1}{||y^{-1}||}$. On a $x + y = y^{-1}(y^{-1}x + 1)$ de plus $\left|\left|y^{-1}x\right|\right| \leq \left|\left|y^{-1}\right|\right| ||x|| < 1$ donc $1 + y^{-1}x$ inversible d'inverse

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-y^{-1}x)^n.$$

Donc $x + y$ inversible comme produit d'inversibles.

Exercice 109 (correction)

1. L'ensemble $F = \mathbb{R}[X]$ identifié avec les fonctions polynomiales vérifie bien cette propriété. En effet, $||P|| = 0$ implique $P(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 1]$ donc P a une infinité de racines donc est nul. Les deux autres axiomes sont évidents.
2. Il s'agit évidemment d'une application linéaire. Par ailleurs, $\varphi(f) = 0 \Rightarrow ||f|| = 0 \Rightarrow f = 0$ par le premier axiome de la norme donc φ injective.
3. On pose $F \subseteq E$ l'ensemble des fonctions constantes sur $]-\infty, 0[$ et sur $]1, +\infty[$. On a alors un inverse de φ donné par $\psi(g) = \widetilde{g}$ avec $\widetilde{g}(x) = g(0)$ pour $x < 0$ qui assure la continuité en 0 et $\widetilde{g}(x) = g(1)$ pour $x > 1$.

Exercice 110 (correction)

1. Il s'agit de la composée d'applications continues donc elle est continue. L'inverse étant continue par l'inégalité $\left\|x^{-1}-y^{-1}\right\| \leq \frac{||y-x||}{||xy||}$ et, par continuité de la norme, pour y assez proche de x il existe $\gamma > 0$ tel que $||xy|| \geq \gamma$.
2. On a $\left\|\frac{1}{x-\lambda 1_A}\right\| \leq \frac{1}{|\lambda|\cdot\left\|\frac{1}{\lambda}x-1_A\right\|} \underset{|\lambda|\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. On pose $\varepsilon = \frac{1}{2}\left\|\frac{1}{x}\right\|$. Par définition de la limite il existe $M > 0$ tel que pour $|\lambda| > M$, $||f(\lambda)|| \leq \varepsilon$. On en déduit que

$$||f(\mathbb{C})|| = ||f(B(0,M))|| \cup \underbrace{||f(\mathbb{C}\setminus B(0,M)||]}_{\subseteq[0;||f(0)||} = ||f(B(0,M))||$$

Puisque f et $||\cdot||$ sont continues $||f(\mathbb{C})||$ est compact comme image continue d'un compact.

Exercice 111 (correction)

1. Soit $j \in I$ quelconque. On a $\bigcap_{i\in I} K_i \subseteq K_j$. Une intersection quelconque de fermés est un fermé et les compacts sont des parties fermées. Donc $\bigcap_{i\in I} K_i$ est une partie fermée de K_j compact donc c'est un compact.
2. Soit (y_n) une suite définie par $y_n \in K_n$. Soit n_0 un entier quelconque. Alors $(y_{n+n_0})_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de K_{n_0} donc admet une valeur d'adhérence x dans K_{n_0}. Puisque les valeurs d'adhérence ne dépendent pas des premiers termes x est une valeur d'adhérence de K_n pour tout n, i.e. $x \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ qui est donc non vide. Soit $y \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$, par hypothèse, pour tout $N \in \mathbb{N}$

$$\{y\} \subseteq \bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n \subseteq K_N \subseteq B(x_N, r_N)$$

donc $\forall N, \left\|x_N - y\right\| \leq r_N$ donc $y = \lim x_n$. Par unicité de la limite $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_n$ est réduit à un point.

Exercice 112 (correction)

1. On note S la sphère unité de $\mathbb{R}^{n+1}$ pour la norme $||\cdot||_1$. C'est un compact car en dimension finie les sphères unités sont compactes. On peut alors reconnaître H comme $H = S\cap(\mathbb{R}^+)^{n+1}$. Puisque $(\mathbb{R}^+)^{n+1}$ est un fermé (par exemple car intersection des préimages de $[0;+\infty[$ par des projections canonique $\pi_j : (x_i) \mapsto x_j$ continues car linéaires en dimension finie) alors $S \cap (\mathbb{R}^+)^{n+1}$ est un fermé comme intersection de fermés dans un compact S donc est compact.
2. On pose

$$\Phi : \begin{array}{rl} \mathbb{R}^{n+1}\times E^{n+1} & \longrightarrow E \\ ((\lambda_i),(x_i)) & \longmapsto \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_{n+1}x_{n+1}. \end{array}$$

C'est une application continue car multilinéaire en dimension finie. Et $\Phi(H \times K^{n+1}) = \mathrm{Conv}(K)$ par définition de $\mathrm{Conv}(K)$. Enfin, $H \times K^{n+1}$ est compact comme produit de compacts donc $\mathrm{Conv}(K)$ est compact comme image d'un compact par une application continue.

Exercice 113 (correction)

1. Soit $f \in E$, on a $|\Phi(f)| = |f(1)| \leq ||f||_\infty$ donc Φ est continue et $|||\Phi||| \leq 1$. Par ailleurs pour $f = 1$ on a $|\Phi(f)| = 1 = ||f||_\infty$ donc $|||f||| = 1$.
2. On considère $f_n \in E$ définie par $f_n(x) = x^n$. Alors $\left|\Phi(f_n)\right| = 1$ pourtant $\left\|f_n\right\|_1 = \dfrac{1}{n+1}$ donc il n'existe pas de $C > 0$ tel que $|\Phi(f)| \leq C\,||f||_1$ pour tout $f \in E$.

Exercice 114 (correction)

1. On a $||\Phi(X^n)||_\infty = n$ tandis que $||X^n||_\infty = 1$ donc il ne peut exister de $C > 0$ tel que pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, $||\Phi(P)||_\infty \leq C\,||P||_\infty$ donc Φ n'est pas continue. Même chose pour $||\cdot||_1$ car elle est plus fine que $||\cdot||_\infty$.
2. Le fait qu'elle est bien définie provient du fait que la somme est finie car $P^{\deg(P)+1} = 0$ pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$. L'inégalité triangulaire provient de la linéarité de la dérivation, de l'inégalité triangulaire sur $\mathbb{R}$ et de l'associativité de la somme. L'homogénéité est vérifiée pour des raisons similaires. Le fait que $||P|| = 0$ implique que $\forall k \in \mathbb{N}$, $X^k \mid P$ donc $P = 0$. Enfin,
$$||\Phi(P)|| = \sum_{k=1}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| \leq \sum_{k=0}^{+\infty} \left|P^{(k)}(0)\right| = ||P||$$
donc Φ est continue et $|||\Phi||| \leq 1$. On remarque que $||\Phi(X)|| = 1 = ||X||$ donc $|||\Phi||| = 1$.

Exercice 115 (correction)

1. **Pour $||\cdot||_\infty$:** On a
$$\left|T_\Phi(f)\right| = \left|\int_0^1 \Phi(t)f(t)\,\mathrm{dt}\right| \leq \int_0^1 |\Phi(t)|\,|f(t)|\,\mathrm{dt} \leq \int_0^1 |\Phi(t)|\,\mathrm{dt}\,||f||_\infty$$
donc T_Φ est continue de norme subordonnée $\left|\left|\left|T_\Phi\right|\right|\right| \leq ||\Phi||_1$.
Pour $||\cdot||_1$: On a
$$\left|T_\Phi(f)\right| = \left|\int_0^1 \Phi(t)f(t)\,\mathrm{dt}\right| \leq \int_0^1 |\Phi(t)|\,|f(t)|\,\mathrm{dt} \leq ||\Phi||_\infty \int_0^1 |f(t)|\,\mathrm{dt}$$
donc T_Φ est continue de norme subordonnée $\left|\left|\left|T_\Phi\right|\right|\right| \leq ||\Phi||_\infty$.
Pour $||\cdot||_2$: D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a
$$\left|T_\Phi(f)\right| = \left|\int_0^1 \Phi(t)f(t)\,\mathrm{dt}\right| \leq ||\Phi||_2\,||f||_2$$
donc T_Φ est continue de norme subordonnée $\left|\left|\left|T_\Phi\right|\right|\right| \leq ||\Phi||_2$.
2. D'après la question précédente on a $\left|\left|\left|T_\Phi\right|\right|\right| \leq ||\Phi||_\infty$ dans ce cas là. On va montrer qu'il s'agit d'une égalité. Pour cela on remarque que, puisque Φ est continue sur un segment, elle atteint ses bornes. En particulier il existe x_0 tel que $\left|\Phi(x_0)\right| = ||\Phi||_\infty$. On pose alors une suite de fonctions $(f_n)_{n\geq 1} \in E^{\mathbb{N}^*}$ telles que pour tout n, f_n nulle en dehors de $\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0 + \frac{1}{n}\right]$, $f_n(x_0) = 1$ et f_n affine sur $\left[x_0 - \frac{1}{n}, x_0\right]$ et sur $\left[x_0, x_0 + \frac{1}{n}\right]$ de telle sorte à ce qu'elle soit continue. Par continuité de Φ en x_0,
$$\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \forall t \in \left[x_0 - \delta, x_0 + \delta\right], \Phi(x_0) - \varepsilon \leq \Phi(t) \leq \Phi(x_0) + \varepsilon.$$
En multipliant, pour n tel que $\frac{1}{n} < \delta$, par $f_n(t) \geq 0$ l'inégalité ci-dessus puis en intégrant on obtient
$$(\Phi(x_0) - \varepsilon)\left|\left|f_n\right|\right|_1 \leq T_\Phi(f_n) \leq (\Phi(x_0) + \varepsilon)\left|\left|f_n\right|\right|_1 \text{ donc } \left|\frac{T_\Phi(f_n)}{\left|\left|f_n\right|\right|_1} - \Phi(x_0)\right| \leq \varepsilon.$$
Ainsi $\left(\frac{|T_\Phi(f_n)|}{||f_n||_1}\right)$ converge vers $\left|\Phi(x_0)\right| = ||\Phi||_\infty$ ce qui prouve que $|||T||| \geq ||\Phi||_\infty$ qui est précisémment l'inégalité que l'on recherchait.

Exercice 116 (correction)

Supposons que H n'est pas fermé. Alors il existe $(x_n) \in H^{\mathbb{N}}$ telle que $x_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} x \in E \setminus H$. Puisque H est un hyperplan et $x \notin H$ on a $H \oplus \mathrm{Vect}(x) = E$. Soit $y \in E$ alors on peut l'écrire $y = h + \lambda x$ pour un certain $h \in H, \lambda \in \mathbb{R}$. On a alors $y_n = h + \lambda x_n \in H^{\mathbb{N}}$ qui converge vers y. Donc H est dense dans E.

Exercice 117 (correction)

Par définition

$$|||f|||^2 = \sup_{E\setminus\{0\}} \frac{||f(x)||^2}{||x||^2} = \sup_{E\setminus\{0\}} \frac{\langle f(x), f(x)\rangle}{\langle x, x\rangle} = \sup_{E\setminus\{0\}} \frac{\langle f^* f(x), x\rangle}{\langle x, x\rangle}.$$

Par ailleurs, l'endomorphisme $f^* f$ est auto-adjoint donc diagonalisable dans une base orthonormée $(e_1, \dots, e_n)$ d'après le théorème spectral. En écrivant $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$ on a donc

$$\langle f^* f(x), x\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i, x_i \right\rangle = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i^2 \leq \max\left\{\lambda \in \mathrm{Spec}(f^* f)\right\} \sum_{i=1}^n x_i^2 = \max\left\{\lambda \in \mathrm{Spec}(f^* f)\right\} ||x||^2$$

Ceci prouve que $|||f|||^2 \leq \max\{\lambda \in \mathrm{Spec}(f^* f)\} = \lambda_j$. Par ailleurs, en considérant $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que e_j est un vecteur propre de la base qui est associé à la valeur propre maximale λ_j on a $\left\langle f^* f(e_j), e_j\right\rangle = \lambda_j = \lambda_j \times \left|\left|e_j\right|\right|^2$ ce qui prouve que $|||f|||^2 \geq \lambda_j$.

Exercice 118 (correction)

L'application $\boldsymbol{C} \mapsto \boldsymbol{C}^2$ définie sur les matrices est continue car chaque coefficient de $\boldsymbol{C}^2$ est un expression continue des coefficients de $\boldsymbol{C}$. Donc $A^{2n} = (A^2)^n$ converge vers $\boldsymbol{B}^2 = \boldsymbol{B}$ donc $X(X-1)$ est un polynôme annulateur scindé simple de $\boldsymbol{B}$ donc $\boldsymbol{B}$ diagonalisable et ses valeurs propres sont dans $\{0, 1\}$.

Exercice 119 (correction)

Soit A une matrice diagonalisable, i.e. $\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ tel que $P^{-1}AP = D$ diagonale. Donc

$$\gamma : \begin{array}{rcl} [0;1] & \longrightarrow & M_n(\mathbb{K}) \\ t & \longmapsto & tA \end{array}$$

est continue, à valeurs dans l'ensemble des matrices diagonalisables car $\forall t, P^{-1}tAP = tD$ diagonale et $\gamma(0) = 0$ qui est diagonale. Donc l'ensemble est étoilé donc connexe par arc.

Il n'est pas convexe. En effet, soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ diagonalisable car diagonale et $\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ diagonalisable car possède des valeurs propres distinctes. Alors $\frac{1}{2}A + \frac{1}{2}\boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ pas diagonalisable car son polynôme minimal est $(X-1)^2$ qui n'est pas scindé.

Exercice 120 (correction)

1. Il est immédiat que $||\cdot||_\infty$ est une norme. Concernant $||\cdot||$, l'homogénéité et l'inégalité triangulaire sont immédiates. Si $||u|| = 0$ alors $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k\leq n} u_k = 0$ donc, par récurrence, pour tout n, $u_n = 0$ donc la séparation est aussi vérifiée.
2. On a pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\left|u_n\right| = \left|\sum_{k=0}^n u_k - \sum_{k=0}^{n-1} u_k\right| \leq \left|\sum_{k=0}^n u_k\right| + \left|\sum_{k=0}^{n-1} u_k\right|$$

d'où $||u||_\infty \leq 2\,||u||$ donc $||\cdot||$ plus fine que $||\cdot||_\infty$. En revanche, si on considère $u^n \in E$, la suite définie par $u^n_k = 1$ pour $k \leq n$ et $u^n_k = 0$ pour $k > j$ on a $||u^n||_\infty = 1$ et $||u^n|| = n$ donc $||\cdot||_\infty$ ne peut pas être plus fine que $||\cdot||$. Elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 121 (correction)

On va montrer que la préimage par f^{-1} de fermés de X est un fermé de Y. Soit $F \subseteq X$ un fermé. Puisque F est un fermé dans un compact alors F est un compact. On a alors $(f^{-1})^{-1}(F) = f(F)$ qui est un compact car f continue et F compact donc f^{-1} est continue.

Exercice 122 (correction)

1. il est immédiat qu'elle est bien définie, continue et bijective et d'inverse continue (la restriction d'applications continues est toujours continue).
2. Par l'absurde on considère $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ un homéomorphisme. Alors $f: \mathbb{R}^2 \setminus (0,0) \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{a\}$ avec $a = f(0,0)$ est toujours un homéomorphisme d'après la question précédente. Par ailleurs pour tout $u, v \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ si u, v ne sont pas colinéaires alors $\{\lambda u + \mu v, \lambda, \mu \in \mathbb{R}, \lambda + \mu = 1\}$ ne rencontre pas l'origine donc est un chemin continu reliant u et v. Sinon, soit w la rotation d'angle $\frac{\pi}{4}$ de u alors u reliée à w par l'arc de cercle l'angle $\frac{\pi}{4}$ qui est un chemin continu et w et v ne sont pas colinéaire donc peuvent être reliés par un chemin d'après ce qu'on vient de voir. Donc $\mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$ est connexe par arcs et donc son image par f continue l'est aussi. Ce qui est absurde car, par surjectivité de f son image est $\mathbb{R} \setminus \{a\}$ qui n'est pas connexe par arcs.
3. On fait la même chose que pour la question précédente avec $f: [0;1] \longrightarrow S^1$ donc $[0;1] \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$ doit être connexe par arcs puisque $S^1 \setminus \left\{f(\frac{1}{2})\right\}$ l'est. Absurde.

Exercice 123 (correction)

1. Le fait qu'il s'agit bien de normes est assez évident.
2. On va montrer qu'aucune norme n'est plus fine que l'autre. Si on considère $P_n(X) = X^n + X^{n-1} + \cdots + 1$ alors on a $x \mapsto P_n(x)$ qui converge uniformément vers $f: x \mapsto \frac{1}{1-x}$ sur $\left[0, \frac{1}{2}\right]$ donc $\left|\left|P_n\right|\right|_\infty \to ||f||_\infty = 2$ (si vous n'avez pas vu la convergence uniforme il suffit de prouver que $\left|\left|P_n\right|\right|_\infty \leq \frac{1}{2^n} + \cdots + 1 \leq 2$). Pourtant $||P|| \to +\infty$. Donc il n'existe pas de $K > 0$ tel que $||P|| \leq K\,||P||_\infty$ pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$.
   Si on considère désormais $Q_n(X) = \frac{1}{n}X^n + \cdots + X - \ln(n)$. On a
   $$||Q_n|| = \left|\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} - \ln(n)\right| + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}.$$
   Les deux termes de la somme convergent donc $\left|\left|Q_n\right|\right|$ converge. Pourtant $\left|\left|Q_n\right|\right|_\infty \geq \left|Q_n(0)\right| = \ln(n) \to +\infty$.
   Donc aucune norme n'est plus fine que l'autre.

Exercice 124 (correction)

1. Si f est continue en 0 alors $\forall \varepsilon > 0$, disons $\varepsilon = 1$, $\exists \delta > 0$, $||x||_E \leq \delta \Rightarrow ||f(x) - f(0)||_F = ||f(x)||_F \leq 1$. Considérons $x \in E$ quelconque non nul. Alors $\dfrac{\delta}{||x||_E} x$ est de norme δ. Donc $\left|\left| f\left(\dfrac{\delta}{||x||_E} x\right)\right|\right|_F \leq 1$, i.e. $||f(x)||_F \leq \dfrac{1}{\delta}\,||x||_E$.
2. Supposons que f est continue en 0. Soit $x \in E$ et $y \in E$ tel que $||x - y||_E \leq \delta$ (pour le même δ) que dans la question précédente. Alors $||f(x-y)||_F = ||f(x) - f(y)||_F \leq \varepsilon$. Donc f est continue en x. La réciproque est immédiate.

3. Le fait qu'il s'agisse d'une norme est facilement vérifiable. Soit $g \in \mathcal{L}_c(E)$ on a alors $|||f \circ g||| = \sup_{x \in E \setminus \ker(g)} \frac{||f(g(x))||_E}{||x||_E}$ car lorsque $x \in \ker(g)$, $f(g(x)) = 0$. Donc

$$|||f \circ g||| = \sup_{x \in E \setminus \ker(g)} \frac{||f(g(x))||_E}{||x||_E} = \sup_{x \in E \setminus \ker(g)} \frac{||f(g(x))||_E}{||g(x)||_E} \underbrace{\frac{||g(x)||_E}{||x||_E}}_{\leq |||g|||} \leq |||f|||\,|||g|||\,.$$

4. Je propose deux méthodes.
Méthode 1 : On considère $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et

$$||x||_1 = \left\| \sum_{k=1}^{n} \lambda_i e_i \right\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |\lambda_i|\,.$$

On a alors

$$||f(x)||_F \leq \sum_{k=1}^{n} |\lambda_i| \, ||f(e_i)||_F \leq \left(\max_i ||f(e_i)||_F \right) \sum_{k=1}^{n} |\lambda_i| = C\,||x||_1\,.$$

Donc f est continue pour la norme $||\cdot||_1$ de E qui est équivalente à toutes les autres normes car on est en dimension finie.
Méthode 2 : On considère $||\cdot||$ n'importe quelle norme sur E. On définit alors $||x||_f \coloneqq ||x|| + ||f(x)||_F$ et on vérifie facilement que, par linéarité de f, il s'agit d'une norme de E. Puisque toutes les normes sont équivalentes $||\cdot||$ est plus fine que $||\cdot||_f$, i.e. $\exists K > 0$ telle que $\forall x \in E, ||x||_f \leq K\,||x||$, i.e.

$$||f(x)||_F \leq (K-1)\,||x||$$

donc f est continue.

Exercice 125 (correction)

1. Le morphisme $\mathbb{C}[X] \longrightarrow \mathbb{C}[A]$ d'évaluation en A est surjectif donc $\mathbb{C}[A]$ est un espace vectoriel comme image d'une application linéaire. Son noyau est $\langle \mu_A \rangle$ avec μ_A le polynôme minimal de A. Par ailleurs, pour $P(A) \in \mathbb{C}[A]$ on pose la division euclidienne de P par μ_A donc il existe $Q, R \in \mathbb{C}[X], \deg R < d$ tel que $P = Q\mu_A + R$. En évaluant en A on a $P(A) = R(A) \in \mathrm{Vect}(1, A, A^2, \dots, A^{d-1})$. Enfin, la famille $(1, A, A^2, \dots, A^{d-1})$ est libre par définition du polynôme minimal.

2. La suite $(\sum_{n=0}^{N} \frac{1}{n!} P(A)^n)_{N \in \mathbb{N}}$ est une suite convergente d'éléments de $\mathbb{C}[A]$. Puisque $\mathbb{C}[A]$ est un sous-espace vectoriel de $M_n(\mathbb{K})$, il est fermé dans $M_n(\mathbb{K})$ donc la limite est dans $M_n(\mathbb{K})$.
D'autre part, pour tout $P, Q \in \mathbb{C}[X]$, $P(A)$ et $Q(A)$ commutent donc $e^{P(A)+Q(A)} = e^{P(A)}e^{Q(A)}$. En particulier, pour $Q = -P$ on a $e^{P(A)}e^{-P(A)} = e^0 = I_n$ donc l'image de $P(A)$ par l'exponentielle est bien inversible.

Exercice 126 (correction)

1. Puisque f est continue, F est de classe C^1, on peut donc la dériver. L'équation fonctionnelle est immédiate lorsqu'on dérive $F = uv$.

2. (a) On a

$$\int_0^X F^2(x)dx = \int_0^X F(x) \cdot F(x)dx = \int_0^X (f(x) - xF'(x))F(x)dx.$$

(b) Puisque f est positive alors F l'est aussi et, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\int_0^X f(x)F(x)dx = \int_0^X |f(x)F(x)|\,dx \leq \sqrt{\int_0^X f(x)^2 dx} \sqrt{\int_0^X F(x)^2 dx}.$$

(c) On fait une intégration par partie en dérivant x et en primitivant $x \mapsto F'(x)F(x)$ dont une primitive est $\frac{1}{2}F^2$. On obtient

$$\int_0^X xF'(x)F(x)dx = \underbrace{\left[\frac{x}{2}F^2(x)\right]_0^X}_{=\frac{X}{2}F^2(X)\geq 0} - \frac{1}{2}\int_0^X F^2(x)dx.$$

(d) On en déduit que $\frac{1}{2}\int_0^X F^2(x)dx \leq \sqrt{\int_0^X f(x)^2dx}\sqrt{\int_0^X F(x)^2dx}$ d'où $\sqrt{\int_0^X F(x)^2dx} \leq 2\sqrt{\int_0^X f(x)^2dx}$. Donc F^2 intégrable et on a bien l'inégalité de Hardy.

3. Pour f quelconque on applique l'inégalité de Hardy qu'on vient de démontrer à $|f|$ qui est positive. On a le cas général.

Exercice 127 (correction)

1. L'application N_g est évidemment homogène et sous-additive. Le seul problème qu'on peut rencontrer est avec l'axiome de séparation. On remarque que $||fg||_\infty = 0$ si et seulement si pour tout $x \in [0;1]$, $f(x)g(x) = 0$ donc $f(x) = 0$ ou $g(x) = 0$. On va montrer que N est une norme si et seulement si g ne s'annule jamais identiquement sur un intervalle non trivial.

   $\boxed{\Leftarrow}$ Supposons que g ne soit pas identiquement nulle sur un intervalle de $[0;1]$. Autrement dit, $\forall 0 \leq a < b \leq 1, \exists x_0 \in [a;b]/g(x) \neq 0$. Soit $x \in [0;1]$, si $f(x) = 0$ on est content·e. Sinon, par hypothèse pour tout $n \in \mathbb{N}, \exists x_n \in]x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}[/g(x_n) \neq 0$ donc $f(x_n) = 0$. Donc par continuité de f et puisque $x_n \to x$ on a bien $f(x) = 0$.

   $\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que g soit identiquement nulle sur un intervalle non trivial $[a,b]$. On pose alors f, affine par morceaux continue qui vaut 1 en $\frac{a+b}{2}$ nulle en dehors de $[a,b]$. On a bien $N_g(f) = 0$ pourtant $f \neq 0$. Donc N_g n'est pas une norme.

2. On a toujours $||gf||_\infty = \sup\{|f(x)g(x), x \in [0;1]|\} \leq ||g||_\infty ||f||_\infty$ donc $||\cdot||_\infty$ est toujours plus fine que N_g inconditionnellement. On va montrer que $||\cdot||_\infty$ et N_g sont équivalentes si et seulement si g ne s'annule pas.
   On commence par le sens le plus simple. Si g ne s'annule pas alors $|g|$ atteint son minimum disons $g(x_0) = m > 0$. On a alors

   $$||gf||_\infty \geq m\,||f||_\infty$$

   donc les normes sont équivalentes.
   Supposons maintenant que g s'annule en un point x_0. On pose f_n continue affine par morceaux telle que $f(x_0) = 1$ et nulle pour tout x en dehors de $[x_0 - \frac{1}{n}; x_0 + \frac{1}{n}]$. On a alors

   $$\left|\left|f_n g\right|\right|_\infty = \sup_{x\in[x_0-\frac{1}{n};x_0+\frac{1}{n}]} |f(x)g(x)|$$

   mais, par continuité de g, $\sup_{x\in[x_0-\frac{1}{n};x_0+\frac{1}{n}]} |g(x)| \to 0$ donc $\left|\left|f_n g\right|\right|_\infty \leq \sup_{x\in[x_0-\frac{1}{n};x_0+\frac{1}{n}]} |g(x)| \to 0$ pourtant $\left|\left|f_n\right|\right|_\infty = 1$ donc les normes ne sont pas équivalentes.

Exercice 128 (correction)

1. On considère l'application

   $$\begin{array}{rccl} u: & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & \int_{-1}^1 P(t)dt \end{array}$$

   est linéaire entre deux espaces de dimension finie donc continue. Donc $A = u^{-1}(\{1\})$ est fermée dans $\mathbb{R}_n[X]$. Par ailleurs, $\mathbb{R}_n[X]$ fermé dans E car de dimension finie donc A fermée dans E.
   D'autre part l'application

   $$\begin{array}{rccl} v_t: & \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ & P & \longmapsto & \left|P'(t)\right| \end{array}$$

est continue car composée de $P \mapsto P', Q \mapsto Q(t)$ qui sont linéaires en dimension finie et $x \mapsto |x|$ continue car application norme. Donc $B = u^{-1}(1) \bigcap_{t\in[-1;1]} v_t^{-1}([0;1])$ est fermée dans $\mathbb{R}_n[X]$ comme intersection de fermés donc fermée dans E.

2. La suite $(P_n(t)) = (nt+1) \in A^{\mathbb{N}}$ n'est pas bornée donc A n'est pas bornée donc pas compacte. En revanche, on va montrer que B est compacte. Soit $P \in B$. On peut appliquer l'inégalité des accroissements finis sur le segment $[-1,t]$ ce qui donne $c \in [-1;t]$ tel que
$$P(t) - P(-1) = P'(c)(t+1) \tag{5}$$
donc on a l'inégalité
$$P(-1) - 2 \leq -\left|P'(c)\right|(t+1) + P(-1) \leq P(t) \leq P(-1) + \left|P'(c)\right|(t+1) \leq P(-1) + 2$$
En intégrant ces inégalités on a
$$|P(-1)| \leq \frac{3}{2}.$$
En revenant à l'égalité (5) on a $|P(t)| \leq \frac{3}{2} + 2$ donc $||P||_\infty \leq 4$. Donc B fermée et bornée dans $\mathbb{R}_n[X]$ de dimension finie donc compacte dans $\mathbb{R}_n[X]$ donc dans E.

3. Lorsqu'on remplace $\mathbb{R}_n[X]$ par $\mathbb{R}[X]$ tout devient faux. On pourrait se contenter de donner des exemples de suites de A (resp. B) dont les limites ne sont pas dans A (resp. B) mais il est intéressant de reprendre le raisonnement déjà fait pour comprendre quels arguments ne fonctionnent plus.

   Par exemple l'application $P \mapsto \int_{-1}^{1} P(t)dt$ reste continue sur $\mathbb{R}[X]$ mais on ne peut plus utiliser la dimension finie pour le justifier. En revanche, $\left|\int_{-1}^{1} P(t)dt\right| \leq 2\,||P||_\infty$ donc l'application linéaire est lipschitzienne en 0 donc continue. Donc A est une partie fermée de $\mathbb{R}[X]$ mais $\mathbb{R}[X]$ **n'est plus fermé dans** E car toute fonction continue est limite uniforme de fonction polynomiale donc $C^0([-1;1],\mathbb{R}) \subseteq \overline{\mathbb{R}[X]}$. En l'occurrence, $t \mapsto \sin(t) + 1$ est limite uniforme de polynôme (P_n) donc $\lim \int_{-1}^{1} P_n(t)dt = \int_{-1}^{1} \sin(t) + 1dt = 1$ donc $Q_n = P_n + \frac{1}{2}\left(1 - \int_{-1}^{1} P_n(t)dt\right)$ converge aussi uniformément vers $\sin + 1$ et $(Q_n) \in A^{\mathbb{N}}$ donc A n'est pas fermé dans E.

   Pour B c'est encore pire, l'application $P \mapsto P'$ est certes linéaire mais elle n'est plus continue. En effet, la suite $(||x^n||_\infty = 1)$ est bornée alors que $\left|\left|nx^{n-1}\right|\right|_\infty = n$ ne l'est pas. Comme contre exemple on peut prendre $f(t) = \frac{1}{e}e^t + c$ où c est une constante telle que $\int_{-1}^{1} f(t)dt = 1$. La suite $P_n(t) = \frac{1}{e}\left(1 + t + \frac{t^2}{2!} + \cdots \frac{t^n}{n!}\right) + c_n$ avec c_n telle que $\int_{-1}^{1} P_n(t)dt = 1$ converge bien uniformément vers f et est à valeurs dans $B^{\mathbb{N}}$.

Exercice 129 (correction)

1. On a bien pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, $||\lambda x||_\ell = |\lambda|\,||x|| + |\lambda|\,|\ell(x)|$ par linéarité de ℓ donc $||\lambda x||_\ell = |\lambda|\,||x||_\ell$. De même $||x||_\ell = 0 \Rightarrow ||x|| = 0 \Rightarrow x = 0$ et l'inégalité triangulaire est vraie car elle l'est pour $||\cdot||$, pour $|\cdot|$ et que ℓ est linéaire.

2. Soit $\ell \in E^*$. Puisque toutes les normes sont équivalentes $||\cdot||$ est plus fine que $||\cdot||_\ell$, i.e. $\exists K > 0, \forall x \in E, ||x||_\ell = ||x|| + |\ell(x)| \leq K\,||x||$ donc
$$|\ell(x)| \leq (K-1)\,||x||$$
donc ℓ est continue.

3. Il suffit de montrer qu'un espace vectoriel normé $(E, ||\cdot||)$ de dimension infinie possède toujours des applications linéaire non continues. Par définition, puisque E est de dimension infinie il existe une famille libre $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Quitte à diviser chaque vecteur par sa norme (ce qui ne change rien à la liberté de la famille) on peut supposer que tous les e_n sont de norme 1. On complète cette famille en une base et on note F le complémentaire de $\mathrm{Vect}\left((e_n)_{n\in\mathbb{N}}\right)$. On définie alors $\ell \in E^*$ par $\ell(e_n) = n = n\left|\left|e_n\right|\right|$ et par $\ell_{|F} = 0_{F^*}$. Par construction il ne peut exister de $K > 0$ tel que $\forall x \in E, |\ell(x)| \leq K\,||x||$, i.e. ℓ n'est pas continue.

Exercice 130 (correction)

1. Il suffit de l'écrire, aucune difficulté.
2. Intuitivement si (s_n) ne remplit pas tout $[0;1]$ une fonction f peut faire n'importe quoi sur les zones délaissées sans que ça affecte sa norme. On va donc montrer que le fait que (s_n) soit dense dans $[0;1]$ est une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'axiome de séparation qui nous manque.

   Supposons (s_n) dense dans $[0;1]$ et f telle que $N(f)=0$. Soit $x_0\in[0;1]$ et $(s_{\varphi(n)})$ une suite extraite qui converge vers x_0. On a donc $f(s_{\varphi(n)})\longrightarrow f(x_0)$. Cependant, puisque $N(f)=0$, pour tout $n\in\mathbb{N}$, $\left|f(s_n)\right|a_n=0$ donc pour tout n, $f(s_n)=0$ donc la suite $f(s_{\varphi(n)})=0$ donc $f(x_0)=0$ donc $f=0$. Il s'agit bien d'une norme dans ce cas là ! Réciproquement supposons que (s_n) ne soit pas dense, i.e. $\exists x_0,\delta>0$ tels que pour tout $n\in\mathbb{N}$, $s_n\notin]x_0-\delta,x_0+\delta[$. On pose alors la fonction f affine par morceaux qui vaut 1 en x_0, 0 en $x_0-\delta$ et $x_0+\delta$ et identiquement nulle en dehors de $]x_0-\delta,x_0+\delta[$. On a $\forall n$, $f(s_n)=0$ et $N(f)=0$ pourtant $f\neq 0$ donc N n'est pas une norme.
3. On a pour tout n, $\left|f(s_n)\right|\leq ||f||_\infty$ donc
$$N(f)\leq\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right)||f||_\infty .$$
   On va montrer que N n'est pas plus fine que $||\cdot||_\infty$. On considère f_m une fonction continue affine par morceaux qui vaut 0 sur $\left\{s_0,\dots,s_m\right\}$ et 1 en s_{m+1}. Par construction on a $N(f_m)\leq\sum_{n=m+1}a_n\to 0$ car la série est supposée convergente donc la suite des restes tend vers 0 pourtant $\left|\left|f_m\right|\right|_\infty=1$ pour tout m.

Exercice 131 (correction)

1. (a) La demie-droite $[0x)$ est fermée et convexe donc $[0x)\cap C$ est un fermé convexe de $[0x)$ contenant 0 et, puisque C contient un petit voisinage de 0 l'intersection n'est pas réduite à 0, i.e. elle est de la forme $[0y]$.

   (b) On pose $y=\mu x$ avec $\mu>0$ et on considère $z=\lambda x\in[0y]$, i.e. $0\leq\lambda\leq\mu$. On suppose que $z\in\overset{\circ}{C}$ donc $\exists\varepsilon>0$ tel que $\mathbb{B}(z,\varepsilon)\subseteq C$. On a alors $(\lambda+\varepsilon)z\in[0x)\cap C$ donc $\lambda<\mu$.

   On a donc $y\in C\setminus\overset{\circ}{C}=\partial C$.

   (c) i. On essaie de majorer la norme de a en écrivant $b-y=b-z+z-y$
$$\begin{aligned}||a||&\leq\left|\left|y+\frac{||y||}{||y-z||}(z-y)\right|\right|+\left|\left|\frac{||y||}{||y-z||}(b-z)\right|\right|\\&\leq\left|||y||-\frac{||y||}{||y-z||}\,||z-y||\right|+\frac{||y||}{||y-z||}\,||b-z||\\&<r.\end{aligned}$$
   Le passage de la première à la seconde ligne provient du fait que y et $z-y$ sont alignés de sens contraire.

   ii. On a alors $b=(1-t)y+ta$ avec $t=\frac{||y-z||}{||y||}\leq 1$ et $a,y\in C$. Donc, par convexité de C, $b\in C$ donc C contient un petit voisinage de z donc $[0x)\cap\overset{\circ}{C}=[0y[$ et donc y est l'unique élément de $[0x)\cap\partial C$.
2. On montrer que son inverse est définie par $g(y)=\partial_C(y)$. Soit $x\in\partial C'$ alors $\partial_C(x)$ est l'unique point de la droite $[0x)$ sur la frontière de C'. De même $\partial_{C'}(\partial_C(x))$ est l'unique point de $\partial C'$ sur la droite $[0\partial_C(x))$ mais, puisque $\partial_C(x)$ et x sont alignés on a $[0\partial_C(x))=[0x)$. On en déduit que $\partial_{C'}(\partial_C(x))=x$ car x est un point de $[0x)$ qui appartient à $\partial C'$. Donc $g\circ f=\mathrm{id}$ et de la même façon $f\circ g=\mathrm{id}$.
3. Dans ce cas particulier $\partial C'=\mathbb{S}^{n-1}$ la sphère unité et f est l'application $f(x)=\frac{x}{||x||}$ car $\frac{x}{||x||}$ est bien un point de $\mathbb{S}^{n-1}$ positivement aligné à x. Cette application est bien continue comme quotient de l'identité avec une application continue qui ne s'annule pas.
4. Soit F un fermé de ∂C. Puisque ∂C est un fermé de C qui est compact alors ∂C est compact, de même F est compact. On a alors $(f^{-1})^{-1}(F)=f(F)$ qui est compact donc fermé car f continue et F compact. Donc f^{-1} continue.
5. Donc pour tout C on a ∂C homéomorphe à $\mathbb{S}^{n-1}$ et, par transitivité de la relation « être homéomorphe à », toutes les frontières de ces ensembles sont homéomorphes entre elles.

Exercice 132 (correction)

1. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$. On essaie de majorer $||AX||_1$ en fonction de $||X||_1$ dans un premier temps. On a

$$\begin{aligned}
||AX||_1 &= \left|\left|\left(\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right)_i\right|\right|_1 = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j\right| \\
&\leq \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left|a_{ij}\right| \left|x_j\right| && \text{(inégalité triangulaire)} \\
&\leq \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \left|a_{ij}\right| \left|x_j\right| \leq \sum_{j=1}^n \left|x_j\right| \sum_{i=1}^n \left|a_{ij}\right| && \text{(x_j ne dépend pas de i)} \\
&\leq \max_j \left(\sum_{i=1}^n \left|a_{ij}\right|\right) ||X||_1
\end{aligned}$$

On a donc $|||A||| \leq \max_j \left(\sum_{i=1}^n \left|a_{ij}\right|\right)$. Par ailleurs, ce max est atteint pour un certain j_0 et, en notant $e_{j_0} = \left(\delta_{ij_0}\right)_i \in \mathbb{R}^n$ le j_0-ème vecteur de la base canonique on a

$$\left|\left|Ae_{j_0}\right|\right|_1 = \sum_{i=1}^n \left|\sum_{j=1}^n a_{ij}\delta_{jj_0}\right| = \sum_{i=1}^n \left|a_{ij_0}\right| = \max_j \left(\sum_{i=1}^n \left|a_{ij}\right|\right) \times \left|\left|e_{j_0}\right|\right|_1 .$$

Ce qui prouve que $|||A||| \geq \max_j \left(\sum_{i=1}^n \left|a_{ij}\right|\right)$ et donc on a l'égalité.

Il s'agit du maximum des normes 1 des colonnes de la matrices.

2. (a) On va noter $||T||$ la norme subordonnée de cette application car la norme sur $M_n(\mathbb{R})$ est déjà la norme subordonnée des matrices qui est notée $|||\cdot|||$. On a

$$\begin{aligned}
|||T(A)||| = \left|\left|\left|{}^{\mathrm{t}}A\right|\right|\right| &= \max_j \left(\sum_{i=1}^n \left|a_{ji}\right|\right) && \text{(Attention, on inverse les indices à cause de la transposée !)} \\
&= \max_k \left(\sum_{i=1}^n \left|a_{ik}\right|\right) && \text{(On change les indices $j \leftrightarrow k$)} \\
&\leq \max_k \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left|a_{ij}\right|\right) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left|a_{ij}\right| && \text{(On majore indépendamment de k : $\left|a_{ik}\right| \leq \sum_{j=1}^n \left|a_{ij}\right|$)} \\
&\leq \max_k \left(\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \left|a_{ij}\right|\right) = \sum_{j=1}^n \max_j \left(\sum_{i=1}^n \left|a_{ij}\right|\right) && \text{(On échange les sommes et on majore par le max)} \\
&\leq n\,|||A|||
\end{aligned}$$

Ce qui prouve bien que $||T|| \leq n$.

(b) On est en dimension finie donc on sait que la norme subordonnée sera atteinte pour certains vecteurs. On cherche donc une matrice A telle que $|||T(A)||| = ||T||\,|||A|||$. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$. On a $|||A||| = 1$ (les normes 1 de ses colonnes valent toutes 1) et $|||T(A)||| = n$ (la première colonne de $T(A) = {}^{\mathrm{t}}A$ est de norme n, les autres sont nulles). On a donc $|||T(A)||| = n\,|||A|||$ ce qui donne $||T|| \geq n$ et on a donc bien l'égalité.

Exercice 133 (correction)

1. (a) $\boxed{\subseteq}$ Soit $x \in U$, puisque $\ker \pi \oplus F = E$ on peut écrire $x = x_F + x_0$ avec $x_F \in F$ et $x_0 \in \ker \pi$. On a alors

$$\pi(x) = \pi(x_F + x_0) = x_F = \underbrace{x_F + x_0}_{=x\in U} \underbrace{-x_0}_{\in \ker \pi} \in (U + \ker \pi) \cap F.$$

$\boxed{\supseteq}$ Si $x \in (U + \ker(\pi)) \cap F$ alors il existe $u \in U$ et $x_0 \in \ker \pi$ tels que $x = u + x_0$ on a donc $\pi(x) = x = \pi(u)$ donc $x \in \pi(U)$.

(b) Il suffit de montrer que $(U + \ker \pi) \cap F$ est un ouvert de F ceci revient à dire que $U + \ker \pi$ est un ouvert de E puisque F étant une partie de E est muni de la topologie relative à E. Soit $x \in U + \ker \pi$ que l'on écrit $x = u + x_0$ avec $u \in U$ et $x_0 \in \ker \pi$. Puisque U est ouvert il existe $r > 0$ tel que $\mathbb{B}(u, r) \subseteq U$. On a alors $x_0 + \mathbb{B}(u, r) \subseteq U + \ker \pi$ mais $x_0 + \mathbb{B}(u, r) = \mathbb{B}(u + x_0, r) = \mathbb{B}(x, r)$. Donc il existe une boule centrée en x de rayon r et contenue dans $U + \ker \pi$. C'est ce qu'on voulait démontrer.

2. Soit $f : E \to F$ une application surjective. On considère G un supplémentaire quelconque de $\ker f$. L'application $f_{|G} : G \to F$ est un isomorphisme d'espace vectoriel car $\dim G = \dim F$ par le théorème du rang et $\ker f_{|G} = \ker f \cap G = \{0\}$ donc $f_{|G}$ est injective entre deux espaces de même dimension donc il s'agit bien d'une bijection.

   On remarque que $f_{|G}$ étant un isomorphisme elle est ouverte. En effet, son inverse, notée g, est linéaire entre espaces de dimensions finies donc continue et donc pour tout ouvert V de G on a $f_{|G}(V) = g^{-1}(V)$ qui est ouvert car c'est la préimage d'un ouvert par une application continue.

   On considère maintenant $U \subseteq E$ un ouvert quelconque et $\pi : E \to G$ la projection de E sur G parallèlement à $\ker f$. On a alors $f = f_{|G} \circ \pi$ donc $f(U) = f_{|G}(\underbrace{\pi(U)}_{\text{ouvert de } G})$ est bien un ouvert de F.

3. Soit $f : E \to F$ une application ouverte. On note $||\cdot||$ une norme sur F et n sa dimension. Puisque $f(\mathbb{B}(0, 1))$ est ouvert par hypothèse et contient 0 il existe $\delta > 0$ tel que $\mathbb{B}(0, \delta) \subseteq f(\mathbb{B}(0, 1))$. Si $(e_1, \dots, e_n)$ désigne une base de F alors $\forall k$, $\frac{\delta}{2||e_k||} e_k \in \mathbb{B}(0, \delta) \subseteq f(\mathbb{B}(0, 1))$ donc la famille $\left(\frac{\delta}{2||e_1||} e_1, \dots, \frac{\delta}{2||e_n||} e_n\right)$ est dans l'image de f et reste une base de F donc $\operatorname{im} f = F$.

Exercice 134 (correction)

1. On applique l'inégalité de Cauchy-Schwartz sur $\mathbb{R}^{N+1}$ aux vecteurs $(|a_0|, \dots, |a_N|)$ et $(|b_0|, \dots, |b_N|)$ ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{N} |a_n b_n| \leq \sqrt{\sum_{n=0}^{N} a_n^2} \sqrt{\sum_{n=0}^{N} b_n^2}$$

   Par hypothèse la quantité de droite converge donc $\sum_{n\geq 0} a_n b_n$ est absolument convergente donc convergente.

2. **Φ est continue et bien définie :** On commence (toujours) par justifier que l'application est bien définie. La question précédente prouve que $\gamma_a(b)$ est une quantité finie mais il faut tout de même justifier que γ_a est continue comme c'est affirmé. Il est clair que γ_a est linéaire et l'inégalité $|\gamma_a(b)| \leq ||a|| \, ||b||$ prouve que γ_a est continue et que $|||\gamma_a||| \leq ||a||$. Cette dernière inégalité prouve aussi que Φ est continue et que $|||\Phi||| \leq 1$.

   Φ est injective : Soit $a \in \ker \Phi$ alors $\gamma_a = 0$, i.e. $\forall b \in \ell^2(\mathbb{N})$, $\sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n = 0$. En particulier, pour $b = a$ on a $\gamma_a(a) = ||a|| = 0$ donc $a = 0$. Donc Φ est injective.

   Φ est surjective : Soit $\gamma : \ell^2(\mathbb{N}) \to \mathbb{R}$ une forme linéaire continue. On pose δ_k la suite $(\delta_{nk})_{n\in\mathbb{N}}$, la suite qui vaut 1 en indice k et 0 ailleurs. On pose $a_n = \gamma(\delta_n)$ qui définit un élément $a = (a_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Soit $b \in \ell^2(\mathbb{N})$ et $N \in \mathbb{N}$, on pose $b^N =$

$(b_0, \dots, b_N, 0, \dots) = \sum_{n=0}^{N} b_n \delta_n$ alors on a $b^N \xrightarrow{||\cdot||} b$ donc

$$\gamma(b^N) = \sum_{n=0}^{N} a_n b_n \longrightarrow \gamma(b) \in \mathbb{R}.$$

Ceci prouve que $\sum a_n b_n$ converge et que $\gamma(b) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n b_n$. Il ne nous reste qu'à montrer que $a \in \ell^2(\mathbb{N})$. On remarque que $a^N = (a_0, \dots, a_N, 0, \dots) \in \ell^2(\mathbb{N})$ et, puisque γ est continue, $\exists C > 0, \forall b \in \ell^2(\mathbb{N}), |\gamma(b)| \leq C\, ||b||$ donc

$$\left|\gamma(a_N)\right| = \sum_{n=0}^{N} a_n^2 \leq C \sqrt{\sum_{n=0}^{N} a_n^2}.$$

Si $a = 0$ alors il est clair que $a \in \ell^2(\mathbb{N})$ autrement $\sqrt{\sum_{n=0}^{N} a_n^2}$ est non nulle à partir d'un certain rang donc

$$\sqrt{\sum_{n=0}^{N} a_n^2} \leq C$$

donc $\sum a_n^2$ est bornée, i.e. $a \in \ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 135 (correction)

1. On considère $\mathcal{R} = \left\{ r \in \mathbb{R}^+ \mid \exists x \in E, K \subseteq \mathbb{B}(x, r) \right\}$. Il s'agit d'une partie non-vide de $\mathbb{R}$ car K est borné et minorée par 0 donc il existe une borne inférieure notée r. Ainsi, $\exists r_n \in \mathcal{R}^{\mathbb{N}}, r_n \to r$ et $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}, K \subseteq \mathbb{B}(x_n, r_n)$. On voudrait extraire une sous-suite de (x_n) qui converge. Pour cela il suffit de montrer que (x_n) est bornée. Soit $y \in K$ quelconque. On a

$$\left|\left|x_n\right|\right| \leq \left|\left|x_n - y\right|\right| + ||y|| \leq r_n + ||y||\,.$$

Il suffit alors de constater que puisque (r_n) converge et que K est borné alors (x_n) est aussi bornée. Soit $(x_{\varphi(n)})$ une sous-suite de (x_n) convergeant vers $x \in E$. On a alors pour tout $y \in K$ les inégalités $\forall n \in \mathbb{N}, \left|\left|y - x_{\varphi(n)}\right|\right| \leq r_{\varphi(n)}$ donc, en passant à la limite, $||y - x|| \leq r$. Autrement dit, $K \subseteq \mathbb{B}(x, r)$ ce qui signifie que $r \in \mathcal{R}$ donc r est un minimum.

2. Soient $\mathbb{B}(x_1, r)$ et $\mathbb{B}(x_2, r)$ deux boules fermées de rayon r contenant K. On va montrer que si $x_1 \neq x_2$ alors K est contenu dans une boule fermée strictement plus petite (ce qui est immédiat sur le dessin ci-dessous). On peut commencer par remarquer que $K \subseteq \mathbb{B}(x_1, r) \cap \mathbb{B}(x_2, r)$. On pose z une des intersections des deux sphères (puisque l'intersection des boules est non-vide les sphères s'intersectent bien). On va alors montrer que l'intersection de ces deux boules est contenue dans boule de centre $\gamma = \frac{x_1 + x_2}{2}$ et de rayon $\delta = \left|\left| z - \frac{x_1 + x_2}{2} \right|\right|$. Par le théorème de Pythagore $\delta^2 + \left|\left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right|\right| = \left|\left|z - x_1\right|\right|^2 = r^2$ d'où $\delta < r$ dès lors que $x_1 \neq x_2$. Maintenant, pour tout $y \in \mathbb{B}(x_1, r) \cap \mathbb{B}(x_2, r)$, d'après l'inégalité du parallélogramme appliquée à $y - x_1$ et $y - x_2$ on a

$$\left|\left|y - x_1\right|\right|^2 + \left|\left|y - x_2\right|\right|^2 = \frac{1}{2}\left|\left|x_1 - x_2\right|\right|^2 + 2\left|\left| y - \frac{x_1 + x_2}{2} \right|\right|^2$$

donc

$$\left|\left| y - \frac{x_1 + x_2}{2} \right|\right|^2 \leq \frac{1}{2}\left(2r^2 + \frac{1}{2}\left|\left|x_1 - x_2\right|\right|^2\right) = r^2 + \left|\left| \frac{x_1 - x_2}{2} \right|\right| = \delta^2.$$

ce qui prouve que $\mathbb{B}(x_1, r) \cap \mathbb{B}(x_2, r) \subset \mathbb{B}(\gamma, \delta)$ avec $\delta < r$. Donc on a bien $x_1 = x_2$.

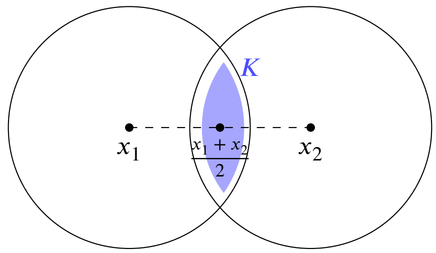


FIGURE 1 – Dessin guidant la réflexion

6. Suites et séries de fonctions - corrections

Exercice 136 (correction)

On a pour tout x, n, $\frac{nx}{1+n^2x} \leq \frac{nx}{n^2x} = \frac{1}{n}$ on a donc convergence uniforme vers 0.

Exercice 137 (correction)

On a pour tout n, x, $\frac{1}{\ln(nx)} \leq \frac{1}{\ln(n)}$ donc on a convergence uniforme vers la fonction nulle.

Exercice 138 (correction)

On voit qu'à x fixé on a toujours $f_n(x) \to x$ donc $f(x) = x$ est la limite simple de f. On a $\left|f(n) - f_n(n)\right| = \left|n - \frac{n}{2}\right| \to +\infty \neq 0$ donc la convergence n'est pas uniforme. Soit $I = [a;b]$ un segment. Alors, sur I, on a $x^2 \leq M^2$ avec $M = \max\{|a|, |b|\}$ donc $\left|f(x) - f_n(x)\right| \leq M\left(1 - \frac{1}{1+\frac{M^2}{n^2}}\right) \to 0$ donc on a convergence uniforme sur tout compact.

Exercice 139 (correction)

On remarque que (f_n) converge simplement vers $\sqrt{x^2} = |x|$. On a alors

$$f_n(x) - \sqrt{x^2} = \frac{\frac{1}{n} + x^2 - x^2}{\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + |x|} = \frac{1}{n\left(\sqrt{\frac{1}{n} + x^2} + |x|\right)} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

La convergence est donc uniforme. Si la suite des dérivées convergeait uniformément, la limite serait aussi dérivable. Ce n'est pas le cas car $|x|$ n'est pas dérivable en 0.

Exercice 140 (correction)

On remarque que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $f_n(0) = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ et $\delta \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ fixé $f_n(\delta) = n^\alpha \cos(\delta)^n \sin(\delta)$ tend vers 0 par croissance comparée car $0 \leq \cos(\delta) < 1$. Donc, si (f_n) converge uniformément vers une fonction il s'agit de la fonction nulle. On étudie les variations de f_n. On a $\forall x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
f_n'(x) &= n^\alpha \left(\cos(x)^{n+1} - n\sin(x)^2\cos(x)^{n-1}\right) \\
&= n^\alpha \cos(x)^{n-1}\left(\cos(x)^2 - n\sin(x)^2\right) \\
&= n^\alpha \cos(x)^{n-1}\left(\cos(x) + \sqrt{n}\sin(x)\right)\left(\cos(x) - \sqrt{n}\sin(x)\right)
\end{aligned}$$

Puisque cos et sin sont tous les deux positifs sur l'intervalle d'étude et que $f_n(0) = f_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$ l'abscisse x_n du maximum f_n est atteint strictement entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. On en déduit que $\cos(x_n) = \sqrt{n}\sin(x_n)$, i.e. $x_n = \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.

Il ne nous reste plus qu'à estimer $f_n(x_n)$. On a, en utilisant $\operatorname{Arctan}(u) = u + O\left(u^3\right)$ et $\cos(u) = 1 - u^2 + O\left(u^2\right)$ que $\cos\left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n = \left(1 - \frac{1}{2n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)^n \sim e^{-\frac{1}{2}}$. À l'aide d'un DL_1 de Arctan et de sin on a $\sin(x_n) \sim \frac{1}{\sqrt{n}}$. On en déduit que

$$\sup f_n = f_n(x_n) \sim e^{-\frac{1}{2}} n^{\alpha - \frac{1}{2}}.$$

Puisque f_n converge simplement vers 0 la convergence est uniforme si, et seulement si $f_n(x_n)$ tend vers 0, i.e. si, et seulement si $\alpha < \frac{1}{2}$.

Exercice 141 (correction)

On a pour tout $x > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} f(nx) = 0$ donc la limite simple de $f_n(x) = f(nx)$ sur $]0, 1]$ est 0. Malheureusement la limite n'est pas uniforme parce que, par exemple, $f_n\left(\frac{a}{n}\right) = f(a)$ qui ne tend pas vers 0 si $f(a) \neq 0$. En fait, la limite est uniforme si et seulement si $f = 0$. On remarque que f est bornée. En effet, par définition de la limite, il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \geq \delta$, $|f(x)| \leq 1$ (définition de la limite nulle en $+\infty$ avec $\varepsilon = 1$). Par ailleurs, f est continue par morceaux sur $[0, \delta]$ qui est un segment donc bornée. Elle est donc bornée sur $\mathbb{R}^+$ par une constante disons M. On peut alors conclure de deux manières différentes.

Par convergence dominée. La constante M est intégrable sur $[0, 1]$ donc l'inégalité $|f(nx)| \leq M$ fournit une domination qui permet d'inverser limite et intégrale.

À la main. Soit $\varepsilon > 0$ et $\delta > 0$ tel que $\forall y \geq \delta$, $|f(y)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Soit $1 > \nu > 0$. On a pour $n\nu \geq \delta$

$$\left|\int_0^1 f(nx)dx\right| = \underbrace{\left|\int_0^\nu f(nx)dx\right|}_{\leq \nu M} + \left|\int_\nu^1 f(nx)dx\right|.$$

Si on choisit $\nu = \frac{\varepsilon}{2M}$ on a alors $\left|\int_\nu^1 f(nx)dx\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}(1-\nu) \leq \frac{\varepsilon}{2}$ on a donc $\left|\int_0^1 f(nx)dx\right| \leq \varepsilon$.

Exercice 142 (correction)

On rappelle qu'une série alternée est majorée en valeur absolue par son premier terme et est du signe de son premier terme.

1. Soit $x \geq 1$, la suite $f_n(x) = (-1)^n \frac{1}{\ln(nx)}$ est alternée, décroissante en valeur absolue et tend vers 0 donc la somme converge.
2. On pose $f_n(x) = \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$. On considère suite des restes pour $p \geq 2$,

$$\left|R_p(x)\right| = \left|\sum_{n\geq p} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}\right| \leq \frac{1}{\ln(px)} \leq \frac{1}{\ln(p)}.$$

Donc (R_p) converge uniformément vers 0 donc la série de fonctions $\sum_{n\geq 1} f_n$ converge uniformément vers $f(x)$. Par ailleurs, $\lim_{x\to+\infty} f_n(x) = \ell_n = 0$ donc $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$. On applique la même chose à la série de fonction $\sum_{n\geq 2} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}$ qui converge donc vers $S = \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$ lorsque x tend vers 1. On en déduit que

$$f(x) = \underbrace{\frac{1}{\ln(x)}}_{\to+\infty} + \underbrace{\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(nx)}}_{\to S} \to +\infty.$$

3. On a $f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{x\ln(nx)^2}$. Il s'agit toujours d'une série alternée donc $\sum_{n\geq 1} f_n'$ converge sur $]1, +\infty[$ et la série des restes d'ordre p est majorée, en valeur absolue, par $\dfrac{1}{x\ln(px)^2} \leq \dfrac{1}{\ln(p)^2}$ par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(px)^2}$. La série des dérivées converge donc uniformément ce qui prouve que f est C^1 et $\forall x \in]1, +\infty[$,

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{x\ln(nx)^2}$$

qui est du signe du premier terme, i.e. de $\frac{-1}{x\ln(x)^2} < 0$ donc f est décroissante.
Pour $x > y$, $f'(x) - f'(y) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \left(\dfrac{1}{x\ln(nx)^2} - \dfrac{1}{y\ln(ny)^2}\right)$ qui est toujours alterné par décroissance de $x \mapsto \dfrac{1}{x\ln(px)^2}$.
Elle est donc du signe de son premier terme qui est $\dfrac{1}{y\ln(y)^2} - \dfrac{1}{x\ln(x)^2} > 0$ donc f' est croissante donc f est convexe (pensez à ne pas dériver systématiquement pour établir la monotonie d'une fonction surtout lorsque vérifier la dérivabilité peut être pénible comme c'est le cas pour les limites de suites de fonctions ou pour les intégrales à paramètres).
4. Tracer le graphe d'une fonction qui ressemble à $x \mapsto \dfrac{1}{x-1}$ sur l'intervalle de définition (attention qu'elle n'y ressemble qu'au tracer, pas de façon asymptotique).

Exercice 143 (correction)

1. Pour $t > 0$ fixé la suite $(-1)^{n+1}e^{-a_n t}$ est alternée (signe alterné, décroissante en valeur absolue et tend vers 0) donc la série converge, i.e. f est bien définie. On considère $f_N(x) = \sum_{n=1}^{N} (-1)^{n+1}e^{-a_n t}$. Soient $\alpha > 0$. Puisqu'une série alternée est inférieure en valeur absolue à son premier terme, on a $\forall t \in [\alpha, +\infty[$,

$$\left|f(x) - f_N(x)\right| = \left|\sum_{n=N+1}^{+\infty} (-1)^{n+1}e^{-a_n t}\right| \leq e^{-a_{N+1}t} \leq e^{-a_{N+1}\alpha}.$$

Ce qui prouve la convergence uniforme sur tout segment de fonctions continues donc f est continue.

2. En majorant la série par son premier terme on a
$$f_N(t) \leq e^{-a_0 t}$$
ce qui fournit une domination de la suite f_N par une fonction intégrable donc f est intégrable et on peut intervertir limite et intégrale ce qui donne
$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} f(t)dt &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\int_0^{+\infty} e^{-a_n t}dt\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{a_n}\\ &= \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{a_n}\end{aligned}$$

3. On peut appliquer cela au cas particulier où $a_n = n$. Dans ce cas on a $f(t) = -\sum_{n=1}^{\infty}(-e^{-t})^n = \frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}$ de la forme $\frac{u'}{u}$ qui se primitive donc en $\ln(u)$. On a donc
$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = -\int_0^{+\infty}\frac{-e^{-t}}{1+e^{-t}}dt = -\left[\ln\left(1+e^{-t}\right)\right]_0^{+\infty} = \ln(2).$$

Exercice 144 (correction)

1. Soit $-1 < x < 1$. On a $\left|x^n\frac{\sin(nx)}{n}\right| \leq \left|x^{n+1}\right|$. Donc la série converge absolument. Donc $f(x)$ existe bien sur $]-1,1[$.

   On pose $f_n(x) = \frac{x^n\sin(nx)}{n}$ pour $n \geq 1, |x| < 1$. Par ailleurs pour tout $\delta < 1$ et $x \in [-\delta,\delta]$

   - D'après ce qui précède $\sum f_n$ converge simplement.
   - Soit $0 < \delta < 1$ et $x \in [-\delta,\delta]$ $\left|f_n'(x)\right| = \left|x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)\right| \leq 2\delta^{n-1}$ dont la série converge donc $\sum_{n\geq 1} f_n'(x)$ converge normalement donc uniformément sur tout segment de la forme $[-\delta,\delta]$.

   donc f est C^1 et on a $f'(x) = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx)$.

2. On pose $g(x) = \mathrm{Arctan}\left(\frac{x\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right)$ et on calcule séparément $f'(x)$ et $g'(x)$.
$$\begin{aligned}f'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} x^{n-1}\sin(nx) + x^n\cos(nx) = \mathfrak{I}\left(\frac{1}{x}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(xe^{ix}\right)^n\right) + \mathfrak{R}\left(-1+\sum_{n=0}^{+\infty}\left(xe^{ix}\right)^n\right)\\ &= \mathfrak{I}\left(\frac{1}{x}\frac{1}{1-xe^{ix}}\right) + \mathfrak{R}\left(-1+\frac{1}{1-xe^{ix}}\right) = \frac{1}{x}\frac{\mathfrak{I}\left(1-xe^{-ix}\right)}{|1-xe^{ix}|^2} + \frac{\mathfrak{R}\left(1-xe^{-ix}\right)}{|1-xe^{ix}|^2} - 1\\ &= \frac{1}{x}\frac{x\sin(x)}{1-2x\cos(x)+x^2} + \frac{1-x\cos(x)}{1-2x\cos(x)+x^2} - 1 = \frac{\sin(x)+1-x\cos(x)-1+2x\cos(x)-x^2}{1-2x\cos(x)+x^2}\\ &= \frac{\sin(x)+x\cos(x)-x^2}{1-2x\cos(x)+x^2}\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\operatorname{Arctan}\left(\frac{x\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right)' &= \frac{\frac{(\sin(x)+x\cos(x))(1-x\cos(x))-x\sin(x)(-\cos(x)+x\sin(x))}{(1-x\cos(x))^2}}{1+\left(\frac{x\sin(x)}{1-x\cos(x)}\right)^2} \\
&= \frac{\sin(x)-x\sin(x)\cos(x)+x\cos(x)-x^2\cos(x)^2+x\sin(x)\cos(x)-x^2\sin(x)^2}{(1-x\cos(x))^2+x^2\sin(x)^2} \\
&= \frac{\sin(x)+x\cos(x)-x^2}{1-2x\cos(x)+x^2}.
\end{aligned}$$

On a donc $f'(x)=g'(x)$ donc f et g différent d'une constante. Mais $f(0)=0$ et $g(0)=0$ donc $\forall x\in\,]-1,1[\,,\ f(x)=g(x)$.

Exercice 145 (correction)

On considère $f_n(t)=\mathbb{1}_{\{u_n>t\}}=\begin{cases}1 & \text{si } u_n>t\\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$. La fonction f_n vaut 1 sur $[0,u_n[$ puis 0 ensuite. Elle est donc intégrable et $\int_0^{+\infty} f_n(t)dt=u_n$. On en déduit que

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{N} f_n(t)dt=\sum_{n=0}^{N} u_n$$

qui converge donc on peut intervertir série et intégrale ce qui donne

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t)dt=\sum_{n=0}^{+\infty} u_n.$$

Or la fonction $\sum\limits_{n=0}^{+\infty} f_n(t)$ est bien $f(t)$.

Exercice 146 (correction)

1. On remarque que f_1 étant une primitive d'une fonction continue, elle est de classe C^1. Par une récurrence qu'on ne détaillera pas f_n est de classe C^n. On a aussi $\forall n\in\mathbb{N}^*,\ f_n(0)=0$ donc $\forall k\le n-1,\ f_n^{(k)}(0)=f_{n-k}(0)=0$. Par ailleurs, $f_n^{(n)}=f_0$ qui est bornée sur $[0,b]$ car continue sur un segment. On a alors, d'après l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$|f_n(x)|\le \|f_0\|_\infty\frac{x^n}{n!}\le\|f_0\|_\infty\frac{b^n}{n!}.$$

   On en déduit que $\sum_{n\ge1} f_n$ converge normalement sur $[0,b]$.
2. Puisque la convergence est normale $S(x)$ existe pour tout $x\in[0,b]$ et on peut intervertir somme et dérivation ce qui donne

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_n'(x)=\sum_{n=1}^{+\infty} f_{n-1}(x)=f_0(x)+S(x).$$

   Par ailleurs on a $S(0)=0$ donc S est solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'-y=f_0\\ y(0)=0.\end{cases}$$

3. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $x \mapsto \lambda e^x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}$. On cherche une solution particulière de l'équation par la méthode de variation de la constante, i.e. avec $y_0(x) = \lambda(x)e^x$ ce qui donne $\lambda'(x)e^x = x\ln(x)e^x$. On en déduit que λ est une primitive de $x\ln(x)$. On peut en déterminer une en faisant une intégration par partie ce qui donne $\int x\ln(x)dx = \frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)$. On en déduit que $y_0(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)e^x$ est une solution particulière et qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $S(x) = y_0(x)+\lambda e^x$. Puisque $S(0) = 0$ on a $\lambda = 0$. Donc $S(x) = \frac{x^2}{4}(2\ln(x)-1)e^x$.

Exercice 147 (correction)

1. Attention à ne pas tomber dans le piège de prendre un équivalent : on rappelle que lorsque la série n'est pas de signe constant on ne peut pas conclure sur la convergence ou non d'une série. On propose tout de même deux méthodes.

   Méthode 1 : Par le théorème des séries alternée. Si $x = 0$ la série est nulle. Si $-1 < x < 0$ alors $\left|\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right| = -\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ qui est décroissante (par rapport à n) et tend vers 0 lorsque $n \to +\infty$. De même pour $x > 0$, $\left|\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)\right| = \ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ qui est décroissante et tend vers 0.

   Méthode 2 : Avec des développements limités. À x fixé on a $(-1)^n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right) = (-1)^n\frac{x}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$. Il s'agit de la somme de deux suites qui sont le terme général de séries convergentes.

   Ainsi, f est bien définie sur son ensemble de définition. On pose $f_n(x) = (-1)^n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$ qui est de classe C^∞ et $f_n'(x) = \frac{(-1)^n}{x+n}$. À x fixé $f_n'(x)$ est le terme général d'une série alternée donc convergente et, puisqu'une série alternée est majorée, en valeur absolue, par son premier terme, on a pour $p \geq 2$, $\left|\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}\right| \leq \frac{1}{x+p} \leq \frac{1}{p-1} \to 0$. Ainsi la série des restes de $\sum f_n'$ converge uniformément vers 0 donc f est de classe C^1 et
$$f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n}.$$

2. On a $f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{x+n} = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{x+n}$. Or
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}\frac{(-1)^n}{x+n} &= \sum_{n=1}^{N}(-1)^n\int_0^1 t^{x+n-1}dt\\ &= \int_0^1 t^x\sum_{n=1}^{N}(-1)^n t^{n-1}dt\\ &= \int_0^1 -t^x\frac{1-(-t)^N}{1+t}dt = -\int_0^1\frac{t^x}{1+t}dt + (-1)^N\int_0^1\frac{t^{x+N}}{1+t}dt.\end{aligned}$$
   Or $\left|\int_0^1\frac{t^{x+N}}{1+t}dt\right| \leq \int_0^1 t^{x+N}dt \leq \frac{1}{x+N+1} \to 0$. Donc, par unicité de la limite on a bien $f'(x) = -\int_0^1\frac{t^x}{1+t}dt$.

3. On a $f(x) = -\ln(1+x) + \sum_{n=2}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(1+\frac{x}{n}\right)$. Le second terme étant bien défini sur $]-2,+\infty[$ il a une limite finie lorsque $x \to -1$. En revanche, $-\ln(1+x) \to +\infty$ donc $f(x) \underset{x\to-1^-}{\sim} -\ln(1-x)$.

Par ailleurs, en intégrant par parties, en primitivant t^x, on a

$$f'(x) = \left[\frac{-t^{x+1}}{(x+1)(1+t)}\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{(x+1)(1+t)^2}dt = -\frac{1}{2(x+1)} - R(x)$$

avec $0 \leq R(x) = \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{(x+1)(1+t)^2}dt \leq \int_0^1 \frac{t^{x+1}}{(x+1)}dt = \frac{1}{x+1} - \frac{1}{x+2}$. Enfin, on a $f(x) - f(0) = \int_0^x f'(t)dt = -\frac{\ln(x+1)}{2} + \int_0^x R(t)dt$. Or

$$0 \leq R(t) \leq \int_0^x \frac{1}{1+t} - \frac{1}{2+t}dt = \ln(x+1) - \ln(x+2) + \ln(2) = \ln\left(\frac{x+1}{x+2}\right) + \ln(2) \to \ln(2).$$

On a donc

$$f(x) = -\frac{\ln(x)}{2} + O(1) \sim -\frac{\ln(x)}{2}.$$

Exercice 148 (correction)

On pose $f_n(x) = (-1)^n \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right)$ pour $n \geq 1$. Soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$ fixé. Pour $n_0 \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq n_0, \frac{1}{nx^2} \leq \frac{\pi}{2}$ la suite $\left(\sin\left(\frac{1}{nx^2}\right)\right)_{n\geq n_0}$ est décroissante (car sin est croissante sur $[0, \pi/2]$) et tend bien vers 0. Donc la suite de fonction (f_n) est alternée à partir d'un certain rang donc converge.

On considère $x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n x^2 \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right)$. Puisqu'une série alternée est inférieure à son premier terme en valeur absolue on a, à partir d'un certain rang,

$$\left|\sum_{n=p}^{+\infty}(-1)^n x^2\right| \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right) \leq \left|x^2 \sin\left(\frac{1}{px^2}\right)\right| \leq \frac{1}{p}$$

donc la suite de fonction $\left(\sum_{n=1}^{N} (-1)^n x^2 \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right)\right)$ converge uniformément ce qui permet d'échanger limite et somme. On a donc

$$\lim_{x\to+\infty} x^2 f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n \frac{1}{n} = -\ln(2) \text{ donc } f(x) \sim -\frac{\ln(2)}{x^2}.$$

Exercice 149 (correction)

1. À $x > 0$ fixé la suite $\left(\frac{1}{1+nx}\right)_n$ est décroissante et tend vers 0 donc la série converge simplement par le théorème des séries alternées. Soit $\alpha > 0$ et $x \geq \alpha$. Puisqu'une série alternée est majorée en valeur absolue par son premier terme on a

$$\left|\sum_{n=p}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{1+nx}\right| \leq \frac{1}{1+px} \leq \frac{1}{1+p\alpha} \to 0.$$

   Ainsi, f est limite uniforme sur $[\alpha, +\infty[$ de fonctions continues donc elle est continue sur tout intervalle de cette forme donc continue sur $\mathbb{R}^{+*}$.

2. On propose deux méthodes. L'une d'entre elle utilise le théorème de convergence dominée que vous n'avez peut-être pas encore vu, l'autre est plus élémentaire mais plus longue.

Méthode 1 : Par convergence dominée. On peut voir $\dfrac{1}{1+t^x}$ comme la somme d'une série géométrique : $\dfrac{1}{1+t^x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{nx}$.

Par ailleurs la majoration $\left|\sum_{n=0}^{N}(-1)^n t^{nx}\right| \leq 1 = \varphi(t)$ par une fonction intégrable fournit une domination qui permet d'échanger limite et intégrale. D'où

$$\int_0^1 \frac{1}{1+t^x}dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n t^{nx}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \int_0^1 t^{nx}dt = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{1+nx} = f(x).$$

Méthode 2 : À la main. Par définition pour tout $x > 0$, $f(x) = \lim_{N\to+\infty}\sum_{n=0}^{N-1}\dfrac{(-1)^n}{1+nx}$. D'autre part,

$$\sum_{n=0}^{N-1}\frac{(-1)^n}{1+nx} = \sum_{n=0}^{N-1}(-1)^n\int_0^1 t^{nx}dt = \int_0^1\sum_{n=0}^{N-1}(-t^x)^n dt = \int_0^1\frac{1-(-t^x)^N}{1+t^x}dt = \int_0^1\frac{1}{1+t^x}dt - (-1)^N\int_0^1\frac{t^{Nx}}{1+t^x}dt.$$

Or $\left|\int_0^1 \dfrac{t^{Nx}}{1+t^x}dt\right| \leq \int_0^1 t^{Nx}dt = \dfrac{1}{1+Nx} \to 0$. Donc on a bien, par unicité de la limite, $f(x) = \int_0^1 \dfrac{1}{1+t^x}dt$.

Pour les mêmes raisons que dans la première question la série $\sum_{n\geq 0}(-1)^n\dfrac{x}{1+nx}$ converge uniformément. En effet, on peut majorer uniformément les restes

$$\left|\sum_{n=p}^{+\infty}\frac{(-1)^n x}{1+nx}\right| \leq \frac{x}{1+px} = \frac{1}{p}\frac{1+px-1}{1+px} = \frac{1}{p}\left(1-\frac{1}{1+px}\right) \leq \frac{1}{p}.$$

Ceci qui permet d'échanger $\lim_{N\to+\infty}$ et $\lim_{x\to+\infty}$ dans les sommes partielles $\sum_{n=1}^{N}(-1)^n\dfrac{x}{1+nx}$ (on doit commencer à 1 car pour $n=0$ le terme est x qui ne converge pas lorsque $x \to +\infty$). On obtient donc

$$xf(x) - x = \sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x}{1+nx} \to \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}.$$

Il ne reste plus qu'à remarquer, avec le changement de variable $k = n-1$ et ce qu'on a prouvé au début de la question, que

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n} = -f(1) = -\int_0^1\frac{1}{1+t}dt = -\ln(2).$$

On a donc bien $f(x) = 1 - \dfrac{\ln(2)}{x} + o\left(\dfrac{1}{x}\right)$.

3. On sépare les termes pairs et impairs ce qui donne

$$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n+1} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} + i\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} + \frac{i}{2}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = f(2) + \frac{i}{2}f(1).$$

Grâce à la question précédente on a $f(1) = \ln(2)$ et $f(2) = \int_0^1 \dfrac{1}{1+t^2}dt = [\mathrm{Arctan}(t)]_0^1 = \mathrm{Arctan}\,(1) = \dfrac{\pi}{4}$. Donc

$$S_1 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{i^n}{n+1} = \frac{\pi}{4} + \frac{i\ln(2)}{2}.$$

L'autre somme qui nous intéresse est $f(3) = \int_0^1 \frac{1}{1+t^3}dt$. Nous allons faire une décomposition en éléments simples. On a $1+t^3 = (1+t)(1-t+t^2)$ et $1-t+t^2$ à pour racines $\omega = e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $\overline{\omega}$. En faisant les calculs on obtient

$$\frac{1}{1+t^3} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{t-2}{1-t+t^2}\right) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{1+t} - \frac{1}{2}\frac{2t-1}{t^2-t+1}\right) + \frac{1}{2}\frac{1}{t^2-t+1}$$

Une primitive de $\frac{1}{1+t}$ est $\ln(1+t)$, une primitive de $\frac{2t-1}{t^2-t+1}$ est $\ln(t^2-t+1)$ et une primitive de $\frac{1}{t^2-t+1}$ s'obtient en passant à la forme canonique au dénominateur et en essayant de reconnaître la dérivée d'une $\mathrm{Arctan}(\cdot)$ comme ci-dessous

$$\begin{aligned}
\frac{1}{t^2-t+1} &= \frac{1}{\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}} = \frac{4}{3}\frac{1}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} \\
&= \frac{4}{3}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\frac{2}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)^2+1} \\
&= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\left(t-\frac{1}{2}\right)\right)\right)'
\end{aligned}$$

Au final, on a

$$\begin{aligned}
S_3 &= \frac{1}{3}\ln(2) - \frac{1}{6}\times 0 + \frac{1}{2}\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + \mathrm{Arctan}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right) \\
&= \frac{\ln(2)}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\frac{\frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right) = \frac{\ln(2)}{3} + \frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{Arctan}\left(\tan\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) \\
&= \frac{\ln(2)}{3} + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

Exercice 150 (correction)

1. Soit $r < \min(R_1, R_2)$ alors la suite $a_n r^n + b_n r^n$ tend vers 0 comme somme de suite qui tend vers 0 donc $R \geq \min(R_1, R_2)$. Par ailleurs si $R_1 \neq R_2$, disons $R_1 < R_2$ alors pour $R_1 < r < R_2$ la série $\sum_{n\geq 0} a_n r^n + b_n r^n$ diverge grossièrement comme somme d'une série convergente $\sum_{n\geq 0} b_n r^n$ et d'une série grossièrement divergente $\sum_{n\geq 0} a_n r^n$.
2. Soit $r < R_1 R_2$. D'après le produit de Cauchy les coefficients du développement en série entière du produit $\sum_{n\geq 0} a_n x^n \sum_{n\geq 0} b_n x^n$ sont donné par $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$. On écrit $r = r_1 r_2$ avec $r_1 < R_1$ et $r_2 < R_2$. Par hypothèse $\left|c_n r^n\right| = \left|\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right| r^n \leq \sum_{k=0}^{n} \left|a_k r_1^k\right| \left|b_{n-k} r_2^{n-k}\right|$ or $\left|b_{n-k} r_2^{n-k}\right|$ est bornée disons par M donc $\left|c_n r^n\right| \leq M \sum_{k=0}^{n} \left|a_k\right| r_1^k \leq M \sum_{k=0}^{+\infty} \left|a_k\right| x^k$ donc $\left|c_n r^n\right|$ est bornée donc $R \geq R_1 R_2$.

Exercice 151 (correction)

On a

$$\begin{aligned}
e^{z_1}e^{z_2} &= \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z_1^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k}{k!}\frac{z_2^{n-k}}{(n-k)!}\right) && \text{(par produit de Cauchy)} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(z_1+z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2} && \text{(par le binôme de Newton)}
\end{aligned}$$

Exercice 152 (correction)

On propose deux méthodes.

Méthode 1 : On remarque qu'en posant $f(x) = \dfrac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ définie sur $]-1,1[$, on a, par intégration terme à terme,

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, F(x) := \int_0^x f(t)dt = \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}x^{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}x^n$$

et, en réintégrant on a

$$\forall x \in \left]-1,1\right[, G(x) := \int_0^x \ln(1+t)dt = (1+x)\ln(1+x) - x = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}x^{n+1}.$$

Puisque la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}$ existe (c'est la somme d'une série alternée), par le théorème de Abel radial

$$\lim_{x\to 1^-} G(x) = 2\ln(2) - 1 = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}.$$

Méthode 2 : On décompose en éléments simples $\dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1}$. On a alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - \left(1 - \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}\right) = 2\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} - 1.$$

Par le théorème d'Abel radial $\sum_{n=1}^{+\infty} \dfrac{(-1)^{n+1}}{n} = F(1) = \ln(2)$ avec la fonction F définie dans la méthode 1.

Exercice 153 (correction)

Méthode 1 : On pose $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ définie sur $]-1,1[$. On a, par intégration terme à terme,

$$\forall x \in\,]-1,1[\,, F(x) := \int_0^x f(t)dt = \operatorname{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} x^{2n+1}.$$

Puis, en réintégrant entre 0 et 1 et en faisant une intégration par partie en posant $u' = 1$ et $v = \operatorname{Arctan}(t)$ on obtient

$$\forall x \in\,]-1,1[\,, G(x) = \int_0^x \operatorname{Arctan}(t)dt = x\operatorname{Arctan}(x) - \frac{1}{2}\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} x^{2n+2}.$$

Puisque la série de terme général $\dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)}$ converge (il s'agit d'une série alternée) on a, par le théorème d'Abel radial, $\lim\limits_{x\to 1^-} G(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln(2)}{2}$.

Méthode 2 : On décompose en éléments simples $\dfrac{1}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{1}{2n+1} - \dfrac{1}{2n+2}$. On a alors

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}.$$

La première somme on l'obtient avec le théorème d'Abel radial appliqué au développement en série entière de $F(x) = \operatorname{Arctan}(x)$ ce qui donne $\dfrac{\pi}{4}$ et la seconde en l'appliquant à $\ln(1+x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{n+1} x^{n+1}$. On retrouve donc bien $\sum_{n=0}^{+\infty} \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\ln(2)}{2}$.

Exercice 154 (correction)

1. La fonction f est évidemment de classe C^∞ sur $]-\infty, 0[$ et sur $]0, +\infty[$. De plus on a $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0$ et de même à gauche. Donc f est dérivable en 0 de dérivée $f'(0) = 0$. On montre très facilement par récurrence que pour tout $k \in \mathbb{N}, \exists F_k$ un fraction rationnelle telle que $\forall x > 0, f^{(k)}(x) = F_k(x)e^{-\frac{1}{x}}$. Quelle que soit la limite de F_k en 0, par croissance comparée $\lim\limits_{x\to 0^+} f^{(k)}(x) = 0 = f^{(k)}(0)$. Donc f est bien de classe C^∞.
2. Si f était développable en série entière en 0 on aurait alors pour un certain $R > 0$ et $x \in\,]-R, R[\,, f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} f^{(n)}(0)\dfrac{x^n}{n!} = 0$ or $\forall x > 0, f(x) > 0$ ce qui est impossible.

Exercice 155 (correction)

1. On a pour tout $n \geq 1$, pour tout $x > 1$, $f_n(t) = e^{-t^n} \leq e^{-t} = \varphi(t)$ et on remarque que φ est intégrable. Notre suite de fonction est donc bien intégrable car dominée et, d'après le théorème de convergence dominée on peut inverser limites et intégrales. Ce qui donne $\lim I_n = 0$.
2. Le changement de variable donne
$$\int_1^\infty e^{-t^n} dt = \frac{1}{n}\int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u^{\frac{n-1}{n}}} du$$
Toujours par le théorème de convergence dominée, puisque $u^{\frac{n-1}{n}} \geq 1$, $\frac{e^{-u}}{u^{\frac{n-1}{n}}} \leq e^{-u}$ donc $\int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u^{\frac{n-1}{n}}} du \to \int_1^\infty \frac{e^{-u}}{u} du = I$ donc $I_n \sim \frac{I}{n}$.

3. D'après la règle de D'Alembert le rayon de convergence est 1.

Exercice 156 (correction)

1. Par récurrence. On a bien $u_0 = 0 \leq 3^0 = 1$. Soit $n \geq 0$ tel que $u_n \leq 3^n$ alors $u_{n+1} = 2u_n + 2^n \leq 2 \cdot 3^n + 3^n = 3 \cdot 3^n = 3^{n+1}$. On en déduit que le rayon de convergence R de f est supérieur à celui de $\sum 3^n x^n$ qui est $\frac{1}{3}$ d'après le critère de d'Alembert.
2. On a

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=0}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=1}^{+\infty} u_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} u_{n+1} x^{n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (2u_n + 2^n) x^{n+1} = 2x f(x) + x \sum_{n=0}^{+\infty} (2x)^n \\ &= 2x f(x) + \frac{x}{1-2x} \end{aligned}$$

d'où le résultat attendu.
3. On calcule $\frac{x}{(1-2x)^2}$. On a

$$\begin{aligned} \frac{1}{(1-2x)^2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-2x}\right)' = \frac{1}{2}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}(2x)^n\right)' \\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{+\infty} n 2^n x^{n-1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} n 2^{n-1} x^{n-1} \end{aligned}$$

En multipliant par x et en identifiant les coefficients par unicité des coefficients des séries entières on obtient $\forall n \geq 0, u_n = n 2^{n-1}$.

Exercice 157 (correction)

À venir.

Exercice 158 (correction)

On pose $g(x,t) = \cos(x \sin(t))$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur le segment $[0;\pi]$ donc intégrable.
2. On a bien à t fixé $x \mapsto g(x,t)$ de classe C^∞ et toutes les conditions de continuité par morceaux des dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ en t. On a en plus la domination $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq 1$ donc on peut dériver sous le signe intégral, i.e.

$$\begin{aligned} f'(x) &= -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{dt} \\ f''(x) &= -\int_0^\pi \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{dt}\,. \end{aligned}$$

3. On a $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x\cos^2(t)\cos(x\sin(t))$.

4. En remplaçant $\sin^2(t)$ par $1-\cos^2(t)$ dans l'expression de $xf''(x)$ on a

$$xf''(x)+f'(x)+xf(x)=\int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{dt}=[h(x,t)]_0^\pi=0.$$

5. Avec $g(x)=\sum_0^\infty a_n x^n$ solution de E, puisqu'une série entière converge normalement sur son disque ouvert de convergence on peut dériver terme à terme et on a

$$xg''(x)+g'(x)+xg(x)=a_1+\sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1}+(n+1)^2a_{n+1})x^n=0.$$

   Par unicité du développement en série entière sur le disque de convergence on a bien $a_1=0$ et $\forall n\geq 2, a_n=\frac{-a_{n-2}}{n^2}$.

6. On a $\forall u\in\mathbb{R}, \cos(u)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$ donc, sous réserve de pouvoir intervertir série et intégrale on a

$$f(x)=\int_0^\pi\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}\sin(t)^{2n}\,\mathrm{dt}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}W_nx^{2n}$$

   Puisqu'on a $\int_0^\pi\left|\frac{(-1)^n}{(2n)!}\sin^{2n}(t)\right|\mathrm{dt}\leq\frac{\pi}{(2n)!}$ par la majoration $\sin^{2n}(t)\leq 1$ sur $[0;\pi]$ et que $\frac{\pi}{(2n)!}$ est le terme général d'une série entière de rayon de convergence infinie alors l'interversion est bien légale et le rayon de convergence du développement de f au voisinage de 0 est infini.

7. On remarque qu'une solution g développable en série entière au voisinage de 0 a ses coefficients totalement déterminés par $g(0)=a_0$. En effet, la relation de récurrence donne $a_{2n+1}=0$ pour tout n inconditionnellement à cause de la condition $a_1=0$ et de même les termes d'indice pair son fixés par le choix de a_0. Donc f est bien l'unique solution satisfaisant $f(0)=\pi$ sur son disque de convergence qui est $\mathbb{R}$.

8. En considérant les premiers termes de a_{2n} vérifiant la relation de récurrence

$$\begin{cases} a_0 &= \pi\\ a_1 &= 0\\ a_n &= \frac{-a_{n-2}}{n^2}, \forall n\geq 2\end{cases}$$

   on prouve facilement par récurrence que pour tout $n\in\mathbb{N}, a_{2n+1}=0$ et $a_{2n}=(-1)^n\frac{\pi}{2^{2n}(n!)^2}$. En identifiant a_{2n} à $(-1)^n\frac{W_n}{(2n)!}$ grâce à la question 6) on a

$$\forall n\in\mathbb{N}, W_n=\pi\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Exercice 159 (correction)

1. On a $u_1=1$ et $u_2=2$.

2. On a bien $u_2=1+1$. Soit $n\geq 2$. On considère $E_{n+1}=\{1,\dots,n,n+1\}$ et $\sigma: E_{n+1}\longrightarrow E_{n+1}$. Si $\sigma(n+1)=n+1$ alors $\sigma_{|E_n}$ est une involution de $\mathfrak{S}_n$ réciproquement toute involution de $\mathfrak{S}_n$ induit une involution de $\mathfrak{S}_{n+1}$ qui fixe $n+1$. Si $\sigma(n+1)=j\neq n+1$ alors l'ensemble de $n-1$ éléments $E_n^j=E_n\setminus\{j\}$ est stable par σ qui est toujours une involution. Puisqu'on a n choix pour $j\neq n+1$ on a bien

$$u_{n+1}=\underbrace{u_n}_{\text{involutions qui fixent } n+1}+\underbrace{nu_{n-1}}_{\text{involutions qui ne fixent pas } n+1}.$$

3. (a) Puisque l'ensemble des involutions est inclus dans $\mathfrak{S}_n$ qui est de cardinal $n!$ on a $u_n\leq n!$ donc $\frac{u_n}{n!}\leq 1$ donc le rayon de convergence de f est supérieur à celui de $\sum_{n\geq 0}x^n$ qui est 1.

(b) D'après le cours f est dérivable et on peut la dériver terme à terme sur $]-R;R[$. On a

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{(n-1)!} x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{u_{n+1}}{n!} x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n + n u_{n-1}}{n!} x^n \\ &= 1 + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_n}{n!} x^n}_{f(x)-1} + \underbrace{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{u_{n-1}}{(n-1)!} x^{n-1}}_{f(x)} \times x = (1+x) f(x). \end{aligned}$$

(c) Il s'agit d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 du type $y' - a(x)y = 0$ dont les solutions sont de la forme $\lambda e^{A(x)}$ avec $A'(x) = a(x)$. Donc $\exists \lambda \in \mathbb{R} / f(x) = \lambda e^{x + \frac{x^2}{2}}$. Puisque $f(x) = u_0 = 1$ on a $\lambda = 1$.

(d) On a par ailleurs

$$\begin{aligned} e^{x+\frac{x^2}{2}} &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} \left(x + \frac{x^2}{2}\right)^N = \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} x^N \left(1 + \frac{x}{2}\right)^N \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{1}{N!} x^N \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{x^k}{2^k} = \sum_{N=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{N} \frac{\binom{N}{k}}{N! 2^k} x^{N+k}. \end{aligned}$$

On en déduit qu'à n fixé, le terme a_n en x^n de la série entière ci-dessus est

$$\sum_{N+k=n/k\leq N} \frac{\binom{N}{k}}{N! 2^k}.$$

Mais $A_n = \{(N,k), N \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq N, N+k=n\} = \left\{(n-k,k), 0 \leq k \leq \lfloor \frac{n}{2} \rfloor\right\}$. D'où

$$a_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\binom{n-k}{k}}{(n-k)! 2^k} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{1}{k!(n-2k)! 2^k}.$$

Par unicité des coefficients du développement en série entière on a $a_n = \frac{u_n}{n!}$ ce qui permet de conclure.

Exercice 160 (correction)

1. Il n'existe que deux façons de partitionner $\{1\}$ donc $B_1 = 1$. De même, $\{1,2\}$ et $\{1\} \cup \{2\}$ sont les deux seules partitions de $\{1,2\}$ donc $B_2 = 2$. Enfin,

$$\{1,2,3\} = \{1,2\} \cup \{3\} = \{1,3\} \cup \{2\} = \{2,3\} \cup \{1\} = \{1\} \cup \{2\} \cup \{3\}$$

donne $B_3 = 5$.

2. On considère l'ensemble $E = \{1,2,\ldots,n+1\}$ et considère les partitions de E telles que la partie contenant $n+1$ possède $1 \leq k+1 \leq n$ éléments. À k fixé il y a $\binom{n}{k}$ façons de choisir une telle partie. Étant donné une partition $\mathcal{P} = \left\{E_1, \ldots, E_r\right\}$ telle que $n+1 \in E_r$ alors $\mathcal{P} \setminus \left\{E_r\right\}$ forme une partition de $E \setminus E_r$ qui est un ensemble à $n-k$ éléments. Il y a donc $\binom{n}{k} B_{n-k}$ partitions de E telles que la partie contenant $n+1$ possède $k+1$ éléments. On obtient alors, en faisant le changement de variable $k \leftrightarrow n-k$

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} B_k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

3. (a) On va montrer que le $\forall n \in \mathbb{N}, B_n \leq n!$ ce qui prouvera que $\dfrac{B_n}{n!} \leq 1$ et donc que le rayon de convergence de B est supérieur à celui de $\sum_{n\geq 0} x^n$ qui est 1 donc que B est bien définie sur $]-1,1[$. On a $B_0 = 1 \leq 0!$. Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall k \leq n, B_k \leq k!$. On a alors

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \leq n! \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{(n-k)!} \leq n! \times (n+1) = (n+1)!$$

ce qui conclut la récurrence.

(b) On a

$$\begin{aligned}
B'(x) &= \sum_{n=1}^{+\infty} B_n \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{+\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} && \text{(changement de variable)}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \frac{x^n}{n!} && \text{(formule d'Aitken)}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!} \frac{B_k x^k}{k!} && \text{(simplification et regroupement des termes)}\\
&= e^x B(x) && \text{(on a reconnu un produit de Cauchy)}
\end{aligned}$$

On obtient alors [7], $\forall x \in \mathbb{R}^+, \ln(B(x))' = \dfrac{B'(x)}{B(x)} = e^x$ donc il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\ln(B(x)) = e^x + c$ donc $B(x) = e^{e^x + c}$ mais $B(0) = 1 = e^{1+c}$ donc $c = -1$. Donc $B(x)$ coïncide avec $e^{e^x - 1}$ sur $\mathbb{R}^+$ et elles sont toutes les deux développables en séries entière sur $\mathbb{R}$ donc $\forall x \in \mathbb{R}, B(x) = e^{e^x-1}$.

(c) On a

$$\begin{aligned}
\frac{(K+k)!}{k!K!} &= \frac{(K+k)\cdots(k+1)}{K(K-1)\cdots 1} = \left(1+\frac{k}{K}\right)\left(1+\frac{k}{K-1}\right)\cdots(1+k)\\
&\geq \left(1+\frac{k}{K}\right)^K \geq \left(1+\frac{k}{K}\right)^n && \text{car } K \geq n
\end{aligned}$$

ce qui prouve bien que ce que $\dfrac{(K+k)!}{k!K!} \geq \dfrac{(K+k)^n}{K^n}$.

(d) On développe e^{e^x-1} en série entière pour pouvoir calculer B_n en identifiant les coefficients des deux séries. On a

$$\begin{aligned}
e^{e^x-1} &= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{e^{kx}}{k!}\\
&= \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{k^n x^n}{n!} \right) \frac{1}{k!}\\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} \right) \frac{x^n}{n!}
\end{aligned}$$

On en déduit, par identification, que $\forall n \in \mathbb{N}, B_n = \dfrac{1}{e} \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \dfrac{k^n}{k!}$. Enfin, pour $K \in \mathbb{N}$ tel que $\dfrac{K^n}{K!} \leq 1$ on a

$$\frac{1}{e} \sum_{k=K}^{+\infty} \frac{k^n}{k!} = \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(K+k)^n}{(K+k)!} \leq \frac{1}{e} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{k!} = 1$$

7. On se restreint aux réels positifs pour être sûr que $B(x) > 0$ et donc que son logarithme ait un sens.

donc $0 < B_n - \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{K-1}\frac{k^n}{k!} \leq 1$ puis $B_n - 1 \leq \frac{1}{e}\sum_{k=0}^{K-1}\frac{k^n}{k!} < B_n$. Ce qui prouve bien la formule voulue.

Référence : Analyse combinatoire - Charon, Hudry.

Exercice 161 (correction)

1. Puisque $p_{n,m}$ ne tend pas vers 0 on a $R \leq 1$. Par ailleurs, lorsqu'on écrit $n = s_1 + \cdots + s_m$ on a nécessairement $0 \leq s_i \leq n$ donc ce qui permet d'injecter les partitions de n en au plus m sommants dans $\{0, \ldots, n\}^m$ donc $p_{n,m} \leq (n+1)^m$ qui est polynomial en n donc $R \geq 1$.
2. On pose $A_{n,m} = \left\{ (s_1, \ldots, s_m) \in \mathbb{N}^m \;\middle|\; \begin{array}{c} s_1 + \cdots + s_m = n \\ 0 \leq s_1 \leq \cdots \leq s_m \end{array} \right\}$ et $B_{n,m} = \left\{ (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{N}^m \mid \alpha_1 + 2\alpha_2 + \cdots + m\alpha_m = n \right\}$. Par définition, $p_{n,m} = \#A_{n,m}$. On pose l'application $f : (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \mapsto (\alpha_m, \alpha_m + \alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_m + \alpha_{m-1} + \cdots + \alpha_1)$ de $B_{n,m}$ dans $A_{n,m}$ qui est bien définie est injective car elle peut être définie par la multiplication matricielle $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha_m \\ \alpha_{m-1} \\ \vdots \\ \alpha_1 \end{pmatrix}$ et la matrice est inversible car de déterminant 1. L'inverse de cette application est $f^{-1} : (s_1, \ldots, s_m) \mapsto (s_m - s_{m-1}, s_{m-1} - s_{m-2}, \ldots, s_1)$ qui est aussi bien défini. On a donc bien le résultat demandé.
3. Pour tout $|x| \leq 1$, $\frac{1}{1-x^s} = \sum_{k=0}^{+\infty} x^{sk} = \sum_{k=0}^{+\infty} \delta_{s,k} x^k$ avec $\delta_{s,k} = 1$ si $k \in s\mathbb{Z}$ et $\delta_{s,k} = 0$ sinon. En particulier on remarque que pour tout s et k on a $\delta_{s,k} = \delta_{s,s-k}$ ce qui facilite le calcul des produits. Donc
$$\begin{aligned}
\frac{1}{(1-x)(1-x^2)\cdots(1-x^m)} &= \prod_{s=1}^{m}\left(\sum_{k=0}^{+\infty} x^{sk}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{s_1+\cdots+s_m=n} \delta_{1,s_1}\cdots\delta_{m,s_m}\right)x^n \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{\alpha_1+2\alpha_2+\cdots+m\alpha_m=n} 1\right)x^n = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{B_{n,m}} 1\right)x^n. \\
&= \sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,m}x^n = S(x).
\end{aligned}$$
4. On s'intéresse désormais au cas $m = 3$.
   (a) En multipliant de part et d'autre part $(1-x)^3$ puis en évaluant en $x = 1$ on a $a = \frac{1}{2 \times 3} = \frac{1}{6}$. De même, en multipliant par $1 + x$ et en évaluant en $x = -1$ on a $b = \frac{1}{8}$. En multipliant par x et en prenant la limite on a $0 = \frac{1}{8} - \frac{17}{72} + c$ ce qui donne $x = \frac{1}{9}$ puis, en évaluant en $x = 0$ on a $1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{4} + \frac{17}{72} + \frac{1}{8} + d$ ce qui donne $d = \frac{2}{9}$.
   (b) Il s'agit maintenant de développer en série entière la fraction de droite et d'identifier avec les coefficients de la série de gauche à l'aide de l'unicité des coefficients du développement en série entière sur un intervalle non trivial. On y va terme par terme. On commence par les plus faciles
$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n \text{ et } \frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$$
   On remarque ensuite que $\frac{1}{(1-x)^2} = \left(\frac{1}{1-x}\right)'$ et $\frac{1}{(1-x)^3} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{1-x}\right)''$ ce qui permet d'obtenir les développement en série entière de ces deux fractions en dérivant terme à terme (par convergence normale sur tout compact des séries entières).

On a, après changement de variables,

$$\frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=0}^{+\infty}(n+1)x^n \text{ et } \frac{1}{(1-x)^3} = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{2}x^n.$$

Enfin, il reste à traiter $\dfrac{x+2}{x^2+x+1}$ que l'on développe en éléments simples dans $\mathbb{C}(X)$. On trouve

$$\frac{x+2}{x^2+x+1} = \frac{1}{1-j^2x} + \frac{1}{1-jx} = \sum_{n=0}^{+\infty}\left(j^{2n}+j^n\right)x^n$$

avec $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ et $j^2 = \overline{j}$ les racines de X^2+X+1. On a alors

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{+\infty} p_{n,3}x^n &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{(n+1)(n+2)}{12} + \frac{n+1}{4} + \frac{17}{72} + \frac{1}{8}(-1)^n + \frac{1}{9}\left(j^{2n}+j^n\right)\right)x^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{7}{72} + \frac{1}{8}(-1)^n + \frac{1}{9}\left(j^n+\overline{j^n}\right)\right)x^n.\end{aligned}$$

Lorsque n est un multiple de 3 on a $j^n + \overline{j^n} = 2$ et sinon $j^n + \overline{j^n} = -1$. Ceci permet d'obtenir :

Si n est pair, multiple de 3 $\;p_{n,3} = \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{7}{72} + \frac{1}{8} + \frac{2}{9} = \frac{1}{12}(n+3)^2 + \frac{1}{4}$.

Si n est pair, non multiple de 3 $\;p_{n,3} = \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{7}{72} + \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{1}{12}$.

Si n est impair, multiple de 3 $\;p_{n,3} = \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{7}{72} - \frac{1}{8} + \frac{2}{9} = \frac{1}{12}(n+3)^2$.

Si n est pair, non multiple de 3 $\;p_{n,3} = \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{7}{72} - \frac{1}{8} - \frac{1}{9} = \frac{1}{12}(n+3)^2 - \frac{1}{3}$.

Dans tous les cas on a $\left|p_{n,m} - \frac{1}{12}(n+3)^2\right| \le \frac{1}{3}$ or $p_{n,m}$ est un entier. C'est donc l'entier le plus proche de $\frac{1}{12}(n+3)^2$ (attention, il ne s'agit ni de la partie entière, ni de la partie entière supérieure).

Référence : Analyse combinatoire - Charon, Hudry.

Exercice 162 (correction)

Correction à venir.

Exercice 163 (correction)

1. Puisque les permutations alternées forment un sous-ensemble de $\mathfrak{S}_n$ on a la majoration de $T_{2p+1} \le (2p+1)!$ donc $\dfrac{T_{2p+1}}{(2p+1)!} \le 1$ donc le rayon de convergence R de T est supérieur à celui de $\sum x^n$ qui vaut 1.
2. L'entier $\sigma^{-1}(2p+1)$ est l'indice pour lequel σ vaut $2p+1$. Les valeurs atteintes en indice impair sont inférieures strictement aux valeurs prises par σ à l'indice précédent et à l'indice suivant. Puisque $2p+1$ est la valeur maximale prise par σ elle est forcément atteinte en un indice pair. On $T_1 = 1$ et $T_3 = 2$ car il y a seulement deux permutations alternées dans $\mathfrak{S}_3$ qui sont (2 3 1) et (1 3 2) (on doit nécessairement avoir 3 en indice 2 d'après ce qui vient d'être dit).

3. On considère une permutation alternée σ et j telle que $\sigma(2j) = 2p+1$. Les valeurs prises à gauche $\sigma(1) < \sigma(2) > \cdots > \sigma(2j-1)$ respectent l'alternance tout comme celles de droite $\sigma(2j+1) < \sigma(2j+2) > \cdots > \sigma(2p+1)$. On note S_g les valeurs de gauche et S_d celles de droite. En faisant correspondre bijectivement S_g avec $\{1,\ldots,2j-1\}$ et S_d avec $\{1,\ldots,2p-2j+1\}$ en respectant l'ordre on fait correspondre à σ deux permutations alternée σ_g et σ_d de $\mathfrak{S}_{2j-1}$ et $\mathfrak{S}_{2p-2j+1}$. Réciproquement, en choisissant $2j-1$ éléments dans $\{1,\ldots,2p\}$ (les valeurs S_g) ce qui fixe les $2p-2j+1$ restantes (les valeurs de S_d) et en choisissant deux permutations alternée $\sigma_g \in \mathfrak{S}_{2j-1}$ et $\sigma_d \in \mathfrak{S}_{2p-2j+1}$ on peut bien reconstruire une unique permutation alternée $\sigma \in \mathfrak{S}_{2p+1}$. On a $\binom{2p}{2j-1}$ façons de choisir les valeurs de S_g puis T_{2j-1} façons de choisir σ_g et $T_{2p-2j+1}$ façons de choisir σ_d. En sommant sur l'indice auquel apparaît $2p+1$ on obtient avec le changement de variable $q = p - j$
$$T_{2p+1} = \sum_{j=1}^{p} \binom{2p}{2j-1} T_{2j-1} T_{2p-2j+1} = \sum_{q=0}^{p-1} \binom{2p}{2q+1} T_{2q+1} T_{2p-2q-1}.$$
On en déduit que $T_5 = \binom{4}{1} T_1 T_3 + \binom{4}{3} T_3 T_1 = 16$.
4. On peut dériver dans la somme par convergence normale sur tout compact des séries entières
$$T'(x) = \sum_{p=0}^{+\infty} T_{2p+1} \frac{x^{2p}}{(2p)!}$$
Or, en remarquant que lorsque j est impair pour tout k soit k soit $j-k$ est pair, on a le produit de Cauchy suivant :
$$T(x)^2 = \sum_{j=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{j} \frac{T_k}{k!} \frac{T_{j-k}}{(j-k)!} \right) x^j = \sum_{p=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{2p} \binom{2p}{k} T_k T_{2p-k} \right) \frac{x^{2p}}{(2p)!} = \sum_{p=1}^{+\infty} \left(\sum_{q=0}^{p-1} \binom{2p}{k} T_{2q+1} T_{2p-2q-1} \right) \frac{x^{2p}}{(2p)!} = T'(x) - 1$$
l'avant dernière égalité étant obtenue en sommant les T_k pour k impair ce qui élimine aussi le cas $p = 0$ pour lequel on a seulement l'indice $k = 0$.
5. Soit y une solution de l'équation. On a alors $(\operatorname{Arctan}(y))' = \dfrac{y'}{y^2+1} = 1$. Ceci implique qu'il existe $c \in \mathbb{R}$ tel que $\operatorname{Arctan}(y) = x + c$, i.e. $y(x) = \tan(x+c)$. Puisque $T(0) = 0$ on peut prendre $c = 0$. On a donc $\forall x \in \left]-R, R\right[, T(x) = \tan(x)$.

Référence : Analyse combinatoire - Charon, Hudry.

7. Séries numériques - corrections

Exercice 164 (correction)

Grâce à l'expression $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1+\frac{a}{n}\right)}$ on obtient l'expression $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n = e^a - \frac{a^2}{2n}e^a + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ à l'aide de développements limités à l'ordre 2. En sommant, on obtient alors
$$u_n = \left(1 - \frac{a^2}{2}\right) e^a \cdot \frac{1}{n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{\text{terme général d'une série convergente}}$$

On en déduit que la série de terme général converge si et seulement si la série de terme général $\left(1-\frac{a^2}{2}\right)e^a\cdot\frac{1}{n}$ converge ce qui est le cas seulement si $\left(1-\frac{a^2}{2}\right)e^a=0$, i.e. $a^2=2$ donc $a\in\left\{-\sqrt{2},\sqrt{2}\right\}$.

> ⚠ Cet exercice est une excellente illustration du fait qu'on ne peut pas brutalement sommer des équivalents. En effet, si malgré les recommandations des professionnels vous vous y risquez, puisque $\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ tend vers e^a on aurait $u_n\sim\frac{1}{n}\cdot e^a$ qui n'est jamais le terme général d'une série convergente.

Astuce

Comme vous pouvez le constater j'utilise le développement limité $e^u = u+O(u^2)$ qui est une sorte d'hybride entre le développement à l'ordre 1 qui est $e^u=u+o(u)$ et celui à l'ordre 2 qui est $e^u=u+\frac{u^2}{2}+o(u^2)$. L'avantage de cette écriture est qu'elle est aussi compacte qu'un développement à l'ordre 1 mais donne plus d'information. Pour vous en convaincre essayez de refaire l'exercice en faisant des développements à l'ordre 1 (vous devriez échouer puisqu'on a un $o\left(\frac{1}{n}\right)$ à la fin qui ne nous permet pas de conclure) et en faisant des développements à l'ordre 2 (vous devriez réussir mais avec des calculs beaucoup plus pénibles car vous traînerez des termes d'ordre 2 qui se contenteraient bien volontiers de rester sous forme de $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$).

Exercice 165 (correction)

Pour $n\geq 2, n-1$ et n sont premiers entre eux donc $n(n-1)\mid \mathrm{ppcm}(1,2,\dots,n)$ donc $\frac{1}{\mathrm{ppcm}(1,\dots,n)}\leq\frac{1}{n(n-1)}\sim\frac{1}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente. Par positivité notre série converge.

Exercice 166 (correction)

Si $\alpha\geq 1$ la suite ne tend pas vers 0 et donc la série de terme générale (u_n) ne converge pas.

Si $0<\alpha<1$ on utilise la définition générale de l'exponentiation pour un exposant non entier $u_n=\alpha^{\sqrt{n}}=e^{\sqrt{n}\ln\alpha}$. On remarque alors que $n^2u_n\to 0$ par croissance comparée ce qui prouve que $\sum u_n$ converge (pour faire proprement la croissance comparée poser $N=-\sqrt{n}\cdot\ln\alpha$).

Exercice 167 (correction)

On fait des développements limités successifs. On a $\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)=1-\frac{1}{n^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)$ puis

$$\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)=\ln\left(1-\frac{1}{n^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)\right)=-\frac{1}{n^{2\alpha}}+O\left(\frac{1}{n^{4\alpha}}\right)\sim-\frac{1}{n^{2\alpha}}$$

Puisque $-\frac{1}{n^{2\alpha}}$ **est de signe constant** il s'agit du terme général d'une série de même nature que $\ln\left(\cos\left(\frac{1}{n^\alpha}\right)\right)$. Cette dernière converge donc si et seulement si $\alpha>\frac{1}{2}$.

Exercice 168 (correction)

On remarque que la fonction f définie par $f(x)=\sqrt{1+x}-1$ laisse l'intervalle $[0,1]$ invariant et est croissante et continue sur cet intervalle. On en déduit que (u_n) est monotone et bornée donc qu'elle converge vers un point fixe de f. La fonction f a deux points fixes -1 et 0 et seul 0 appartient à $[0,1]$ donc $\lim u_n = 0$. On peut alors faire un développement limité de u_{n+1} qui donne $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n} - 1 = 1 + \frac{u_n}{2} + O\left(u_n^2\right) - 1 = \frac{u_n}{2} + O\left(u_n^2\right)$. On a alors $\lim \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} < 1$ et la règle de D'Alembert nous permet de conclure que $\sum u_n$ converge.

Exercice 169 (correction)

L'idée est de considérer la suite $S_{2N} - S_N$ où $S_N = \sum\limits_{n=1}^{N} \frac{\sigma(n)}{n^2}$, la suite des sommes partielles. On a alors

$$S_{2N} - S_N = \sum_{n=N+1}^{2N} \frac{\sigma(n)}{n^2} \geq \frac{1}{4N^2} \sum_{n=N+1}^{2N} \sigma(n).$$

On remarque ensuite que $\sum\limits_{n=N+1}^{2N} \sigma(n) \geq \sum\limits_{n=1}^{N} n = \frac{N(N+1)}{2}$. En effet, il s'agit d'une somme de N entiers distincts. On peut alors conclure que $S_{2N} - S_N \geq \frac{N(N+1)}{8N^2} \sim \frac{1}{8}$. On en déduit que notre série diverge (si elle convergeait on aurait $S_{2N} - S_N$ qui tendrait vers 0).

Exercice 170 (correction)

1. On vérifie tout d'abord que la fonction $x \mapsto x \cdot (1-x)$ définie sur $[0;1]$ est bien à valeurs dans $[0;1]$. On a $0 \leq x \leq 1$ et $0 \leq 1-x \leq 1$ donc en multipliant les deux inégalités on a bien $0 \leq f(x) \leq 1$. On en déduit par récurrence que pour tout n on a $0 \leq u_n \leq 1$. Notre suite est donc bornée est $u_{n+1} - u_n = -u_n^2 \leq 0$ donc elle est décroissante et minorée donc converge vers un point fixe de f. Le seul point fixe de f est 0 donc (u_n) tend bien vers 0.
2. On a
$$\begin{aligned} \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} &= \frac{1}{u_n} \cdot \left(\frac{1}{1-u_n} - 1\right) \\ &= \frac{1}{1-u_n} \longrightarrow 1 \end{aligned}$$
Donc $\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \sim 1$.
3. La suite (1) est le terme général d'une série divergente. On en déduit que
$$\sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k}\right) \sim \sum_{k=0}^{n-1} 1 = n.$$
Par télescopage $\sum\limits_{k=0}^{n-1} \left(\frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n}\right) = \frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \sim \frac{1}{u_n} \sim n$. Donc $u_n \sim \frac{1}{n}$. Il s'agit donc du terme général d'une série divergente.

Exercice 171 (correction)

1. On a $S_N = \sum_{n=1}^{N} u_{n+1} - u_n = u_{N+1} - u_1$ par téléscopage ce qui répond à la question.
2. La question précédente nous suggère de nous intéresser à la série de terme général $u_{n+1} - u_n$. Lorsqu'on voit une différence de deux racines c'est souvent un bon réflexe de passer à la forme conjuguée pour faire disparaître les racines
$$u_{n+1} - u_n = \frac{(u_{n+1} - u_n)(u_{n+1} + u_n)}{u_{n+1} + u_n} = \frac{1 + \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n + \sqrt{n+1}}} - 1 - \sqrt{2 + \cdots + \sqrt{n}}}{u_{n+1} + u_n}$$

Les 1 se simplifient et on retrouve une différence de racines. On remarque qu'en réitérant le procédé les deux vont se simplifier. En somme on simplifie considérablement le numérateur en rajoutant des termes au dénominateur.

$$u_{n+1}-u_n=\frac{\sqrt{n+1}}{\left(\sqrt{1+\cdots+\sqrt{n+1}}+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{n}}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n+1}}+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}\right)\cdots\left(\sqrt{n+\sqrt{n+1}}+\sqrt{n}\right)}$$

Il ne nous reste alors plus qu'à minoré le numérateur pour obtenir un grand O du terme général de notre série. On a les minorations grossières mais suffisantes

$$\sqrt{k+\sqrt{k+1+\ldots\sqrt{n}}}\geq\sqrt{\sqrt{\underbrace{\ldots}_{n-k\text{ fois}}\sqrt{n}}}=n^{\frac{1}{2^{n-k}}}\geq n^{\frac{1}{2^{n+1-k}}}\text{ et }\sqrt{k+\sqrt{k+1+\ldots\sqrt{n+1}}}\geq(n+1)^{\frac{1}{2^{n+1-k}}}\geq n^{\frac{1}{2^{n+1-k}}}$$

On en déduit que

$$\left(\sqrt{1+\cdots+\sqrt{n+1}}+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{n}}\right)\cdot\left(\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n+1}}+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{n}}\right)\cdots\left(\sqrt{n+\sqrt{n+1}}+\sqrt{n}\right)\geq 2^n\prod_{k=1}^{n}n^{\frac{1}{2^k}}$$

or

$$\prod_{k=1}^{n}n^{\frac{1}{2^k}}=n^{\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}}\geq\sqrt{n}.$$

Donc $u_{n+1}-u_n\leq\frac{\sqrt{n+1}}{2^n\sqrt{n}}=O\left(\frac{1}{2^n}\right)$ donc la série converge donc u_n converge.

Je mentionne l'existence d'une autre méthode qui ne fait pas intervenir les séries. On peut poser $v_n=\sqrt{1+\sqrt{1+\cdots+\sqrt{1}}}$, i.e. $v_1=1$ et $v_{n+1}=f(v_n)$ avec $f(x)=\sqrt{1+x}$. On peut montrer que v_n tend vers $\varphi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ (exercice) puis que

$$v_n\leq u_n\leq 2v_n$$

(exercice) ce qui permet de conclure que (u_n) converge puisqu'elle est croissante et majorée. On peut même majorer u_n par $2^{1/4}v_n$ ce qui donne une encore meilleure majoration de la limite.

Exercice 172 (correction)

Remarquons tout d'abord que si $\deg P\neq\deg Q$ alors $\frac{P(n)}{Q(n)}$ tend soit vers 0 soit vers ∞ donc $\ln\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|$ ne tend pas vers 0 et notre série diverge grossièrement. On suppose donc que $\deg P=\deg Q=d$ et on note $P=a_dX^d+\cdots+a_0$ et $Q=b_dX^d+\cdots+b_0$.

Une condition nécessaire pour que la série converge est que $\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|\to 1$ or $\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|\sim\left|\frac{a_d}{b_d}\right|$ i.e. $|a_d|=|b_d|$. Quitte à factoriser au numérateur par a_d et au numérateur par b_d on peut supposer que les polynômes P et Q sont unitaires.

On va ensuite effectuer des développements limités pour conclure. On a

$$\frac{P(n)}{Q(n)}=\frac{P(n)}{n^d}\cdot\frac{1}{1+\underbrace{\left(Q(n)/n^d-1\right)}_{\to 0}}=\frac{P(n)}{n^d}\cdot\left(1-\underbrace{(Q(n)/n^d-1)}_{=\frac{b_{d-1}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\qquad\text{(On utilise }\frac{1}{1+u}=1-u+O(u^2))$$

$$=\left(1+\frac{a_{d-1}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)\cdot\left(1-\frac{b_{d-1}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\right)=1+\frac{a_{d-1}-b_{d-1}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

$$\ln\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|=\frac{a_{d-1}-b_{d-1}}{n}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)\qquad\text{(On utilise }\ln(1+u)=u+O(u^2)).$$

Le $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ quoiqu'il contienne est le terme général d'une série convergente. Quant au $\frac{a_{d-1}-b_{d-1}}{n}$ c'est le terme général d'une série convergente si et seulement si $a_{d-1} = b_{d-1}$. En conclusion, la série $\sum_{n\geq 0} \ln\left|\frac{P(n)}{Q(n)}\right|$ converge si, et seulement si les deux conditions suivantes sont réalisées :

— $\deg P = \deg Q$

— $|a_d| = |b_d|$ et $b_d a_{d-1} = a_d b_{d-1}$.

Astuce

Comme vous pouvez le constater j'utilise le développement limité $\ln(1+u) = u + O(u^2)$ qui est une sorte d'hybride entre le développement à l'ordre 1 qui est $\ln(1+u) = u + o(u)$ et celui à l'ordre 2 qui est $\ln(1+u) = u - \frac{u^2}{2} + o(u^2)$. L'avantage de cette écriture est qu'elle est aussi compacte qu'un développement à l'ordre 1 mais donne plus d'information. Pour vous en convaincre essayez de refaire l'exercice en faisant des développements à l'ordre 1 (vous devriez échouer puisqu'on a un $o\left(\frac{1}{n}\right)$ à la fin qui ne nous permet pas de conclure) et en faisant des développements à l'ordre 2 (vous devriez réussir mais avec des calculs beaucoup plus pénibles car vous traînerez des termes d'ordre 2 qui se contenteraient bien volontiers de rester sous forme de $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$).

Exercice 173 (correction)

On a l'encadrement $0 \leq x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \leq 1$ donc l'intégrande est bien intégrable en 0 et elle est continue par morceaux.

Grâce à la relation de Chasles on écrit

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \mathrm{d}x\,.$$

Pour $\frac{1}{k+1} < x \leq \frac{1}{k}$ on a $k \leq \frac{1}{x} < k+1$ donc $\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor = k$. On a alors

$$\int_{\frac{1}{n+1}}^{1} x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} k\int_{\frac{1}{k+1}}^{\frac{1}{k}} x\,\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^{n} k\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k^2} - \frac{1}{(k+1)^2}\right) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{2k+1}{k(k+1)^2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k(k+1)}$$

la dernière ligne étant obtenue en séparant écrivant le numérateur $2k+1 = k + (k+1)$. Par ailleurs $\frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ ce qui donne, par un télescopage puis un changement de variable,

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2} + \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(k+1)^2}\right) + 1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=2}^{n+1}\frac{1}{k^2}\right) + 1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\left(\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k^2}\right) - \frac{1}{n+1}\right).$$

En prenant la limite on a alors

$$\int_0^1 x\left\lfloor\frac{1}{x}\right\rfloor \mathrm{d}x = \frac{\pi^2}{12}.$$

Exercice 174 (correction)

La fonction f définie sur $\mathbb{R}^+$ par $f(x) = \ln(1+x)$ est stable sur cet intervalle donc (u_n) est bien définie et à valeurs positives. Par ailleurs, par concavité de f son graphe se situe sous sa tangente en 0 qui est $y = x$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = \ln(1+u_n) \leq u_n$. La suite u est donc décroissante et minorée par 0 donc converge vers une limite ℓ qui vérifie $\ell = f(\ell)$ par continuité de f.

L'équation $\ell = \ln(1+\ell)$ a pour unique solution $\ell = 0$ par stricte concavité de f. On en déduit que u converge vers 0. Ceci nous permet de faire un développement limité de $u_{n+1} = \ln(1+u_n) = u_n - \frac{u_n^2}{2} + o\left(u_n^2\right) = u_n\left(1 - \frac{u_n}{2} + o\left(u_n\right)\right)$. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, on va chercher α de telle sorte que $u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha$ converge.

$$\begin{array}{rrl}
 & u_{n+1}^\alpha & = u_n^\alpha\left(1 - \frac{u_n}{2} + o\left(u_n\right)\right)^\alpha \\
DL_1 \text{ de } (1+x)^\alpha & u_{n+1}^\alpha & = u_n^\alpha\left(1 - \frac{\alpha u_n}{2} + o\left(u_n\right)\right) \\
\text{donc} & u_{n+1}^\alpha - u_n^\alpha & = -\frac{\alpha u_n^{1+\alpha}}{2} + o\left(u_n^{1+\alpha}\right) \\
(\text{pour } \alpha = -1) & \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} & = \frac{1}{2} + o(1) \\
\text{donc} & \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} & \sim \frac{1}{2}
\end{array}$$

Puisque la série des $\frac{1}{2}$ diverge (grossièrement) on a

$$\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{u_{n+1}} - \frac{1}{u_n} \sim \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{2} = \frac{n}{2}$$

Donc par télescopage $\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_0} \sim \frac{1}{u_n} \sim \frac{n}{2}$ donc $u_n \sim \frac{2}{n}$ qui est positif et le terme général d'une série divergente d'après le critère de Riemann donc $\sum u_n$ diverge.

8. *Intégrales impropres et intégrales à paramètre - corrections*

Exercice 175 (correction)

En $+\infty$, $\frac{1}{t^2} \to 0$ donc on peut utiliser un équivalent. On a alors $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right) \sim \frac{1}{t^2}$ de signe constant localement. Donc $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ intégrable en $+\infty$. En 0, $\sin\left(\frac{1}{t^2}\right)$ est bornée sur l'intervalle borné $]0;1]$ donc son intégrale converge.

Exercice 176 (correction)

On utilise le développement à l'ordre 2 du cos en 0. On a $\cos(x^\alpha) = 1 + x^{2\alpha} + o(x^{3\alpha})$ ce qui donne

$$\frac{1}{\cos\left(t^\alpha\right) - 1} = \frac{1}{x^{2\alpha}(1 + o(x^\alpha))} \sim \frac{1}{x^{2\alpha}}$$

qui converge si et seulement si $2\alpha < 1$ donc $\alpha < \frac{1}{2}$.

Exercice 177 (correction)

On a $\frac{1}{\ln(1+t)} \sim \frac{1}{t}$ de signe constant et d'intégrale divergente en 0 donc notre intégrale diverge.

Exercice 178 (correction)

La fonction $f : t \mapsto \frac{\ln t}{1+t^2}$ est de signe constant localement aux bornes de l'intervalle d'étude donc on peut utiliser des o, O et équivalents pour déterminer son intégrabilité. On a $\sqrt{t}\frac{\ln t}{1+t^2} \sim \sqrt{t}\ln(t) \underset{0}{\to} 0$ donc $\frac{\ln t}{1+t^2} = o\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ donc f intégrable en 0. Par ailleurs, $t^{3/2}f(t) \sim \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} \underset{+\infty}{\to} 0$ donc $f(t) = o\left(\frac{1}{t^{3/2}}\right)$ donc est intégrable en l'infini. En faisant le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ on obtient $\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt = -\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}dt$ donc l'intégrale est nulle.

Exercice 179 (correction)

On peut faire les développements limités suivants en $+\infty$

$$\ln\left(\cos\frac{1}{t}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right)\right) \qquad = -\frac{1}{t^2} + O\left(\frac{1}{t^4}\right)$$

dont l'intégrale converge car localement de signe constant.

Pour l'autre borne on peut faire le changement de variable $u = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{t}$ qui ramène au problème équivalent de l'étude de

$$\int_0^{\pi/2} \ln\left(\underbrace{\cos\left(\frac{\pi}{2} - u\right)}_{=\sin u}\right)\frac{1}{\left(\frac{\pi}{2} - u\right)^2}du$$

en 0. On a $\ln(\sin u) = \ln(u + o(u)) = \ln(u) + o(1)$ qui converge (car $\sqrt{u}\ln u \to 0$ par exemple).

Exercice 180 (correction)

Aucun problème en 0. Pour l'étude en $+\infty$ on fait le changement de variable $u = t^2$ (bijectif et C^1 sur $\mathbb{R}^+$) qui ramène à l'étude de la convergence en $+\infty$ de l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin u}{2\sqrt{u}}du.$$

On n'est toujours pas sorti d'affaire mais presque. Pour prouver que l'intégrale converge on peut soit utiliser la règle d'Abel (hors programme donc il faut savoir la redémontrer) soit on peut s'en sortir avec une intégration par partie en remarquant que l'intégrale de $\left(\frac{1}{\sqrt{u}}\right)'$ sera convergente. On intègre donc par partie en posant $U = \frac{1}{\sqrt{u}}$ et $V' = \sin(u)$ (on enlève le 2 au dénominateur qui ne nous embête pas pour étudier la convergence). On a alors

$$\int_0^x \frac{\sin u}{\sqrt{u}}du = \left[\frac{1-\cos u}{\sqrt{u}}\right]_0^x + \int_0^x \frac{1-\cos u}{2u^{3/2}}du = \frac{1-\cos x}{\sqrt{x}} + \int_0^x \frac{1-\cos u}{2u^{3/2}}du.$$

Le premier terme tend vers 0 en l'infini et le second converge car l'intégrale est absolument convergente. Attention au fait qu'on doit choisir $V = 1 - \cos u$ comme primitive de $\sin u$ pour que $\lim_0 UV \neq \infty$.

Exercice 181 (correction)

On peut écrire

$$\frac{t}{e^t-1}=\frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}=te^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}te^{-(n+1)t}.$$

Par ailleurs, pour tout n la fonction $te^{-(n+1)t}$ est intégrable sur $[0,+\infty[$ (car c'est un $O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ par exemple). De plus, en intégrant par partie pour éliminer le t, on a

$$\int_0^{+\infty}te^{-(n+1)t}dt=\left[\frac{-t}{n+1}e^{-(n+1)t}\right]_0^{+\infty}+\frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)t}dt=\frac{1}{(n+1)^2}.$$

Puisque $f_n(t)=te^{-(n+1)t}$ est positive et que son intégrale est le terme général d'une série convergente l'inversion série-intégrale est légale. On a donc

$$\int_0^{+\infty}\frac{t}{e^t-1}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\int_0^{+\infty}te^{-(n+1)t}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(n+1)^2}=\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 182 (correction)

Pas de problème de convergence en 0 et en $+\infty$ notre fonction est équivalence à e^{-t} positive et d'intégrale convergente donc tout converge bien. On a par ailleurs $\frac{1}{e^t+1}=e^{-t}\frac{1}{1+e^{-t}}$ et $e^{-t}<1$ pour $t>0$ donc on a le développement suivant $e^{-t}\frac{1}{1+e^{-t}}=e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^ne^{-nt}=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^ne^{-(n+1)t}$ dont le terme général est intégrable en valeur absolue donc on peut faire l'inversion série intégrale ce qui donne

$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{1+e^t}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n\int_0^{+\infty}e^{-(n+1)t}dt=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1}=\ln(2).$$

Exercice 183 (correction)

1. Le seul problème qu'on peut rencontrer est en 0 car en $\pi/2$ la limite est finie. Si on se refuse de composer des équivalents (bien que ce soit légal pour le ln) on a

$$\ln(\sin t)=\ln(t+o(t))=\ln(t(1+o(1))=\ln(t)+\ln(1+o(1))=\ln(t)+o(1)$$

   qui est intégrable (car $\sqrt{t}\ln(t)\to 0$ par exemple).

2. (a) Changement de variables $u=\pi/2-t$.

   (b) On a

$$2I=I+J=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(t)\cos(t))dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\left(\frac{1}{2}\sin(2t)\right)dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(2t))dt-\frac{\pi}{2}\ln(2).$$

   Le changement de variable $u=2t$ donne alors

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(2t))dt=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\ln(\sin(u))du=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin(u))du=I$$

   la dernière égalité provenant du fait que $x=\pi/2$ est un axe de symétrie de $\sin t$ et donc de $\ln(\sin(t))$ sur $]0;\pi[$. Au final $I=-\frac{\pi}{2}\ln(2)$.

Exercice 184 (correction)

1. Fixons n. On a $\frac{e^{nt}}{(1+e^t)^{n+1}} \sim e^{-t}$ qui est intégrable **et positive**. Donc I_n converge bien.
2. On fait une intégration par parties avec $u' = e^{nt}$ ("donc" $u = \frac{1}{n}e^{nt}$) et $v = \frac{1}{(1+e^t)^{n+1}}$ (donc $v' = \frac{-(n+1)e^t}{(1+e^t)^{n+2}}$). On a alors
$$I_n = \left[\frac{1}{n}e^{nt}\frac{1}{(1+e^t)^{n+1}}\right]_0^{+\infty} + \frac{n+1}{n}\int_0^{+\infty}\frac{e^{(n+1)t}}{(1+e^t)^{n+2}}dt.$$
Ce qui donne $I_n = -\frac{1}{n2^{n+1}} + \frac{n+1}{n}I_{n+1}$. Il suffit alors de considérer cette relation au rang $n-1$.
3. On a $J_n = \frac{1}{2^n} + J_{n-1}$.
4. Soit on remarque que $J_0 = 0 \cdot I_0 = 0$ donc $J_1 = 1/2$. Sinon par le calcul direct on a $J_1 = \int_0^{+\infty} \frac{e^t}{(1+e^t)^2}dt = \int_0^{+\infty}\frac{u'}{u^2}dt$ avec $u = 1+e^t$ donc une primitive est $\frac{-1}{u}$ donc
$$J_1 = \left[\frac{-1}{1+e^t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{2}.$$
Par téléscopage on a $J_n - J_1 = \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^k}$ donc $J_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k} = \frac{1-\frac{1}{2^{n+1}}}{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2^n}$.
5. Immédiat.
6. **Méthode 1 :** En faisant le changement de variables $u = e^t$ on a $I_0 = \int_1^{+\infty}\frac{1}{u(u+1)}du = \left[\ln\left(\frac{u}{u+1}\right)\right]_1^{+\infty} = \ln(2)$.

   Méthode 2 : En écrivant $\frac{1}{1+e^t} = e^{-t}\frac{1}{1+e^{-t}} = e^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n e^{-nt}$ et en faisant soigneusement une inversion série intégrale on obtient $I_0 = \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n+1} = \ln(2)$.

Exercice 185 (correction)

On pose $g_n(t) = \frac{ntf\left(\frac{t}{n}\right)}{(1+t^2)^2}$. La fonction f est continue en 0 donc pas de problème d'intégrabilité en cette borne. Puisque f est bornée c'est un $O(1)$. Donc on a $\frac{ntf\left(\frac{t}{n}\right)}{(1+t^2)^2} = O\left(\frac{t}{(1+t^2)^2}\right)$ lorsque $t \to +\infty$ qui est intégrable car $O\left(\frac{1}{t^4}\right)$ elle même intégrable par le critère de Riemann.

Puisque f est C^1 en 0 on a $f(u) = f'(0)u + o(u) = f'(0)u + u\varepsilon(u)$ avec $\underset{u\to 0}{\varepsilon(u) = 0}$. En appliquant cela à t **fixé** pour n grand on a $\lim g_n(t) = g(t) = \frac{f'(0)t^2}{(1+t^2)^2}$. On a donc la convergence simple de la suite (g_n) mais ça ne suffit pas.

On veut réussir à dominer g_n indépendamment de n. Pour cela on aimerait montrer qu'il existe $M > 0$ tel que $f(x) \leq Mx$. Puisque f est supposée bornée $\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = 0$, i.e. il existe $x_0 \in \mathbb{R}^+$ tel que $\forall x \geq x_0, |f(x)| \leq x$ (définition de la limite avec $\varepsilon = 1$). Par ailleurs, la fonction f est C^1 sur le segment $[0, x_0]$ donc, avec M' un majorant de $f'_{|[0,x_0]}$ par le théorème des accroissements finis appliqué à l'intervalle $[0, x]$ on a $|f(x) - f(0)| \leq M'(x-0)$, i.e. $|f(x)| \leq M'x$. Avec $M = \max M', 1$ on a bien $\forall x \in \mathbb{R}^+, |f(x)| \leq Mx$. On en déduit que
$$g_n(t) \leq \frac{Mt^2}{(1+t^2)^2}$$
et cette dernière fonction est indépendante de n et intégrable on peut donc appliquer le théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Il ne reste plus qu'à calculer la limite. On fait une intégration par partie de $\int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{(1+t^2)^2} dt$ avec $u = t$ et $v' = \frac{2t}{(1+t^2)^2}$ qui se primitive en $\frac{-1}{1+t^2}$ (en effet, v' de la forme $\frac{U'}{U^2}$). Cela donne

$$\int_0^{+\infty} \frac{2t^2}{\left(1+t^2\right)^2} dt = \underbrace{\left[\frac{-t}{1+t^2}\right]_0^{+\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt}_{=\frac{\pi}{2}\text{ (car primitive Arctan)}} .$$

On peut enfin conclure que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} \frac{ntf\left(\frac{t}{n}\right)}{\left(1+t^2\right)^2} dt = \frac{\pi}{4} f'(0).$$

Exercice 186 (correction)

En appliquant le changement de variable $y = xn$ on a $\int_0^{+\infty} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f\left(\frac{y}{n}\right)}{1+y^2} dy$. Il s'agit donc simplement de justifier l'inversion limite intégrale. Par hypothèse $\exists M \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R}^+, f(x) \leq M$ donc l'intérieur de l'intégrale est dominé par $\frac{M}{1+y^2}$ qui est intégrable et ne dépend pas de M donc $\lim_{n\to\infty} \int \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \int_0^{+\infty} \frac{f(0)}{1+y^2} dy = f(0)\frac{\pi}{2}$.

Exercice 187 (correction)

On pose $g(x,t) = \cos(x\sin(t))$

1. Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé $t \mapsto g(x,t)$ est continue sur le segment $[0;\pi]$ donc intégrable.
2. On a bien à t fixé $x \mapsto g(x,t)$ de classe C^∞ et toutes les conditions de continuité par morceaux des dérivées partielles $\frac{\partial g}{\partial x}$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}$ en t. On a en plus la domination $\left|\frac{\partial g}{\partial x}(x,t)\right| \leq 1$ donc on peut dériver sous le signe intégral, i.e.

$$f'(x) = -\int_0^\pi \sin(t)\sin(x\sin(t))\,\mathrm{dt}$$
$$f''(x) = -\int_0^\pi \sin^2(t)\cos(x\sin(t))\,\mathrm{dt}\,.$$

3. On a $\frac{\partial h}{\partial t}(x,t) = -\sin(t)\sin(x\sin(t)) + x\cos^2(t)\cos(x\sin(t))$.
4. En remplaçant $\sin^2(t)$ par $1-\cos^2(t)$ dans l'expression de $xf''(x)$ on a

$$xf''(x) + f'(x) + xf(x) = \int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x,t)\,\mathrm{dt} = [h(x,t)]_0^\pi = 0.$$

5. Avec $g(x) = \sum_0^\infty a_n x^n$ solution de E, puisqu'une série entière converge normalement sur son disque ouvert de convergence on peut dériver terme à terme et on a

$$xg''(x) + g'(x) + xg(x) = a_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(a_{n-1} + (n+1)^2 a_{n+1})x^n = 0.$$

Par unicité du développement en série entière sur le disque de convergence on a bien $a_1 = 0$ et $\forall n \geq 2, a_n = \frac{-a_{n-2}}{n^2}$.

6. On a $\forall u \in \mathbb{R}, \cos(u) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ donc, sous réserve de pouvoir intervertir série et intégrale on a
$$f(x) = \int_0^\pi \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n} \sin(t)^{2n} \,\mathrm{dt} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} W_n x^{2n}$$
Puisqu'on a $\int_0^\pi \left| \frac{(-1)^n}{(2n)!} \sin^{2n}(t) \right| \mathrm{dt} \leq \frac{\pi}{(2n)!}$ par la majoration $\sin^{2n}(t) \leq 1$ sur $[0;\pi]$ et que $\frac{\pi}{(2n)!}$ est le terme général d'une série entière de rayon de convergence infinie alors l'interversion est bien légale et le rayon de convergence du développement de f au voisinage de 0 est infini.
7. On remarque qu'une solution g développable en série entière au voisinage de 0 a ses coefficients totalement déterminés par $g(0) = a_0$. En effet, la relation de récurrence donne $a_{2n+1} = 0$ pour tout n inconditionnellement à cause de la condition $a_1 = 0$ et de même les termes d'indice pair son fixés par le choix de a_0. Donc f est bien l'unique solution satisfaisant $f(0) = \pi$ sur son disque de convergence qui est $\mathbb{R}$.
8. En considérant les premiers termes de a_{2n} vérifiant la relation de récurrence
$$\begin{cases} a_0 & = \pi \\ a_1 & = 0 \\ a_n & = \frac{-a_{n-2}}{n^2}, \forall n \geq 2 \end{cases}$$
on prouve facilement par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}, a_{2n+1} = 0$ et $a_{2n} = (-1)^n \frac{\pi}{2^{2n}(n!)^2}$. En identifiant a_{2n} à $(-1)^n \frac{W_n}{(2n)!}$ grâce à la question 6) on a
$$\forall n \in \mathbb{N}, W_n = \pi \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}.$$

Exercice 188 (correction)

1. À x fixé la fonction $t \mapsto \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est un $O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ en $+\infty$ et $\sim x$ en 0 donc elle est bien intégrable aux bornes.
Ensuite, on a $f(x,t) = \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{t(1+t^2)}$ est bien C^1 par rapport à x et sa dérivée est $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)}$ qui est bien continue par morceaux. Enfin, l'inégalité $\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} \leq \frac{1}{1+t^2}$ fournit une domination qui permet d'intervertir dérivée et intégrale. On en déduit que
$$g'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} dt.$$
En faisant un développement en éléments simples (remarquez que par parité il n'y a pas de termes en x et on obtient les termes constants par un système en remplaçant x par 0 pour obtenir une équations puis en multipliant par t^2 puis la limite en $+\infty$ pour la seconde) on trouve la relation pour tout $x \neq 1$
$$\frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} = \frac{x^2}{x^2-1} \cdot \frac{1}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{1+t^2}.$$
On a alors
$$\begin{aligned} g'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{(1+x^2t^2)(1+t^2)} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{x^2}{x^2-1} \cdot \frac{1}{1+x^2t^2} - \frac{1}{x^2-1} \cdot \frac{1}{1+t^2} \right) dt \\ &= \frac{x^2}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2t^2} dt - \frac{1}{x^2-1} \int_0^{+\infty} \frac{1}{1+t^2} dt = \frac{x^2}{x^2-1} \frac{\pi}{2x} - \frac{1}{x^2-1} \frac{\pi}{2} \\ &= \frac{\pi}{2(x+1)}. \end{aligned}$$
L'expression de g' est aussi valable en $x = 1$ par continuité de g'.

2. On en déduit que g est **une** primitive de g' donc il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $g(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1)+\alpha$. On a $g(0) = \alpha = 0$ donc $g(x) = \frac{\pi}{2}\ln(x+1)$ pour tout x dans l'ensemble de définition. Par parité de la fonction sous l'intégrale on a $I = 2g(1) = \pi\ln(2)$.

Exercice 189 (correction)

1. Le fait que f est paire est immédiat. On pose $f(x,t) = \frac{1-\cos(xt)}{t^2}e^{-t}$. On a $|f(x,t)| \leq 2t^{-2}e^{-t}$ intégrable en $+\infty$. Par ailleurs $\frac{1-\cos(xt)}{t^2} = \frac{x}{2} + o(t)$ pour $t \to 0$ en faisant un DL_3 de $t \mapsto \cos(xt)$. Ainsi $f(x,t)$ est prolongeable par continuité en $t = 0$ en posant $f(x,0) = \dfrac{x}{2}$. Donc f est définie sur $\mathbb{R}$.

2. On a $\frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \frac{\sin(xt)}{t}e^{-t}$ qui est continue par morceaux et intégrable (faire un DL_1 en 0) et $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,t) = \cos(xt)e^{-t}$ dominée par $\varphi(t) = e^{-t}$. Donc
$$f''(x) = \int_0^{+\infty} \cos(xt)e^{-t}\,\mathrm{dt}\,.$$
Pour le calcul on passe par les complexes en écrivant que $\cos(xt) = \Re(e^{ixt})$. On a $\int_0^{+\infty} e^{(ix-1)t}\,\mathrm{dt} = \frac{1}{-1+ix}\left[e^{(ix-1)t}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1-ix} = \frac{1+ix}{1+x^2}$ donc $f''(x) = \frac{1}{1+x^2}$ donc $f'(x) = \arctan(x) + c$ mais $f'(0) = 0$ donc $c = 0$ et enfin, par intégration par partie $f(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + d$. Mais $f(0) = 0$ donc $d = 0$ donc
$$\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = x\arctan(x) - \frac{1}{2}\ln(x^2+1).$$

Exercice 190 (correction)

À venir

Exercice 191 (correction)

1. On pose $f(x,t) = \dfrac{xt+1}{t^2+1}$. On a bien $I(x)$ définie pour $x \in \mathbb{R}^+$ car $t \mapsto f(x,t)$ continue sur $[0,1]$. Par ailleurs, $\dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \dfrac{t}{(1+xt)(1+t^2)}$ est bien continue par morceau en t et dominée par $\dfrac{t}{1+t^2}$ qui est intégrable car continue sur $[0,1]$. Donc I est de classe $\mathcal{C}^1$ et
$$I'(x) = \int_0^1 \frac{t}{(1+xt)(1+t^2)}dt.$$

2. On fait une décomposition en éléments simples de $t \mapsto \dfrac{t}{(1+xt)(1+t^2)}$ ce qui donne
$$\frac{t}{(1+xt)(1+t^2)} = \frac{1}{1+x^2}\left(\frac{-x}{1+xt} + \frac{t+x}{1+t^2}\right).$$
On peut alors calculer
$$I'(x) = \frac{1}{1+x^2}\left[-\ln(1+xt) + \frac{1}{2}\ln(1+t^2) + x\,\mathrm{Arctan}(t)\right]_0^1 = \frac{-\ln(1+x) + \frac{1}{2}\ln(2) + x\frac{\pi}{4}}{1+x^2}.$$

Par ailleurs, $I(x)$ est la primitive de $I'(x)$ nulle en 0 car $I(0) = 0$. On a alors

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 I'(x)dx = -\int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{1+x^2}dx + \frac{\ln(2)}{2}\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx + \frac{\pi}{4}\int_0^1 \frac{x}{1+x^2}dx\\
2I &= \frac{\ln(2)\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\cdot\frac{\ln(2)}{2}\\
I &= \frac{\pi\ln(2)}{8}
\end{aligned}$$

Exercice 192 (correction)

On a $f(x,t) : t \mapsto t^{tx} = e^{tx\ln(t)}$ définie et continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et prolongeable par continuité en $t = 0$. Donc son intégrale existe toujours sur le segment $[0,1]$ donc f définie sur $\mathbb{R}$. On a pour tout $0 < t < 1$

$$\begin{aligned}
& x < y\\
\Leftrightarrow\ & t^{tx} > t^{ty}
\end{aligned}$$

car $\ln(t) < 0$. Donc f est strictement décroissante. Par ailleurs, $\forall t \in]0,1[, t^{tx} = (t^t)^x \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ et $f(x,t)$ dominée par 1 lorsque $x > 0$ donc, par le théorème de convergence dominée on peut intervertir limite et intégrale et on a $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.

Soient $0 < a < b < 1$. L'encadrement

$$a^{-xa} \leq t^{-tx} \leq b^{-xb}$$

pour $x < 0, a \leq t \leq b$ montre la convergence uniforme de $1/f(x,t)$ vers 0 sur le segment $[a,b]$ lorsque $x \to -\infty$. Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, \exists M_n, \forall x < M_n, \forall t \in [a,b], t^{-tx} < \frac{1}{n} \Leftrightarrow n < t^{tx}.$$

Donc $\int_0^1 t^{tx}\,\mathrm{dt} \geq \int_a^b t^{tx}\,\mathrm{dt} \geq (b-a)n$ pour $x \leq M_n$. Donc $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

Exercice 193 (correction)

1. On considère $k \geq 1$ un entier. On a pour tout $\ell \in \mathbb{N}, \langle\cos(\ell x), \sin(kx)\rangle = 0$ car il s'agit de l'intégrale d'une fonction impaire sur un intervalle symétrique. Par ailleurs,

$$\langle\sin(\ell x), \sin(kx)\rangle = \int_{-\pi}^{\pi} \sin(\ell x)\sin(kx)dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} (\cos((\ell-k)x) - \cos((k+\ell)x))\,dx = 0$$

car il s'agit de fonctions 2π-périodiques de moyenne nulle. La famille étant libre car orthogonale $\dim(E) = 2n$.

2. (a) Les éléments de E étant tous bornés il est clair que $f(t)e^{-t}$ est intégrable en $+\infty$. Donc Φ est au moins à valeurs dans $C(\mathbb{R},\mathbb{R})$. La linéarité est claire par linéarité de l'intégrable. Il reste à montrer que Φ est bien à valeurs dans E. On pose $k \in \{1,\ldots,n\}$. Par une intégration par partie on a

$$\Phi(\sin(kx)) = \sin(kx) + k\Phi(\cos(kx)) \text{ et } \Phi(\cos(kx)) = \cos(kx) - k\Phi(\sin(kx)).$$

En d'autres termes, $\begin{pmatrix}\Phi(\sin(kx))\\ \Phi(\cos(kx))\end{pmatrix}$ est solution du système

$$\begin{pmatrix}1 & -k\\ k & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}X\\ Y\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sin(kx)\\ \cos(kx)\end{pmatrix}.$$

On peut alors inverser le système ce qui donne $\begin{cases} \Phi(\sin(kx)) & = \dfrac{1}{1+k^2}(\sin(kx)+k\cos(kx)) \\ \Phi(\cos(kx)) & = \dfrac{1}{1+k^2}(-k\sin(kx)+\cos(kx)) \end{cases}$. Ceci donne aussi la matrice de Φ dans la base donnée de E qui est une matrice diagonale par blocs dont les blocs sont de la forme $A_k = \dfrac{1}{1+k^2}\begin{pmatrix} 1 & k \\ -k & 1 \end{pmatrix}$.

(b) On remarque que pour tout $k \geq 1$, $\sqrt{1+k^2}A_k$ est la matrice d'une isométrie. Il s'agit donc soit d'une symétrie orthogonale soit d'une rotation. Puisque son déterminant est $1 > 0$ il s'agit d'une rotation. Puisque $k \neq 0$ l'angle de la rotation n'est ni 0 ni π donc aucun des blocs n'est diagonalisable. Donc Φ n'est pas diagonalisable.

Exercice 194 (correction)

1. On a $\sin((2n+1)t) \sim_0 (2n+1)t$ ce qui prouve que $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{\sin(t)} \sim_0 \dfrac{(2n+1)t}{t} \sim_0 2n+1$ donc la fonction est intégrable en 0, elle est bien définie en $\pi/2$ donc pas de soucis. De même pour $\dfrac{\sin((2n+1)t)}{t}$. Pour I on fait une intégration par partie en dérivant $\dfrac{1}{u}$ en primitivant $\sin(u)$ (on choisit pour primitive $-\cos(u)+1$) ce qui donne
$$\int_0^x \frac{\sin(u)}{u}du = \frac{-\cos(x)+1}{x} - \int_0^x \frac{-\cos(u)+1}{u^2}du.$$
On a bien convergence lorsque $x \to +\infty$ car $\dfrac{-\cos(u)+1}{u^2} = O\left(\dfrac{1}{u^2}\right)$ et tout est bien défini en 0 en prenant un DL_2 du $\cos(u)$.

2. Grâce à la formule $\sin(p)-\sin(q) = 2\sin\left(\dfrac{p-q}{2}\right)\cos\left(\dfrac{p+q}{2}\right)$ on a pour tout $n \geq 1$
$$I_n - I_{n-1} = \int_0^{\pi/2} 2\frac{\sin(t)\cos(2nt)}{\sin(t)}dt = 2\int_0^{\pi/2}\cos(2nt)dt = 0.$$
On en déduit que $I_n = I_0 = \dfrac{\pi}{2}$.
On peut aussi utiliser la formule $\sin(x) = \dfrac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}$ et factoriser le numérateur dans l'intégrale pour simplifier le dénominateur mais c'est plus fastidieux.

3. On a $I_n - J_n = \int_0^{\pi/2}\sin((2n+1)t)\left(\dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t}\right)dt$. On pose $\varphi(t) = \dfrac{1}{\sin(t)} - \dfrac{1}{t} = \dfrac{t-\sin(t)}{t\sin(t)}$ qui est prolongeable par continuité en 0 et dérivable en 0 car $\varphi(t) = \dfrac{t}{6} + o(t)$ (en faisant un DL_3 de sin au numérateur et un DL_1 de sin au dénominateur dans $\dfrac{t-\sin(t)}{t\sin(t)}$). D'autre part, on a la limite en 0 suivante $\varphi'(t) \to \dfrac{1}{6}$ qui prouve que φ est de classe C^1. On peut alors faire une intégration par partie

$$\begin{aligned}
I_n - J_n &= \int_0^{\pi/2} \sin((2n+1)t)\,\varphi(t)dt \\
&= \left[\frac{-1}{2n+1}\cos((2n+1)t)\varphi(t)\right]_0^{\pi/2} + \frac{1}{2n+1}\int_0^{\pi/2}\cos((2n+1)t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt} \\
&= \int_0^{\pi/2}\cos((2n+1)t)\varphi'(t)\,\mathrm{dt}
\end{aligned}$$

$$|I_n - J_n| \leq \frac{1}{2n+1}||\varphi'||_{\infty,[0,\pi/2]} \to 0.$$

Ceci prouve que $\lim J_n = \dfrac{\pi}{2}$

4. Par un changement de variable $u = (2n+1)t$ on

$$J_n = \int_0^{(2n+1)\pi/2} \frac{\sin(u)}{u}du \to I.$$

Donc $I = \lim J_n = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 195 (correction)

Justifions d'abord l'existence de ces deux objets avant de montrer l'égalité. On $\forall n \geq 2$, $\dfrac{1}{n^n} \leq \dfrac{1}{n^2}$ or $\sum \dfrac{1}{n^2}$ converge par le critère de Riemann ce qui prouve que $\sum \dfrac{1}{n^n}$ converge également par comparaison. D'autre part, par définition $f\,:\ t \mapsto \dfrac{1}{t^t} = e^{-t\ln(t)}$ qui existe bien pour $t \in]0,1]$ et qui peut être prolongée par continuité en $t = 0$ par croissance comparée en posant $f(0) = 1$. On a donc affaire à une fonction continue sur un segment. Elle est donc intégrable.

On va développer $\dfrac{1}{t^t}$ grâce au développement en séries entières de l'exponentielle puis justifier une inversion série-intégrale.

On a

$$\int_0^1 \frac{1}{t^t}dt = \int_0^1 \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-t\ln(t))^n}{n!}dt \overset{?}{=} \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n!}\int_0^1 (t\ln(t))^n dt \qquad (6)$$

On justifie que l'inversion série intégrale est possible *(il peut être judicieux de d'abord vérifier que cela nous mène bien au résultat souhaité puis de justifier l'inversion si on obtient bien ce qu'on veut)*. On pose $f_n(t) = \dfrac{(-t\ln(t))^n}{n!}$. De la même manière que pour f on peut prolonger $t \mapsto t\ln(t)$ en 1 par continuité en lui associant la valeur 0. Ceci prouve que la fonction $t \mapsto |t\ln(t)|$ est bornée sur $]0,1]$. Donc il existe $M > 0$ tel que

$$\forall t \in]0,1]\,, |f_n(t)| \leq \frac{M^n}{n!} \text{ donc } \int_0^1 |f_n(t)|\,dt \leq \frac{M^n}{n!}$$

or la série $\sum \dfrac{M^n}{n!}$ converge (sa somme vaut e^M). Ceci justifie que l'inversion faite en 6 est possible.

Il ne reste plus qu'à calculer $\int_0^1 (t\ln(t))^n dt$. On fait le changement de variables $\ln(t) = u$ (bien C^1 et bijectif) puis le changement $x = -(n+1)u$ (bien C^1 et bijectif pour $n \in \mathbb{N}$) ce qui donne

$$\int_0^1 (t\ln(t))^n\,\mathrm{dt} = \int_{-\infty}^0 u^n e^{nu}e^u du = \int_0^{+\infty}\frac{(-1)^n}{(n+1)^n}x^n e^{-x}\frac{1}{n+1}dx = \frac{(-1)^n}{(n+1)^{n+1}}I_n$$

avec $I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x} dx = [-x^n e^{-x}]_0^{+\infty} + n\int_0^1 x^{n-1}e^{-x}dx = nI_{n-1}$ (par intégration par parties). Par conséquent, I_n vérifie $I_n = nI_{n-1}$ et $I_1 = 1$ donc $\forall n \in \mathbb{N}, I_n = n!$ (on pourra aussi reconnaître la fonction Γ d'Euler qui donne directement $\Gamma(n+1) = I_n = n!$). On en déduit que $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_0^1 (t\ln(t))^n \,\mathrm{dt} = \frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} \text{ donc } \int_0^1 \frac{1}{t^t}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{(-1)^n n!}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^{n+1}} = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^n}.$$

(il est possible de se passer des deux changements de variables et de directement faire une intégration par partie de $\int_0^1 t^n \ln(t)^n dt$ en posant $u' = t^n$ et $v = \ln(t)^n$ mais la relation de récurrence est un peu plus difficile à voir).

Exercice 196 (correction)

À venir

Exercice 197 (correction)

1. En faisant le changement de variable $u = x - t$ on a

$$f(x) = 1 + 2x\int_0^x f(u)\,\mathrm{du} - \int_0^x uf(u)\,\mathrm{du}\,.$$

Puisque f est continue alors la partie droite de l'équation est de classe C^1 comme somme de primitives de fonctions continues. Donc f est elle-même de classe C^1.
En faisant une intégration par partie de $\int_0^x uf(u)\,\mathrm{du}$ en dérivant u et en primitivant $f(u)$ en $F(u)$ on obtient $F'(x) = f(x) = 1 + 2xF(x) - (xF(x) - \int_0^x F(u)\,\mathrm{du})$ et en dérivant (légal car f est C^1) on a

$$F''(x) = 2F(x) + xF'(x).$$

Enfin, on a $F(0) = 0$ et $F'(0) = f(0) = 1$.

2. On suppose qu'on peut écrire $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ sur un petit voisinage de 0. Le fait de satisfaire l'équation différentielle donne

$$2a_2 - 2a_0 + \sum_{n=1}^{+\infty}((n+1)(n+2)a_{n+2} - (n+2)a_n)x^n = 0$$

qui donne, par unicité du développement en série entière, $a_2 = a_0$ et $\forall n \geq 1, a_{n+2} = \frac{1}{n+1}a_n$. Par hypothèse, $a_0 = F(0) = 0$ et $a_1 = F'(1) = 1$. On en déduit par une récurrence immédiate que $a_{2n} = 0$ pour tout n et que $a_{2n+1} = \frac{1}{2^n n!}$. Donc $F(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n n!}x^{2n+1} = x\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}\left(\frac{x^2}{2}\right)^n = xe^{x^2/2}$. Réciproquement $x \mapsto xe^{x^2/2}$ est bien solution du système de Cauchy et cette solution est unique donc on a bien $F(x) = xe^{x^2/2}$ sur le disque de convergence de la série qui est $\mathbb{R}$.

3. On en déduit que si f est solution de l'équation de départ alors $f(x) = F'(x) = (1+x^2)e^{x^2/2}$. Vérifions qu'il s'agit bien d'une solution. On pose $g(x) = (1+x^2)e^{x^2/2}$ et

$$h(x) = 1 + \int_0^x (t+x)(1+(x-t)^2)e^{(x-t)^2/2}\,\mathrm{dt} = 1 + 2x\int_0^x (1+u^2)e^{u^2/2}\,\mathrm{du} - \int_0^x u(1+u^2)e^{u^2/2}\,\mathrm{du}\,.$$

Puisque $h(0) = g(0) = 1$ elles sont égale si et seulement si leur dérivées sont égales. On a $g'(x) = (3+x^2)xe^{x^2/2}$ et $h'(x) = 2\int_0^x (1+u^2)e^{u^2/2}\,\mathrm{du} + (x+x^3)e^{x^2/2}$. Puisque $g'(0) = h'(0) = 0$ ces dernières sont égales si et seulement si leur dérivées sont égales. On a $g''(x) = (3+6x^2+x^4)e^{x^2/2} = h''(x)$. Donc c'est bon ; $f(x) = (1+x^2)e^{x^2/2}$ est l'unique solution à notre équation de départ.

Exercice 198 (correction)

1. Par croissance comparée $\ln(t)e^{-t} = O\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right)$ en 0 et $\ln(t)e^{-t} = O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ en $+\infty$ donc intégrable aux deux bornes (et continue entre les deux).
2. La suite de fonction $f_n(t) = \left(1 - \frac{t}{n}\right)^n \mathbb{1}_{[0;n]}(t)$ définie sur $\mathbb{R}^+$ est continue par morceaux et, par l'inégalité $\ln(1-u) \leq -u$ on a $\left(1 - \frac{t}{n}\right)^n = e^{n\ln\left(1-\frac{t}{n}\right)} \leq e^{-t}$ ce qui permet de dominer f_n par $\varphi(t) = e^{-t}$ qui est intégrable et donc d'intervertir limite et intégrale.
3. (a) On fait une intégration par partie dans u_{n+1} en primitivant 1 en x et en dérivant $\ln(x)(1-x)^{n+1}$.

$$\begin{aligned}
u_{n+1} = \int_0^1 1 \times \ln(x)(1-x)^{n+1}\,\mathrm{dx} = \left[x\ln(x)(1-x)^{n+1}\right]_0^1 - \int_0^1 x\left(\frac{1}{x}(1-x)^{n+1} - (n+1)\ln(x)(1-x)^n\right)\mathrm{dx} \\
= -\int_0^1 (1-x)^{n+1}\,\mathrm{dx} + (n+1)\int_0^1 x\ln(x)(1-x)^n\,\mathrm{dx} \\
= -\frac{1}{n+2} + (n+1)\int_0^1 (x-1+1)\ln(x)(1-x)^n\,\mathrm{dx} \\
= -\frac{1}{n+2} - (n+1)\underbrace{\int_0^1 \ln(x)(1-x)^{n+1}\,\mathrm{dx}}_{u_{n+1}} + (n+1)\underbrace{\int_0^1 \ln(x)(1-x)^n\,\mathrm{dx}}_{u_n}.
\end{aligned}$$

   Ce qui donne bien $(n+2)u_{n+1} = -\frac{1}{n+2} + (n+1)u_n$.

   (b) En posant $w_n = (n+1)u_n$ on a $w_{n+1} = w_n - \frac{1}{n+2}$. Donc, par télescopage, $w_n - w_0 = \sum_{k=0}^{n-1} -\frac{1}{k+2}$ mais $w_0 = u_0 = -1$ donc $w_n = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k}$, d'où le résultat.
4. On a par changement de variable $x = \frac{t}{n}$, $v_n = \int_0^1 n\ln(nx)(1-x)^n\,\mathrm{dx} = n\left(u_n + \frac{\ln(n)}{n+1}\right) = \frac{n}{n+1}\left(\ln(n) - \sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right) \sim -\gamma$.

9. Probabilités - corrections

Exercice 199 (correction)

L'univers de X est $\{0, \dots, n\}$ et on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}\left(\bigcup_{A \subseteq \{1,\dots,n\}, \# A = k} \left\{B_i = 1, \forall i \in A / \text{ et } B_j = 0, \forall j \notin A\right\}\right) \\
&= \sum_{A, \# A = k} \mathbb{P}\left(\left\{B_i = 1, \forall i \in A / \text{ et } B_j = 0, \forall j \notin A\right\}\right) && \text{(par disjonction des événements)} \\
&= \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} && \text{(par indépendances des } B_i\text{).}
\end{aligned}$$

On reconnaît donc une loi binomiale de paramètre (n, p).

Par linéarité de l'espérance on a $\mathbb{E}[X] = \sum_{i=1}^n \mathbb{E}[B_i] = np$. Par indépendance des B_i on a $\mathbb{V}(X) = \sum_{i=1}^n \mathbb{V}(B_i) = np(1-p)$.

Exercice 200 (correction)

On peut écrire $X = X_1 + \cdots + X_n$ et $Y = Y_1 + \cdots + Y_m$ avec $X_1, \dots, X_n$ et $Y_1, \dots, Y_m$ des Bernoulli de paramètre p indépendantes. Par ailleurs, par indépendance de X et de Y les X_i, Y_i sont aussi indépendantes. Ainsi, $X + Y$ est la somme de $n + m$ Bernoulli indépendantes de même paramètre donc $X + Y \sim B(n + m, p)$.

Exercice 201 (correction)

On a, par définition, $\mathbb{P}(X_n = k) = \binom{n}{k} p_n^k (1 - p_n)^{n-k}$. Or $\binom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!} = \dfrac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \underset{n \to +\infty}{\sim} \dfrac{n^k}{k!}$. D'autre part, $(1-p_n)^{n-k} = e^{(n-k)\ln(1-p_n)} = e^{(n-k)(-p_n + o(p_n))} \to e^{-\lambda}$. En conclusion, on a

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_n = k) &= \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&\sim \frac{(np_n)^k}{k!} e^{-\lambda} \\
&\sim \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda}.
\end{aligned}$$

Exercice 202 (correction)

Les deux variables Z et Z' sont à valeurs dans $\{0, 1\}$. Elles suivent donc des lois de Bernoulli de paramètre respectifs $\mathbb{P}(\max(X, Y) = 1)$ et $\mathbb{P}(\min(X, Y)) = 1$. On calcule ces deux quantités. On a $\{\max(X, Y) = 1\} = \{X = 1\} \cup \{Y = 1\}$ donc

$$\mathbb{P}(\max(X, Y) = 1) = \mathbb{P}(X = 1) + \mathbb{P}(Y = 1) - \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = p + q - pq.$$

$$\mathbb{P}(\min(X, Y) = 1) = \mathbb{P}(X = 1 \text{ et } Y = 1) = pq.$$

On a $\mathbb{P}((Z=0)\cap(Z'=1))=0$ car le premier évènement survient quand $X=0$ et $Y=0$ et le second lorsque $X=1$ et $Y=1$ ce qui sont évidemment des évènements incompatibles. Pourtant $P(Z=0)=1-p-q+pq=(1-p)(1-q)\neq 0$ et $P(Z'=1)=pq\neq 0$. Donc les variables ne sont pas indépendantes.

Exercice 203 (correction)

1. On note $q=1-p$. On a $X(\Omega)=\{k\in\mathbb{N}\mid k\geq n\}$. Pour $k\geq n$ l'évènement $\{X=k\}$ signifie que la k-ème épreuve de Bernoulli était un succès et qu'il y en avait $n-1$ parmi les $k-1$ précédent. Les autres étant des échecs on obtient

$$\mathbb{P}(X=k)=\binom{k-1}{n-1}\underbrace{p^{n-1}}_{k-1\text{ succès}}\underbrace{q^{k-n}}_{k-n\text{ échecs}}\underbrace{p}_{k\text{ème succès}}=\binom{k-1}{n-1}p^nq^{k-n}.$$

   On se rappelle qu'en dérivant $n-1$ fois de la relation $\dfrac{1}{1-x}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}x^k$ on a $\forall\,|x|<1$, $\dfrac{1}{(1-x)^n}=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n-1}{n-1}x^k$. On a alors, par changement de variable $k\leftrightarrow k-n$,

$$G_X(t)=\sum_{k=n}^{+\infty}\binom{k-1}{n-1}p^nq^{k-n}t^k=p^n\sum_{k=0}^{+\infty}\binom{k+n-1}{n-1}(qt)^kt^n=\left(\frac{pt}{1-qt}\right)^n.$$

2. L'espérance existe si, et seulement si G_X est dérivable en 1 auquel cas on a $G'_X(1)=\mathbb{E}[X]$. Puisque G_X est une fonction de classe C^∞ définie sur $\left]-\dfrac{1}{q},\dfrac{1}{q}\right[$ elle est bien dérivable en 1 et un calcul de dérivée donne

$$G'_X(t)=n\frac{p}{(1-qt)^2}\left(\frac{pt}{1-qt}\right)^{n-1}\quad\text{donc } G'_X(1)=\frac{n}{p}.$$

3. Par indépendance on a

$$G_{X+Y}(t)=G_X(t)G_Y(t)=\left(\frac{pt}{1-qt}\right)^n\left(\frac{pt}{1-qt}\right)^m=\left(\frac{pt}{1-qt}\right)^{n+m}.$$

   On reconnaît donc une binomiale négative de paramètre $p,n+m$. On remarque enfin qu'une loi $\mathrm{Bin}^-(1,p)$ est une géométrique. Il suffit alors de sommer n variables indépendantes suivant toute une loi géométrique pour obtenir une variable aléatoire de loi $\mathrm{Bin}^-(n,p)$.

Exercice 204 (correction)

On rappelle qu'une matrice $M\in M_n(K)$ est inversible si et seulement si ses colonnes forment une base de K^n lorsque K est un corps. On note $K=\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Tirer au hasard une matrice suivant une loi uniforme revient à tirer au hasard ses coefficients ou alors ses colonnes dans K^n. On a donc p^n-1 choix pour la première colonne c_1 (tous les vecteurs hormis le vecteur nul peuvent faire parti d'une base). Pour que la famille reste libre on doit prendre le second vecteur dans $K^n\setminus\mathrm{Vect}(c_1)$ ce qui laisse p^n-p choix. Par récurrence, on obtient p^n-p^{k-1} choix pour le k-ème vecteur ce qui fait au final

$$\mathbb{P}(\mathrm{GL}_n(K))=\frac{(p^n-1)(p^n-p)\cdots\left(p^n-p^{n-1}\right)}{p^{n^2}}=\frac{p^{1+2+\cdots+n-1}(p^n-1)\left(p^{n-1}-1\right)\cdots(p-1)}{p^{n^2}}=p^{\frac{n(n-1)}{2}-n^2}(p^n-1)\left(p^{n-1}-1\right)\cdots(p-1)$$

Donc on a bien $\mathbb{P}(\mathrm{GL}_n(K))=p^{\frac{-n(n+1)}{2}}(p^n-1)\left(p^{n-1}-1\right)\cdots(p-1)$.

Exercice 205 (correction)

On calcule pour tout $n \in \mathbb{N}, \mathbb{P}(X = n)$. On a

$$\{X = n\} = \left(\bigcap_{k=0}^{n-1} \{B_k = 0\}\right) \cap \{B_n = 1\}.$$

Donc, $\mathbb{P}(X = 0) = \frac{1}{2}$ et, par indépendance des B_k, on a pour $n \geq 1$

$$\mathbb{P}(X = n) = \left(1 - \frac{1}{1+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n}\right) \cdot \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}.$$

Donc l'espérance existe si et seulement si la série $\left(\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n+1}\right)$ converge ce qui n'est pas le cas donc X n'a pas d'espérance.

Exercice 206 (correction)

Soit $x \in K \setminus \{0\}$. On a

$$\mathbb{P}(X^2 = x^2) = \mathbb{P}((X - x)(X + x) = 0) = \mathbb{P}((X = x) \text{ ou } (X = -x)).$$

Par intégrité de K. Or $x = -x \Leftrightarrow 2 = 0 \in K$ on en déduit donc que les évènements $X = x$ et $X = -x$ sont disjoints si et seulement si $2 \neq 0$ autrement ils sont égaux. Donc si $2 \neq 0$

$$\mathbb{P}(X^2 = x^2) = \mathbb{P}(X = x) + \mathbb{P}(X = -x) = \frac{2}{q-1}$$

ce qui ne dépend pas de x donc X^2 est uniforme et $\#S_K = \frac{q-1}{2}$. Autrement $\mathbb{P}(X^2 = x^2) = \frac{1}{q-1}$ donc X^2 est uniforme sur $S_K = K \setminus \{0\}$.

Exercice 207 (correction)

L'ensemble Ω est de cardinal $\binom{2n}{n}$. Soit $k \in \{0, \dots, m\}$. Pour que $X = k$ il faut et il suffit de choisir k éléments dans A et $n - k$ dans B ce qui correspond à $\binom{m}{k}\binom{2n-m}{n-k}$ choix parmi les $\binom{2n}{n}$ possibilités. Autrement dit,

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k}\binom{2n-m}{n-k} = \binom{2n}{n}.$$

Le cas particulier $m = n$ donne

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}.$$

Exercice 208 (correction)

On pose T la variable aléatoire $T = \#A \cap Z$ et Y la variable de Bernoulli $\mathbb{1}_{\#A\cap Z\geq\#B\cap Z}$ de paramètre $\mathbb{P}(\#A \cap Z \geq \#B \cap Z) = \dfrac{1}{2}$.

La variable T est à valeurs dans $\{0, \dots, n\}$ et on a $\mathbb{P}(T = k) = \dfrac{\binom{n}{k}\binom{n}{n-k}}{\binom{2n}{n}} = \dfrac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}$. Car Z est uniforme sur un ensemble à $\binom{2n}{n}$ éléments et pour que $\#A \cap Z = k$ il faut et il suffit de choisir k éléments dans A et $n - k$ dans B. Enfin, on remarque que $\#B \cap Z = n - T$ donc

$X = YT + (1-Y)(n-T)$ qui est à valeurs dans $X(\Omega) = \left\{ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor, n \right\}$ d'où l'on déduit grâce au système complet $\{Y = 0\}, \{Y = 1\}$ que $\forall k \in X(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \mathbb{P}((YT + (1-Y)(n-T) = k) \cap (Y = 1)) + \mathbb{P}((YT + (1-Y)(n-T) = k) \cap (Y = 0)) \\
&= \mathbb{P}((T = k) \cap (Y = 1)) + \mathbb{P}((T = n-k) \cap (Y = 0)) \\
&= \mathbb{P}(T = k) + \mathbb{P}(T = n-k) && \text{car } \left\{ \begin{array}{ll} \{Y = 1\} & \subseteq \{T = k\} \\ \{Y = 0\} & \subseteq \{T = n-k\} \end{array} \right. \\
&= 2\mathbb{P}(T = k) = 2\frac{\binom{n}{k}^2}{\binom{2n}{n}}.
\end{aligned}$$

Exercice 209 (correction)

On note $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ la tribu engendré par les intervalles fermés. Soit $a < b \in \mathbb{R}$ alors $[a, b] =]-\infty, a[^c \cap]b, +\infty[^c$ donc $\mathcal{F}(\mathbb{R}) \subseteq \mathcal{B}(\mathbb{R})$. Par ailleurs, par stabilité par union dénombrable $[a, +\infty[= \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} [a, a+n]$ donc les intervalles de la forme $[a, +\infty[$ et, de même ceux de la forme $]-\infty, a]$ sont des éléments de $\mathcal{F}(\mathbb{R})$ donc

$$]a, b[=] - \infty, b]^c \cap [a, +\infty[^c \in \mathcal{F}(\mathbb{R}).$$

donc on a l'inclusion réciproque.

Exercice 210 (correction)

1. On calcule la probabilité de l'évènement contraire. Lorsqu'on tire 2 feuilles, la seconde à une probabilité $\frac{1}{2n-1}$ d'être celle associée à la première. Donc $a_n = 1 - \frac{1}{2n-1} = \frac{2n-2}{2n-1}$.
2. Cas $n = 2$.
   (a) Le premier bon tirage suit une loi géométrique de paramètre $1 - a_2$. Le tirage suivant est alors composé du second couple de feuilles. On a donc $T_2 - 1$ qui suit une loi géométrique
   (b) En déduit de la question précédente que $\mathbb{P}(T_2 - 1 = k - 1) = (1 - a_2)a_2^{k-2}$.
3. Cas $n = 3$.
   (a) On a $\mathbb{P}(T_3 = 2) = 0$ car il faut au minimum trois tirages pour agrafer les trois couples et $\mathbb{P}(T_3 = 3) = (1 - a_3)(1 - a_2)$ car il faut avoir agrafer les deux premières puis les deux suivantes.
   (b) Les évènements A_3 et $\overline{A_3}$ forment un système complet. On a alors, par la formule des probabilités totales

   $$\begin{aligned}
   \mathbb{P}(T_3 = k + 1) &= \mathbb{P}(T_3 = k + 1 | A_3)\mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(T_3 = k + 1 | \overline{A_3})\mathbb{P}(\overline{A_3}) \\
   &= \mathbb{P}(T_3 = k)\mathbb{P}(A_3) + \mathbb{P}(T_2 = k)\mathbb{P}(\overline{A_3}) \\
   &= a_3\mathbb{P}(T_3 = k) + (1 - a_3)\mathbb{P}(T_2 = k).
   \end{aligned}$$

   L'égalité $\mathbb{P}(T_3 = k + 1 | A_3) = \mathbb{P}(T_3 = k)$ provient de l'hypothèse d'indépendance lorsqu'on replace les feuilles et $\mathbb{P}(T_3 = k + 1 | \overline{A_3}) = \mathbb{P}(T_2 = k)$ du fait qu'on se retrouve ramené au cas 2 lorsqu'on agrafe les deux premières feuilles.

(c) On fait une récurrence. C'est vrai au rang $k=2$ (et $k=3$ mais ça n'a aucune importance). Soit $k\geq 2$ tel que $\mathbb{P}(T_3=k)=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(a_3^{k-2}-a_2^{k-2}\right)$. On a alors

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T_3=k+1)&=a_3\mathbb{P}(T_3=k)+(1-a_3)\mathbb{P}(T_2=k)\\&=a_3\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(a_3^{k-2}-a_2^{k-2}\right)+(1-a_3)(1-a_2)a_2^{k-2} &&\text{(d'après l'HR et la question 2.a)}\\&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left[a_3^{k-1}-a_3a_2^{k-2}+(a_3-a_2)a_2^{k-2}\right] &&\text{(en factorisant par}\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2})\\&=\frac{(1-a_2)(1-a_3)}{a_3-a_2}\left(a_3^{k-1}-a_2^{k-1}\right)\end{aligned}$$

4. Cas général.
   (a) Après le premier tirage d'un couple originale+photocopie on est ramené au cas $n-1$. Le temps avant le premier bon tirage suit une loi géométrique de paramètre $1-a_n$.
   (b) On a alors par récurrence $T_n=\sum_{j=3}^n t_j+T_2=1+\sum_{j=2}^n t_j$ avec t_j qui suit une loi géométrique de paramètre $1-a_j$ et on se rappelle que $T_2-1\sim t_2$. On a alors

$$\mathbb{E}[T_n]=\sum_{j=2}\frac{1}{\frac{1}{2j-1}}+1=\sum_{j=1}^{n}2j-1=n^2.$$

Exercice 211 (correction)

1. On a, par hypothèse, $q_0=1$ et $q_N=0$. Soit $1\leq n\leq N-1$. On pose les évènements

$$P_{k,j}=\{\text{La particule est en } j \text{ à l'instant } k\}.$$

Finalement, on a

$$\begin{aligned}q_n&=\mathbb{P}(\text{La particule atteint }0|P_{1,n})\\&=\mathbb{P}(\text{La particule atteint 0 et }P_{2,n-1}|P_{1,n})+\mathbb{P}(\text{La particule atteint 0 et }P_{2,n+1}|P_{1,n}))\\&=\underbrace{\mathbb{P}(\text{La particule atteint }0|P_{1,n}\text{ et }P_{2,n-1})}_{=\mathbb{P}(\text{La particule atteint }0|P_{1,n-1})}\underbrace{\mathbb{P}(P_{2,n-1}|P_{1,n})}_{q}+\underbrace{\mathbb{P}(\text{La particule atteint }0|P_{1,n}\text{ et }P_{2,n+1})}_{=\mathbb{P}(\text{La particule atteint }0|P_{1,n+1})}\underbrace{\mathbb{P}(P_{2,n+1}|P_{1,n})}_{q}\\&=pq_{n+1}+qq_{n-1}.\end{aligned}$$

Le passage de la deuxième ligne à la troisième provenant de la formule $\mathbb{P}(A\cap B|C)=\mathbb{P}(A|B\cap C)\mathbb{P}(B|C)$ (écrire les définitions).

2. On reconnaît une suite définie par récurrence linéaire. On la résout en posant $q_n=r^n$ ce qui donne $pr^2-r+q=0$ ayant pour solutions réelles distinctes $r_1=\frac{1-\sqrt{1-4pq}}{2p}$ et $r_2=\frac{1+\sqrt{1-4pq}}{2p}$. En effet, la fonction $p\in]0;1[\mapsto 4p(1-p)$ a son maximum en $p=\frac{1}{2}$ et ce dernier vaut 1 donc le discriminant vaut 1. On en déduit que pour tout n on a $q_n=\lambda r_1^n+\mu r_2^n$. Grâce aux conditions $q_0=1$ et $q_N=0$ on trouve $\lambda=\frac{r_2^N}{r_2^N-r_1^N}$ et $\mu=\frac{-r_1^N}{r_2^N-r_1^N}$.
3. L'espace des solutions des suites vérifiant la relation de récurrence de la question 1 est un espace vectoriel de dimension 2 dont 1 et (q_n) sont solutions et donc forment une base. On remarque alors que puisque (p_n) est aussi solution on doit avoir deux constantes α et β telles que pour tout n, $p_n=\alpha+\beta q_n$. Mais puisque $p_0=0=1-q_0$ et $p_N=1=1-q_N$ on a $\alpha=1$ et $\beta=-1$ donc $p_n+q_n=1$.
4. La probabilité pour que la particule ne s'arrête jamais en partant de n est $1-(p_n+q_n)=0$ d'après la question précédente.

5. L'hypothèse $p > \frac{1}{2}$ implique que $r_1 < 1$ et $r_2 > 1$. On en déduit que

$$q_{N/2} = \frac{r_2^N r_1^{N/2} - r_1^N r_2^{N/2}}{r_2^N - r_1^N} \sim \frac{(r_2\sqrt{r_1})^N - (r_1\sqrt{r_2})^N}{r_2^N} \sim \sqrt{r_1}^N - \left(\frac{r_1}{\sqrt{r_2}}\right)^N \longrightarrow 0.$$

Exercice 212 (correction)

1. Puisque φ est croissante on a pour tout $\omega \in \Omega$, $Z(\omega) \geq a \Rightarrow \varphi(Z(\omega)) \geq \varphi(a)$ ce qui revient à avoir l'inclusion d'évènements $\{Z \geq a\} \subseteq \{\varphi(Z) \geq \varphi(a)\}$ donc

$$\mathbb{P}(Z \geq a) \leq \mathbb{P}(\varphi(Z) \geq \varphi(a)) \underset{\text{(Markov)}}{\leq} \frac{\mathbb{E}[\varphi(Z)]}{\varphi(a)}.$$

2. On pose $\ell = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n$. Puisque tous les u_n sont positifs on a $\frac{u_n}{\ell}$ qui définit une probabilité sur $\mathbb{N}$. On peut appliquer la question précédente à $\varphi(t) = t^2$, $a = N \in \mathbb{N}$ et Z qui suit la loi définie par u_n. On a donc

$$\mathbb{P}(Z \geq N) = \sum_{n=N}^{+\infty} \frac{u_n}{\ell} \leq \frac{\mathbb{E}[Z^2]}{N^2} = \frac{\sum_{n=0}^{+\infty} n^2 u_n}{N^2}$$

donc on a bien $u_n = O\left(\frac{1}{N^2}\right)$.

Exercice 213 (correction)

1. On commence par calculer $\mathbb{P}(Y_n = k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Puisque pour tout $\omega \in \Omega, Y_n(\omega) \geq n$ on a $\mathbb{P}(Y_n = k) = 0$ pour $k < n$. Par ailleurs, $\mathbb{P}(Y_n = k) = \mathbb{P}(X_n = k) = (1 - p_n)p_n^{k-1}$. Enfin, $\max(n, X) = n$ si et seulement si $X \leq n$. Donc $\mathbb{P}(Y_n = n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X_n = k) = 1 - p_n^n$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
G_{Y_n}(t) &= (1 - p_n^n)t^n + \sum_{k=n+1}^{+\infty} (1 - p_n)p_n^{k-1} t^k \\
&= (1 - p_n^n)t^n + (1 - p_n)p_n^n t^{n+1} \sum_{k=0}^{+\infty} (p_n t)^k \\
&= (1 - p_n^n)t^n + \frac{(1 - p_n)p_n^n t^{t+1}}{1 - p_n t}.
\end{aligned}$$

2. On calcule l'espérance de Y_n qui est, si elle existe, $G'_{Y_n}(1)$. On a

$$\begin{aligned}
G'_{Y_n}(t) &= n(1 - p_n^n)t^{n-1} + (1 - p_n)p_n^n \frac{(n+1)(1 - p_n t)t^n + p_n t^{n+1}}{(1 - p_n t)^2} \\
&= n(1 - p_n^n)t^{n-1} + (1 - p_n)p_n^n t^n \frac{(n+1)(1 - p_n t) + p_n t}{(1 - p_n t)^2} \\
&= n(1 - p_n^n)t^{n-1} + (1 - p_n)p_n^n t^n \frac{n(1 - p_n t) + 1}{(1 - p_n t)^2}
\end{aligned}$$

que l'on évalue en 1 ce qui donne

$$\mathbb{E}[Y_n] = G'_{Y_n}(1) = n(1 - p_n^n) + np_n^n + \frac{p_n^n}{1 - p_n} = n + n\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n \underset{+\infty}{\sim} (1 + e^{-1})n.$$

Exercice 214 (correction)

1. Soit $P(t) = a_m t^m + a_{m-1}t^{m-1} + \cdots + a_0 \in \mathbb{R}_m[X]$ de degré m, i.e. $a_m \neq 0$. Alors $P(t) \sim a_m t^m$ en $\pm\infty$. Par imparité de m les limites en $+\infty$ et $-\infty$ sont respectivement $+\infty$ et $-\infty$ si $a_m > 0$ ou le contraire si $a_m < 0$. Un polynôme de degré 5 étant continu, on peut appliquer le théorème des valeurs intermédiaires ce qui donne la surjectivité de P donc l'existence d'une racine.
2. On a
$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k)t^k = t\sum_{k=1}^{6} \mathbb{P}(X = k)t^{k-1}.$$
Pareil pour Y.
3. Par définition on a
$$\begin{aligned} G_U(t) &= \sum_{k=2}^{12} \frac{1}{11}t^k \\ &= \frac{t^2}{11}\sum_{k=0}^{10} t^k \\ &= \frac{t^2}{11}\cdot\frac{t^{11}-1}{t-1}. \end{aligned}$$
4. On a $\Phi(t) = 1 + t + \cdots + t^{10} = \frac{t^{11}-1}{t-1}$ donc les racines de Φ sont les racines 11-ème de l'unité (sauf 1) qui sont $e^{i\frac{2k\pi}{11}}$, $1 \leq k \leq 10$. Or
$$e^{i\frac{2k\pi}{11}} \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \frac{2k\pi}{11} \in \pi\mathbb{Z} \Leftrightarrow 2k \in 11\mathbb{Z} \underset{\text{(Gauss)}}{\Leftrightarrow} k \in 11\mathbb{Z}.$$
Donc Φ n'a pas de racine réelle donc est de signe constant par la contraposée du théorème des valeurs intermédiaires. Donc Φ du signe de $\Phi(0) = 1$.
5. Supposons par l'absurde qu'on puisse piper X et Y de telle sorte que la somme suive une loi uniforme. Puisque X et Y sont indépendantes et que la fonction génératrice détermine la loi on doit alors
$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t) = t^2P_X(t)P_Y(t) = G_U(t) = \frac{t^2}{11}\left(1 + t + \cdots + t^{10}\right)$$
ceci est équivalent à $P_X(t)P_Y(t) = \frac{1}{11}(1 + t + \cdots + t^{10})$ donc P_X et P_Y doivent être de degré exactement égal à 5 donc doivent admettre une racine réelle chacun. Il s'agirait donc de racines réelles de Φ ce qui est absurde car Φ n'admet aucune racine réelle. Donc on ne peut pas piper les dés de cette façon.
6. (a) On a alors $X+Y$ à valeurs dans $\{2, \ldots, 13\}$. Une variable aléatoire uniforme U sur cet ensemble a pour fonction génératrice
$$G_U(t) = \frac{t^2}{12}\cdot\frac{t^{12}-1}{t-1} = \frac{t^2}{12}\cdot\frac{(t^6+1)(t^6-1)}{t-1}.$$
Par ailleurs, la fonction génératrice de Y (de loi uniforme sur $\{1, \ldots, 6\}$ est $G_Y(t) = \frac{t}{6}\cdot\frac{t^6-1}{t-1}$. Donc
$$\begin{array}{rrl} & G_{X+Y}(t) & = G_U(t) \\ \Leftrightarrow & G_X(t)\frac{t}{6}\cdot\frac{t^6-1}{t-1} & = \frac{t^2}{12}\cdot\frac{(t^6+1)(t^6-1)}{t-1} \\ \Leftrightarrow & G_X(t) & = \frac{t}{2}\left(t^6+1\right) = \frac{1}{2}\cdot t + \frac{1}{2}\cdot t^7. \end{array}$$
(b) Donc cela revient à dire que X est un « dé »vérifiant
$$\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = 7) = \frac{1}{2}, \mathbb{P}(X = 3) = \mathbb{P}(X = 4) = \mathbb{P}(X = 5) = \mathbb{P}(X = 6) = 0.$$
On représenterait plus classiquement X par une pièce équilibrée avec un côté numéroté 1 et l'autre 7.

Exercice 215 (correction)

À venir.

Exercice 216 (correction)

1. Il s'agit d'une variable aléatoire ne prenant que les valeurs 0 et 1. Il s'agit donc, par définition, d'une variable aléatoire suivant une loi de Bernoulli. Son paramètre p est $\mathbb{P}(\mathbb{1}_A = 1) = \mathbb{P}(A)$ (on a l'égalité des évènements $\{\mathbb{1}_A = 1\} = A$ par définition de $\mathbb{1}_A$).
2. Soit $\omega \in \Omega$. On note $n_0 = N(\omega)$. On a alors $t^{S_N}(\omega) = t^{S_{n_0}(\omega)}$. D'autre part, puisque $\mathbb{1}_{\{N=n\}}(\omega) = 0$ pour $n \neq n_0$ et 1 sinon, on a bien $\sum_{n\geq 0} t^{S_n}\mathbb{1}_{\{N=n\}} = t^{S_N}$.
3. On a

$$\begin{aligned}
G_{S_N}(t) &= \mathbb{E}[t^{S_n}] \\
&= \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{+\infty} t^{S_n}\mathbb{1}_{\{N=n\}}\right] && \text{(d'après la question précédente)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{E}\left[t^{S_n}\right]\mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{N=n\}}] && \text{(linéarité de l'espérance et indépendance de } S_n \text{ et } N) \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} G_{S_n}(t)\mathbb{P}(N=n) && \text{(espérance d'une Bernoulli)} \\
&= \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(N=n)(G_X(t))^n && \text{(indépendance des } X_i) \\
&= G_N(G_X(t)).
\end{aligned}$$

4. On note P_1 la première pièce et P_2 la seconde que l'on assimile à des Bernoulli avec 0 pour face et 1 pour pile. On suppose qu'on choisit la première pièce pour compter le nombre de piles jusqu'à tomber sur une face que l'on note N et la seconde pour compter le total de piles ensuite que l'on note S_N. Il suffira d'inverser p et q dans les résultats que l'on trouvera pour comparer avec l'autre cas. La variable N suit une loi géométrique de paramètre $\mathbb{P}(P_1 = 0) = 1 - q$. On a donc, d'après la première partie de l'exercice,

$$G_{S_N}(t) = G_N(G_{P_2}(t)) = G_N((1-p) + pt).$$

Ce qui nous intéresse c'est l'espérance de S_N, i.e. $G'_{S_N}(1)$. Or on a

$$G'_{S_N}(1) = pG'_N(1) = \frac{p}{1-q}.$$

Si on avait choisi l'autre pièce pour commencer l'espérance du nombre de piles final serait $\frac{q}{1-p}$. Il nous reste donc à résoudre

$$\begin{array}{rrl}
 & \frac{p}{1-q} & \leq \frac{q}{1-p} \\
\Leftrightarrow & p(1-p) & <\leq (1-q) \\
\Leftrightarrow & p-q & \leq p^2 - q^2 \\
\Leftrightarrow & 0 & \leq (p-q)(p+q-1) \\
\Leftrightarrow & \left\{\begin{array}{r} p \geq q \\ p+q \geq 1 \end{array}\right. & \text{ou } \left\{\begin{array}{r} p \leq q \\ p+q \leq 1 \end{array}\right.
\end{array}$$

donc dans ces cas il vaut mieux choisir la seconde pièce pour commencer et dans les autres cas il vaut mieux choisir la première.

Exercice 217 (correction)

À venir.

Exercice 218 (correction)

On note B_n le nombre de boucles formées après k étapes.

À la n-ème étape on a noué $2(n-1)$ extrémités entre elles, il en reste alors $2(N-n+1)$ disponibles. On en choisit une au hasard. Cette extrémité appartient à une composante qui n'est pas une boucle car les boucles n'ont aucune extrémité disponible. Cette composante possède une unique autre extrémité et la seule façon de créer une nouvelle boucle est de choisir cette extrémité, ceci avec probabilité $\frac{1}{2N-2n+1}$. Formellement on peut poser les évènements
A_n : « On forme une boucle à l'étape n ».

On a alors le nombre de boucle formées à n étapes qui vaut $\sum_{i=1}^{n} \mathbb{1}_{A_i}$. Donc l'espérance du nombre de boucle à la fin des N étapes est

$$\mathbb{E}[B_N] = \mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{N} \mathbb{1}_{A_n}\right] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_n}\right] = \sum_{n=1}^{N} \mathbb{P}(A_n) = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2N-2n+1} = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1}.$$

Il s'agit d'une série divergente de terme général $\dfrac{1}{2n-1} \sim \dfrac{1}{2n}$ donc

$$\mathbb{E}[B_N] = \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n-1} \underset{N\to+\infty}{\sim} \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{2n} \underset{N\to+\infty}{\sim} \frac{1}{2}\ln(n).$$

Exercice 219 (correction)

1. On commence par remarquer que si $\mathrm{pgcd}(n,d) = 1$ alors, d'après l'identité de Bézout, il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $nu + dv = 1$ donc $\overline{dv} = 1 \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et donc
$$D_{vd} = \left\{\overline{vdk} \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid k \in \mathbb{Z}\right\} = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \subseteq D_d$$
donc $D_d = \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On peut alors faire le cas général. On pose $\delta = \mathrm{pgcd}(n,d)$ et $d = \alpha\delta$ et $n = \beta\delta$. On a alors $\mathrm{pgcd}(\alpha, n) = 1$ donc
$$D_d = d\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \delta\alpha\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = \delta\,(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}) = D_\delta.$$
Enfin, $D_\delta = \left\{\overline{0}, \overline{\delta}, \overline{2\delta}, \dots, \overline{(\beta-1)\delta}\right\}$ car $\beta\delta = n = 0 \mod n$ et toutes les classes sont distinctes. Donc, par définition de la probabilité uniforme on a
$$P(D_d) = \frac{\beta}{n} = \frac{1}{\delta} = \frac{1}{\mathrm{pgcd}(n,d)}.$$
2. On note $\delta_i = \mathrm{pgcd}(n, d_i)$. On a $D_{d_1} \cap \dots \cap D_{d_r} = D_{\delta_1} \cap \dots \cap D_{\delta_r}$ et les δ_i sont aussi premiers entre eux deux à deux. Pour $m \in \mathbb{Z}$ tel que $\overline{m} \in D_{\delta_1} \cap \dots \cap D_{\delta_r}$ on a $\forall 1 \leq i \leq r, \delta_i \mid m$. Mais les δ_i étant premiers entre eux, d'après le lemme de Gauss, $\delta_1 \cdots \delta_r \mid m$. D'où l'on déduit que $\overline{m} \in D_{\delta_1\cdots\delta_r}$. On a alors $D_{\delta_1} \cap \dots \cap D_{\delta_r} = D_{\delta_1\cdots\delta_r}$ (l'autre inclusion est immédiate). Finalement,
$$\mathbb{P}\left(D_{d_1} \cap \dots \cap D_{d_r}\right) = \mathbb{P}\left(D_{\delta_1} \cap \dots \cap D_{\delta_r}\right) = \mathbb{P}\left(D_{\delta_1\cdots\delta_r}\right) = \frac{1}{\delta_1 \cdots \delta_r} = \frac{1}{\delta_1} \cdots \frac{1}{\delta_r} = \mathbb{P}\left(D_{d_1}\right) \cdots \mathbb{P}\left(D_{d_r}\right).$$
3. On considère l'évènement $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$, l'ensemble des inversibles modulo n qui est de cardinal $\varphi(n)$. On a $\overline{m} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \Leftrightarrow \forall 1 \leq i \leq r, \overline{m} \notin D_{p_i}$, i.e. $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times = \bigcap_{i=1}^{r} D_{p_i}^c$. Or deux évènements sont indépendants si, et seulement si leurs complémentaires sont aussi indépendants. On en déduit que
$$\mathbb{P}\left((\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times\right) = \frac{\varphi(n)}{n} = \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{r} D_{p_i}^c\right) = \prod_{i=1}^{r} \mathbb{P}\left(D_{p_i}^c\right) = \prod_{i=1}^{r}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right).$$

Exercice 220 (correction)

1. On a 1 valeur propre évidente car la matrice $M - I_n$ est de rang 1. Par le théorème du rang l'espace propre associé est de dimension $n-1$. Donc 1 est de multiplicité au moins $n-1$ dans le polynôme caractéristique. On note λ la valeur propre de M qui est encore inconnue. Elle doit vérifier
$$\operatorname{Tr}(M) = 0 = \lambda + 1 + \cdots + 1 = \lambda + n - 1$$
donc $\lambda = -n+1$. On en déduit que $\chi_M(X) = (X-1)^{n-1}(X+n-1)$.
2. D'après la question précédente le polynôme caractéristique de M vérifie $\chi_M(X) = \det(XI_n - M) = (X+n-1)(X-1)^n$. Par ailleurs, par définition du déterminant
$$\det(XI_n - M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) a_{i,\sigma(i)}$$
avec $a_{i,\sigma(i)} = X$ si $\sigma(i) = i$ et 1 sinon. Donc on a bien
$$\det(XI_n - M) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \varepsilon(\sigma) X^{\nu(\sigma)}.$$
3. Le coefficient constant de χ_M correspond aux permutations sans point fixe donc aux éléments de $\mathfrak{D}_n$. En identifiant les coefficients constants des deux polynômes à gauche et à droite de l'égalité obtenue en question 2 on obtient
$$\operatorname{Card}\left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = 1\right\} - \operatorname{Card}\left\{\sigma \in \mathfrak{D}_n \mid \varepsilon(\sigma) = -1\right\} = (-1)^{n-1}(n-1).$$
4. On a alors
$$\mathbb{P}(Y_n = 1) = \frac{\#K_1}{\mathfrak{D}_n} = \frac{\#K_{-1} + (-1)^n(n-1)}{\mathfrak{D}_n} = \mathbb{P}(Y_n = -1) + \frac{(-1)^n(n-1)}{\mathfrak{D}_n}.$$
En ajoutant $\mathbb{P}(Y_n = 1)$ de part et d'autre on obtient alors
$$2\mathbb{P}(Y_n = 1) = 1 + \frac{(-1)^n(n-1)}{\mathfrak{D}_n} \text{ donc } \left|\mathbb{P}(Y_n = 1) - \frac{1}{2}\right| = \frac{n-1}{2 \cdot n! \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}}.$$
Or $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \longrightarrow e^{-1}$. D'où $\left|\mathbb{P}(Y_n = 1) - \frac{1}{2}\right| \sim \frac{e}{2(n-1)!}$.

Exercice 221 (correction)

Pour alléger les notations on notera A l'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On commence par considérer le cas $n = p$ premier. Dans ce cas $A = \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est un anneau intègre donc on a l'égalité des évènements
$$\{XY = 0\} = \{X = 0\} \cup \{Y = 0\} = \overline{\{X \neq 0\} \cap \{Y \neq 0\}} \text{ donc } \mathbb{P}(XY = 0) = 1 - \frac{(p-1)^2}{p^2} = \frac{2p-1}{p^2}.$$
On s'intéresse désormais au cas $n = p^s$. On remarque que pour $a, b \in A$ on a $ab = 0 \Leftrightarrow p^s \mid ab \Leftrightarrow \exists k, m$ tels que $k + m \geq s$ avec $p^k \mid a$ et $p^m \mid b$. Ainsi, on a l'égalité des évènements
$$\{XY = 0\} = \bigcup_{k=0}^{s} \left(\left\{X \in p^k A\right\} \cap \bigcup_{m=s-k}^{s} \{Y \in p^m A\} \right)$$
Malheureusement, les unions ne sont pas disjointes mais on peut se restreindre aux $X \in p^k A \setminus p^{k+1} A$. En considérant, pour $k < s$, le morphisme de groupes injectif
$$\begin{array}{rccl} \gamma : & \mathbb{Z}/p^{s-k}\mathbb{Z} & \longrightarrow & p^k A \\ & u & \longmapsto & p^k u \end{array}$$

on a $\gamma\left((\mathbb{Z}/p^{s-k}\mathbb{Z})^\times\right) = p^k A \setminus p^{k+1}A$ ce qui donne $\#\left(p^k A \setminus p^{k+1}A\right) = \varphi\left(p^{s-k}\right) = p^{s-k-1}(p-1)$. Bien sûr, pour $k = s$, on a $p^s A \setminus p^{s+1}A = p^s A = \{0\}$. On peut donc passer au calcul

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(XY=0) &= \sum_{k=0}^{s} \mathbb{P}(X \in p^k A \setminus p^{k+1}A) \sum_{m=s-k}^{s} \mathbb{P}(Y \in p^m A \setminus p^{m+1}A) \\
&= \frac{1}{p^{2s}} \left(\underbrace{p^s}_{\text{terme pour} k=s} + \sum_{k=0}^{s-1} p^{s-k-1}(p-1) \left(1 + \sum_{m=s-k}^{s-1} p^{s-m-1}(p-1) \right) \right) \\
&= \frac{1}{p^{2s}} \left(p^s + \sum_{k=0}^{s-1} p^{s-k-1}(p-1) \left(1 + \sum_{m=0}^{k-1} p^m (p-1) \right) \right) \\
&= \frac{1}{p^{2s}} \left(p^s + \sum_{k=0}^{s-1} p^{s-k-1}(p-1)\left(p^k\right) \right) = \frac{p^s + sp^{s-1}(p-1)}{p^{2s}} = \frac{p+s(p-1)}{p^{s+1}} \\
&= \frac{(s+1)p-s}{p^{s+1}}.
\end{aligned}$$

Cela semble correspondre avec le résultat trouvé lorsque $s = 1$ ce qui est plutôt bon signe. On peut donner le coup de grâce pour le cas général $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ à l'aide du théorème des restes qui fournit un isomorphisme d'anneaux

$$\pi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/p_1^{\alpha_1}\mathbb{Z} \times \cdots \times \mathbb{Z}/p_r^{\alpha_r}\mathbb{Z}$$

par réduction sur chaque composante. Ainsi

$$XY = 0 \Leftrightarrow \pi(X)\pi(Y) = 0 \Leftrightarrow \forall j \in \{1, \ldots, r\}, XY \equiv 0 \mod p^{\alpha_j}.$$

On peut être tenté de conclure tout de suite mais il me semble judicieux de justifier deux faits :

Fait 1 : Que les variables réduites modulo p^{α_j} gardent une loi uniforme sur $\mathbb{Z}/p^{\alpha_j}\mathbb{Z}$.

Fait 2 : Pour pour $n = ab$ avec a et b premiers entre eux, en notant $X_a \coloneqq X \mod a$ et $X_b \coloneqq X \mod b$ alors X_a et X_b sont indépendantes.

Le premier fait est en fait vrai pour tout diviseur $m \mid n$. On a $X_m \coloneqq X \mod m$ qui suit une uniforme sur $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$. En effet, le morphisme $\pi : \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ à pour noyau $\ker \pi = m(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})$ qui est de cardinal $\dfrac{n}{m}$ donc

$$\mathbb{P}(X_m = \overline{k}) = \mathbb{P}(X - k \in \ker \pi) = \frac{\frac{n}{m}}{n} = \frac{1}{m}.$$

Le second fait provient de la bijectivité de la réduction sur chaque composante donnée par le théorème des restes $\pi : \mathbb{Z}/ab\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$. En effet on a alors pour tout $(k,m) \in \mathbb{Z}/a\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/b\mathbb{Z}$

$$\mathbb{P}(X_a = k, X_b = m) = \mathbb{P}(\pi(X) = (k,m)) = \mathbb{P}(X = \pi^{-1}(k,m)) = \frac{1}{n} = \frac{1}{ab} = \frac{1}{a}\frac{1}{b} = \mathbb{P}(X_a = k)\mathbb{P}(X_b = m)$$

car X_a et X_b sont des uniformes d'après le Fait 1. On peut enfin conclure que pour $n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_r^{\alpha_r}$ on a

$$\mathbb{P}(XY=0) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{r} XY \equiv 0 \mod p_j^{\alpha_j} \right) \underbrace{=}_{\text{Fait 2}} \prod_{j=1}^{r} \mathbb{P}\left(XY \equiv 0 \mod p_j^{\alpha_j} \right) \underbrace{=}_{\text{Fait 1}} \prod_{j=1}^{r} \frac{(\alpha_j+1)p_j - \alpha_j}{p_j^{\alpha_j+1}} = \frac{1}{n} \prod_{j=1}^{r} \left(1 + \alpha_j \left(1 - \frac{1}{p_j} \right) \right).$$

Exercice 222 (correction)

1. Soit σ une permutation possédant k cycles dans sa décomposition en cycles disjoints. Si $\sigma(n) = n$ alors se donner un tel σ revient à se donner une permutation de $\{1, \ldots, n-1\}$ à $k-1$ cycles.

   Si maintenant $\sigma(n) = m < n$ alors on pose $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ une nouvelle permutation où on a simplement retiré n du cycle dans lequel il était dans σ. Ce τ a bien k-cycles dans sa décomposition. Réciproquement, étant donné $m \in \{1, \ldots, n-1\}$ et $\tau \in \mathfrak{S}_{n-1}$ on peut reconstruire σ en plaçant n juste avant m dans le cycle contant m dans la décomposition de τ. On a donc $(n-1)a_{n-1}, k$ permutation à k cycles ne fixant pas n. Par conséquent

$$a_{n,k} = a_{n-1,k-1} + (n-1)a_{n-1,k}.$$

2. Par récurrence, on a bien $A_1(t) = a_{1,1}t = t$ puisque $\mathfrak{S}_1$ possède un seul élément (1) qui se décompose en 1 cycle de longueur 1. Soit $n \geq 2$ tel que $A_{n-1}(t) = (t+n-2)\cdots(t+1)t$. On a

$$A_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}t^k = \sum_{k=1}^{n} a_{n-1,k-1}t^k + \sum_{k=1}^{n}(n-1)a_{n-1,k}t^k = tA_{n-1}(t)+(n-1)A_{n-1}(t) = (t+n-1)A_{n-1}(t) = \underbrace{=}_{\text{H.R.}}(t+n-1)(t+n-2)\cdots t.$$

3. La fonction génératrice de X vérifie

$$G_X(t) = \sum_{k=1}^{n} \mathbb{P}(X=k)t^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n,k}}{n!}t^k = \frac{1}{n!}A_n(t).$$

   Or on a $G'_X(t) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}(t+j-1)$. L'espérance de X est alors donnée par $\mathbb{E}[X] = G'_X(1) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\prod_{j\neq k}(1+j-1) = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = H_n$ avec (H_n) qui désigne la suite des sommes partielles harmoniques. Par ailleurs, $G''_X(t) = \frac{1}{n!}\sum_{k=1}^{n}\sum_{j\neq k}\prod_{i\neq j}(t+i-1)$. Donc

$$G''_X(1) = \mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{k=1}^{n} H_k - \frac{1}{k} = \left(\sum_{k=1}^{n} H_k\right) - H_n \text{ donc } \mathbb{E}\left[X^2\right] = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{k}\frac{1}{j} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=j}^{n}\frac{1}{j} = \sum_{k=1}^{n}\frac{n-j+1}{j} = (n+1)H_n - n.$$

   Finalement $\mathbb{V}[X] = \mathbb{E}\left[X^2\right] - \mathbb{E}[X]^2 = (n+1)H_n - n - H_n^2$ et on a

$$\mathbb{E}[X] \sim \ln(n) \text{ et } \mathbb{V}[X] \sim n\ln(n).$$

10. *Calcul différentiel - corrections*

Exercice 223 (correction)

On propose deux méthodes.

Méthode 1 : avec multiplicateur de Lagrange. On pose $g(x, y) = x^2 + y^2 - 1$. On a $dg(x, y) = 2xdx + 2ydy$ donc dg n'est pas nulle sur $S = g^{-1}(\{0\})$ de telle sorte que si f est localement extrémale en (x, y) alors $df(x, y)$ et $dg(x, y)$ sont colinéaires. Disons $df(x, y) = \lambda dg(x, y)$. Ceci revient à écrire

$$\begin{cases} y = 2\lambda x \\ x = 2\lambda y \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

Donc $y = 4\lambda^2 y$ donc $y = 0$ (impossible car on aurait alors $x = 0$) ou $4\lambda^2 = 1$, i.e. $\lambda = \pm\frac{1}{2}$. Grâce à $x^2 + y^2 = 1$ on a $x^2 \times 2 = 1$ donc $x = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}$. On a alors 4 points critiques qui sont $\left(\pm\frac{1}{\sqrt{2}}, \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. On montre alors que les minima correspondent à $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et $\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ et les maxima aux deux autres. En effet, pour les minima potentiels on aurait $f(x, y) = \frac{1}{2}$ or pour $x^2 + y^2 = 1$ on a $(x + y)^2 = 1 + 2xy \geq 0$ donc on a bien $xy + 1 \geq \frac{1}{2}$ de même $(x - y)^2 = 1 - 2xy \geq 0$ donc $f(x, y) \leq \frac{3}{2}$ donc on a bien des maxima et des minima.

Méthode 2 : On fait le changement de variable $x = \cos(\theta)$ et $y = \sin(\theta)$ ce qui donne $f(x, y) = \cos(\theta)\sin(\theta) + 1 = \frac{1}{2}\sin(2\theta) + 1$. On a $\theta \mapsto \sin(2\theta)$ maximale pour $\theta \equiv \frac{\pi}{4} \mod \pi$ qui donnent bien les deux maxima qu'on avait trouvé dans la méthode précédente. La fonction est minimale pour $\theta \equiv -\frac{\pi}{4} \mod \pi$.

Exercice 224 (correction)

Soit $a, h \in E$. Par différentiabilité de f en a on a

$$(u \circ f)(a + h) = u(f(a) + df(a)(h) + o(h)) = u(f(a)) + u(df(a)(h)) + u(o(h)).$$

On a bien $u \circ df(a)$ linéaire. Par ailleurs avec $o(h) = ||h||\,\varepsilon(h)$ on a $u(o(h)) = ||h||\,u(\varepsilon(h))$ par linéarité de u. De plus, par continuité de u on a $u(\varepsilon(h))$ qui tend vers 0 lorsque h tend vers 0. Donc $u(o(h)) = o(h)$.

Exercice 225 (correction)

Soit $a, h \in E$. Par différentiabilité de f en $u(a)$ on a

$$(f \circ u)(a + h) = f(u(a) + u(h)) = f(u(a)) + df(u(a))(u(h)) + o(u(h)).$$

On a bien $df(u(a)) \circ u$ linéaire et puisque u est un endomorphisme en dimension finie il est continu donc lipschitzien. Donc $o(u(h)) = ||u(h)||\,\varepsilon(u(h))$ avec $\lim\limits_{u(h)\to 0} \varepsilon(u(h)) \to 0$. Or

$$||u(h)||\,\varepsilon(u(h)) = ||h||\,\widetilde{\varepsilon}(h)$$

avec $\widetilde{\varepsilon}(h) = \frac{||u(h)||}{||h||}\varepsilon(u(h))$ qui tend bien vers 0 lorsque h tend vers 0 par lipschitziannité de u.

Exercice 226 (correction)

Lorsque $(x, y) \neq (0, 0)$ la fonction f est de classe C^∞ comme composée, produit et quotient de fonction de classe C^∞ dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, pour $(x, y) \neq (0, 0)$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{y\cos(xy)(x^2 + y^2) - 2x\sin(xy)}{(x^2 + y^2)^2} \text{ et, par symétrie, } \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x\cos(xy)(x^2 + y^2) - 2y\sin(xy)}{(x^2 + y^2)^2}.$$

Il reste à déterminer les dérivées partielles en $(0,0)$ si elles existent. C'est le cas et on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} 0 = 0 \text{ de même, par symétrie, } \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

On pourrait alors étudier la continuité des dérivées partielles en $(0,0)$ mais on est plus malin que ça ! On remarque qu'on a l'équivalent $f(t,t) = \dfrac{\sin(t^2)}{2t^2} \sim \dfrac{1}{2} \neq 0$ au voisinage de $t = 0$. Autrement dit, f n'est même pas continue en 0 elle ne sera donc pas différentiable et encore moins de classe $\mathcal{C}^1$.

Exercice 227 (correction)

Le système différentiel peut se réécrire $X' = AX$ avec $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. On diagonalise A ou si on ne peut pas on la trigonalise et si on ne peut pas on improvise. On remarque que A a une valeur propre évidente qui est -1. On a $A - (-I_3) = A + I_3$, la matrice composée que de 1. Cette matrice est évidemment de rang 1 donc son noyau E_{-1} est de dimension 2. Donc -1 est une valeur propre de multiplicité au moins 2 et la dernière valeur propre λ satisfait $\mathrm{Tr}(A) = -1 - 1 + \lambda = 0$ donc $\lambda = 2$. Puisque l'espace propre associé à λ est de dimension au moins 1, il est de dimension exactement 1. Donc A est diagonalisable car les dimensions des espaces propres sont les mêmes que les multiplicités de ces dernières. On a évidemment comme vecteurs propres $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ qui forment une base de E_{-1} et $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vecteur propre associé à 2. On pose P la matrice de passage de la base canonique à (v_1, v_2, v_3)
On a alors

$$X' = AX \Leftrightarrow P^{-1}X' = P^{-1}AX \Leftrightarrow Y' = (P^{-1}AP)Y$$

avec $Y = P^{-1}X$. Par construction $D = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ donc les solutions de $Y' = DY$ sont $S = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} \\ \mu e^{-t} \\ \gamma e^{2t} \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R} \right\}$ donc X solution du système de départ si et seulement si $X = PY$ donc l'ensemble des solutions du système de départ est

$$S' = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda e^{-t} & +\mu e^{-t} & +\gamma e^{2t} \\ & -\mu e^{-t} & +\gamma e^{2t} \\ -\lambda e^{-t} & & +\gamma e^{2t} \end{pmatrix} \mid \lambda, \mu, \gamma \in \mathbb{R} \right\}.$$

Exercice 228 (correction)

Soit $f, h \in \mathcal{L}(E)$, on a

$$\Phi(f+h) = (f+h)^2 = (f+h)\circ(f+h) = f^2 + fh + hf + h^2.$$

On a alors $d\Phi(f) : \begin{array}{rcl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ h & \longmapsto & fh + hf \end{array}$ linéaire et c'est la différentielle de Φ en f si $h^2 = o(h)$. On a $\left|\left|\left| h^2 \right|\right|\right| \leq |||h|||^2$ donc $h^2 = |||h||| \cdot \underbrace{\frac{1}{|||h|||} h^2}_{\to 0} = o(h)$. Donc Φ est différentiable en tout point $f \in \mathcal{L}(E)$. On peut conclure sur son caractère $\mathcal{C}^1$ de deux façon différentes.

Méthode 1 : L'application $B:\ (f,g)\mapsto fg$ est bilinéaire en dimension finie donc de classe $\mathcal{C}^\infty$. Or $\Phi(f)=B(f,f)$ est aussi de classe $\mathcal{C}^\infty$. **Méthode 2 :** L'application

$$d\Phi:\quad \begin{array}{rl} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow \mathcal{L}(\mathcal{L}(E)) \\ f & \longmapsto d\Phi(f) \end{array}$$

est linéaire car on a pour tout $h\in\mathcal{L}(E)$, $d\Phi(\lambda f_1+\mu f_2)(h)=\lambda d\Phi(f_1)(h)+\mu d\Phi(f_2)(h)$. Donc $d\Phi$ est linéaire et $\mathcal{L}(E)$ est de dimension finie donc $d\Phi$ est continue.

Exercice 229 (correction)

En $(x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\Delta$ on a f de classe $\mathcal{C}^\infty$ comme composée, produit et quotient de fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ dont le dénominateur ne s'annule pas. Par ailleurs, pour $(x,y)\notin\Delta$, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)-\frac{xy}{x^2+y^2}\text{ et }\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{x^2}{x^2+y^2}.$$

Il reste à déterminer les dérivées partielles en $(0,y)$ si elles existent. Si $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ existe alors, par définition, il s'agit de la limite, lorsque h tend vers 0, de

$$\frac{f(h,y)-f(0,y)}{h}=\operatorname{Arctan}\left(\frac{y}{h}\right)$$

qui n'existe que lorsque $y=0$ et qui vaut alors 0. On a alors $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$. Pour y on a $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ définie par la limite si elle existe, lorsque h tend vers 0, de

$$\frac{f(0,y+h)-f(0,y)}{h}=0$$

donc on a $\forall y\in\mathbb{R},\ \dfrac{\partial f}{\partial x}(0,y)=0$.

Pour le caractère $\mathcal{C}^1$ il n'y a aucune chance pour que f soit de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,y)$ pour $y\neq 0$ puisqu'elle n'admet même pas de dérivée partielle en x en ces points. Mais il reste cependant $(0,0)$ où les deux dérivées partielles existent et valent 0. Cependant on a $\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{\partial f}{\partial y}(t,t)=\dfrac{1}{2}\neq 0$ donc $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ n'est pas continue en $(0,0)$ donc f n'est pas de classe $\mathcal{C}^1$ en $(0,0)$ non plus. Elle est donc de classe $\mathcal{C}^1$ seulement sur $\mathbb{R}^2\setminus\Delta$.

Exercice 230 (correction)

On remarque, en passant en coordonnées polaires $x=\rho\cos(\theta)$, $y=\rho\sin(\theta)$, que $|f(\rho\cos(\theta),\rho\sin(\theta))|\leq 2\rho e^{-2\rho^2}\to 0$. Ainsi, il existe $M>0$ tel que pour $\rho>M$, $|f(x,y)|<\dfrac{f(1,-1)}{2}$. On en déduit que f étant continue (et même $\mathcal{C}^\infty$) elle admet un maximum sur la boule fermée $\mathbb{B}(0,M)$ qui est compacte. Notons (x_0,y_0) un point où ce maximum est atteint. Par ailleurs $(1,-1)\in\mathbb{B}(0,M)$ par construction donc ce maximum vérifie $\forall(x,y)\in\mathbb{B}(0,M)$, $f(x_0,y_0)\geq f(x,y)$ par définition et

$$\forall(x,y)\notin\mathbb{B}(0,M),\ f(x_0,y_0)\geq f(1,-1)>\frac{f(1,-1)}{2}>|f(x,y)|\geq f(x,y).$$

donc le maximum est global. On remarque que puisque pour tout x,y on a $f(x,y)=-f(y,x)$ la fonction admet aussi un minimum alors atteint en (y_0,x_0).

On cherche désormais les extrema locaux en cherchant les points d'annulation de la différentielle. Les calculs montrent qu'on a (x,y) point critique si, et seulement si

$$\left\{\begin{array}{rl} 1-2x^2+2xy & =0 \\ -1+2y^2-2xy & =0 \end{array}\right.$$

Ceci donne $x = \pm y$ en sommant les deux lignes. Puis, on remarque que la ligne (1) donne $1 = 0$ en injectant $y = x$ donc on a forcément $y = -x$. En injectant ceci dans la première ligne on obtient $x = \pm\frac{1}{2}$. Ceci donne deux points critiques $\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$ et $\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$. De par l'étude faite précédemment on sait que f admet au moins deux extrema ; un maximum global et un minimum global. Il s'agit donc de l'un et de l'autre. Puisque $f\left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right) > 0$ il s'agit du maximum global et $f\left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ est le minimum global. Ceci serait bien entendu confirmé par une étude des matrices Hessiennes en ces points mais ça n'est pas nécessaire de faire les calculs.

Exercice 231 (correction)

On va montrer que f est égale à sa différentielle en 0. On commence par remarquer que $f(0) = 0$. En effet, pour tout $x \in E$, $f(0) = f(0 \cdot x) = 0 \cdot f(x) = 0$. Par définition de la différentiabilité en 0 on a par ailleurs, pour λ proche de 0

$$f(\lambda x) = f(0) + df(0)(\lambda x) + o(\lambda) = \lambda df(0)(x) + \underset{\lambda \to 0}{o}(\lambda) = \lambda f(x)$$

On en déduit que $df(0)(x) = f(x) + \underset{\lambda \to 0}{o}(1)$, puis, en faisant tendre λ vers 0 on a $df(0)(x) = f(x)$ donc f est égale à sa différentielle en 0.

Exercice 232 (correction)

À venir. Utiliser l'inégalité de Taylor Lagrange pour obtenir le petit o.

Exercice 233 (correction)

Par définition $O_n(\mathbb{R}) = f^{-1}(I_n)$ avec

$$f : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \longmapsto & A^T A. \end{array}$$

Donc l'espace tangent est donné par $T_{I_n} O_n(\mathbb{R}) = \ker df(I_n)$ L'application f est bien de classe C^1 comme restriction de l'application produit $\pi : (A, B) \longmapsto A^T B$ (qui est bilinéaire donc de classe C^∞) à la diagonale $\left\{(A, A) \mid A \in M_n(\mathbb{R})\right\}$ du produit cartésien $M_n(\mathbb{R})^2$. Sa différentielle est alors donnée par

$$df(A)(H) = d\pi(A, A)(H) = \pi(A, H) + \pi(H, A) = A^T H + H^T A.$$

On a alors $df(I_n)(H) = H + H^T$ donc $\ker df(I_n) = A_n(\mathbb{R})$, l'ensemble des matrices antisymétriques.

Exercice 234 (correction)

Par définition $\mathrm{SL}_n(\mathbb{R})$ est la ligne de niveau $\det^{-1}(\{1\})$. Donc l'espace tangent correspondant est $d\det(I_n)$. La différentielle du déterminant étant un peu pénible à expliciter on ne va l'expliciter qu'en I_n. Pour cela on va s'appuyer sur la formule $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{Tr}(A))$. Plus précisément on va appliquer la formule de différentiation d'une composée $d(g \circ f)(a) = dg(f(a)) \circ df(a)$ à l'application $h = \det \circ \exp = \exp \circ \mathrm{Tr}$ en 0. Cela donne

$$d(\det \circ \exp)(0) = d\det(\exp(0)) \circ d\exp(0) = d\det(I_n) \circ \mathrm{id} = d\det(I_n) \text{ d'une part et } d\exp(\mathrm{Tr}(0)) \circ d\,\mathrm{Tr}(0) = 1 \cdot \mathrm{Tr} \text{ d'autre part.}$$

En effet, $d\exp(0_{M_n(\mathbb{R})}) = \mathrm{id}_{M_n(\mathbb{R})}$ car $\exp(H) = \sum_{k=0}^{+\infty} H^k/k! = I_n + H + o\left(H^2\right)$ et $\forall A \in M_n(\mathbb{R}), d\,\mathrm{Tr}(A) = \mathrm{Tr}$ car la trace est linéaire. On a donc $d\det(I_n) = \mathrm{Tr}$. D'où $T_{I_n} \mathrm{SL}_n(\mathbb{R}) = \ker(\mathrm{Tr})$.

Exercice 235 (correction)

1. On a
$$df(P,Q): \quad \begin{array}{rcl} \mathbb{R}_{p-1}[X]\times\mathbb{R}_{q-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{p+q}[X] \\ (U,V) & \longmapsto & (X^q+Q)U+(P+X^p)V. \end{array}$$

2. Si df est inversible alors elle est surjective donc il existe $U,V\in\mathbb{R}_{p-1}[X]\times\mathbb{R}_{q-1}[X]$ tels que $df(U,V)=(X^q+Q)U+(P+X^p)V=1$ donc il existe une identité de Bézout donc X^q+Q et X^p+P sont premiers entre eux. Réciproquement, si (X^q+Q) et (X^p+P) sont premiers entre eux et considérons $(U,V)\in\ker(df(P,Q))$, i.e. $(X^q+Q)U=-(X^p+P)V$. Par le lemme de Gauss on a alors $X^q+Q\mid V$ donc $V=0$ car $\deg V\leq q-1$. De même $U=0$ donc $df(P,Q)$ est injective et linéaire entre deux espaces de même dimension donc elle est bien inversible.

Exercice 236 (correction)

1. Commençons par observer que pour $f\in E$, f et f' sont continues sur un segment donc elles sont bornées ce qui justifie le caractère bien défini des applications n et N. On ne justifie que l'axiome $||x||=0\Rightarrow x=0$ pour chaque norme, les autres sont de simples vérifications. Soit $f\in E$ telle que $n(f)=0$ alors $f=0$ et $f'=0$. En particulier $f=0$. Soit $f\in E$ telle que $N(f)=0$ alors $f+f'=0$. Il s'agit d'une équation différentielle d'ordre 1 dont toutes les solutions sont de la forme $f(x)=\lambda e^{-x}$. L'hypothèse $f(0)=0$ impose $\lambda=0$ donc $f=0$.
2. On a $\forall x\in[0,1]$,
$$\left|f(x)+f'(x)\right|\leq \underbrace{|f(x)|}_{\leq||f||_\infty}+\underbrace{\left|f'(x)\right|}_{\leq||f'||_\infty} \text{ donc } N(f+f')\leq n(f).$$

   Réciproquement, soit $f\in E$ et $g=f+f'$. On veut exprimer f en fonction de f, c'est-à-dire résoudre l'équation différentielle $f'+f=g$ d'inconnue f dans E donc avec la condition initiale $f(0)=0$. Par la méthode de variation de la constante une solution particulière s'exprime sous la forme $f(x)=\lambda(x)e^{-x}$ ce qui correspond, en injectant cette expression dans l'équation différentielle, à $\lambda'(x)=g(x)e^x$. On pose alors $f(x)=\int_0^x g(t)e^t dt e^{-x}$. Cette solution vérifie $f(0)=0$, i.e. $f\in E$ c'est donc l'unique solution du problème de Cauchy qui nous intéressait. On a alors
$$|f(x)|\leq\int_0^x |g(t)|\,e^t dt e^{-x}\leq ||g||_\infty(1-e^{-x}),\text{ i.e. } ||f||_\infty\leq\left(1-e^{-1}\right)\left|\left|f+f'\right|\right|_\infty$$

   De même
$$\left|f'(x)\right|=|g(x)e^x\cdot e^{-x}-f(x)|\leq|g(x)|+|f(x)|\leq\left|\left|f+f'\right|\right|_\infty+||f||_\infty\leq\left(2-e^{-1}\right)\left|\left|f+f'\right|\right|_\infty.$$

   Enfin on a $n(f)\leq\left(3-2e^{-1}\right)N(f)$ ce qui prouve bien que les deux normes sont équivalentes.

Exercice 237 (correction)

1. La distance au carré d'un point $M=(x,y)$ de la courbe à l'origine est donné par $f(x,y)=x^2+y^2$. Il s'agit donc d'optimiser $f(x,y)$ sous la contrainte $g(x,y)=x^4+y^4-1=0$. On remarque que la courbe C est un compact car elle est fermée comme préimage de $\{0\}$ par l'application continue g et bornée car on a $|x|\leq 1$ et $|y|\leq 1$ pour $(x,y)\in C$. On en déduit que f admet nécessairement un minimum et un maximum sur C. Puisque dg ne s'annule pas sur $g^{-1}(\{0\})$ les extrema vérifient $df(x,y)=\lambda dg(x,y)$. On a donc le système suivant
$$\left\{\begin{array}{rl} 2x & =4\lambda x^3 \\ 2y & =4\lambda y^3 \\ x^4+y^4 & =1 \end{array}\right.$$

On en déduit que $x = 0$ et $y = \pm 1$ ou $x = \pm 1$ et $y = 0$ (qui correspondent aux minima $f(x, y) = 1$) ou alors $\lambda = \dfrac{1}{2x^2} = \dfrac{1}{2y^2}$ donc $x^2 = y^2$ donc $2x^4 = 1$, i.e. $x = \pm 2^{-\frac{1}{4}}$ et $y = \pm 2^{-\frac{1}{4}}$ qui correspondent aux maxima $f(x, y) = \sqrt{2}$. La distance maximale est alors $2^{\frac{1}{4}}$ et la minimale est 1.

2. On a pour tout $X, Y \in C, ||X - Y|| \leq ||X|| + ||Y|| \leq 2 \cdot 2^{\frac{1}{4}}$ or cette distance est atteinte pour $X = \left(2^{-\frac{1}{4}}, 2^{\frac{1}{4}}\right)$ et $Y = -X$. Donc le diamètre de C est $2^{\frac{5}{4}}$.

Exercice 238 (correction)

On remarque que par croissance de la fonction carré sur les réels positifs l'aire est maximale lorsque A^2 est maximale. On pose $f(a, b) = (p - a)(p - b)(a + b - p)$ définie sur $D = ([0, p] \times [0, p]) \cap \{(a, b) \mid a + b \geq p\}$ qui est maximale si et seulement si A est maximale. On remarque que f admet forcément un maximum car f est continue sur un compact. Sur les bords la fonction f est nulle donc le maximum est nécessairement atteint dans l'intérieur du domaine. On étudie alors les extrema de f à l'intérieur du domaine en cherchant les points critiques. On a (a, b) point critique si, et seulement si

$$\left\{\begin{array}{lll} \dfrac{\partial f}{\partial a}(a, b) & = (p - b)(2p - 2a - b) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial a}(a, b) & = (p - a)(2p - 2b - a) & = 0 \end{array}\right.$$

Puisqu'il s'agit d'un point intérieur on a forcément $2p - 2a - b = 0$ et $2p - 2b - a = 0$ donc, en soustrayant les deux relations, $a = b$ et $p = 3a$ donc $c = a$ ce qui correspond à un triangle équilatéral.

Exercice 239 (correction)

1. On peut justifier que f est de classe C^1 car l'application inverse l'est ainsi que $P \mapsto AP$. L'application f étant le produit des deux et le produit de matrices étant C^∞ (car bilinéaire en dimension finie) on obtient bien que f est de classe C^1. On va calculer $f(P + H)$ qui existe bien pour H suffisamment petit puisque $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ est ouvert.

$$\begin{aligned} f(P + H) &= (P + H)^{-1} A(P + H) = \left(P(I_n + P^{-1}H)\right)^{-1} A(P + H) \\ &= \left(I_n + P^{-1}H\right)^{-1} P^{-1}AP + \left(I_n + P^{-1}H\right)^{-1} P^{-1}AH \\ &= \left(I_n - P^{-1}H + o(H)\right) P^{-1}AP + \left(I_n - P^{-1}H + o(H)\right) P^{-1}AH \\ &= P^{-1}AP + P^{-1}AH - P^{-1}HP^{-1}AP + o(H) \end{aligned}$$

Donc $df(P)(H) = P^{-1}AH - P^{-1}HP^{-1}AP$.

2. Soit P tel que $f(P) = D$. On note $\mathrm{Spec}(A) = \left\{\lambda_1, \dots, \lambda_s\right\}$ et $m_1, \dots, m_s$ les multiplicités respectives des λ_i et enfin $D = \mathrm{diag}\left(\mu_1, \dots, \mu_n\right)$ avec $\mu_j \in \mathrm{Spec}(A)$. On a $T_PX = \ker df(P)$. Soit $H \in \ker df(P)$ alors $P^{-1}AH - P^{-1}HD = 0$, i.e. $AH = HD$.
En notant $H = (c_1 \mid c_2 \mid \cdots \mid c_n)$ avec c_i les colonnes de H on a

$$AH = HD \Leftrightarrow \left(Ac_1 \mid Ac_2 \mid \cdots \mid Ac_n\right) = \left(\mu_1 c_1 \mid \mu_2 c_2 \mid \cdots \mid \mu_n c_n\right)$$

autrement dit $c_i \in E_i \coloneqq \ker(A - \mu_i I_n)$. Puisqu'il y a m_i des μ_j qui sont égaux à λ_i on a $\ker df(P) \simeq \prod_{i=1}^{s} \ker(A - \lambda_i I_n)^{m_i}$ ce qui donne $\dim(T_PX) = m_1^2 + \cdots + m_s^2$.

Exercice 240 (correction)

1. Pour $f \in \mathcal{C}^2([0,1],\mathbb{R})$ les fonctions f, f' et f'' sont continues sur un segment donc elles sont bornées ce qui justifie que N est bien définie. Par ailleurs, l'inégalité triangulaire et l'homogénéité sont de simples vérifications. Soit $f \in E$ telle que $N(f) = 0$ alors $f + 2f' + f'' = 0$ et $f(0) = f'(0) = 0$. Une telle fonction est alors solution d'un problème de Cauchy linéaire qui n'a alors qu'une seule solution. Puisque 0 est une solution de ce problème de Cauchy alors $f = 0$. Ceci prouve que N est bien une norme.
2. L'équation caractéristique associée à cette équation différentielle à coefficients constant est $r^2+2r+1 = 0$ qui a pour seule racine (double) $r = -1$. Les solutions de l'équation homogène sont donc de la forme $(\lambda + \mu x)e^{-x}$. Pour obtenir une solution particulière on va faire une méthode de variation de la constante en cherchant une solution sous la forme $f(x) = (\lambda(x) + \mu(x)x)\, e^{-x}$ sous la contrainte $\left(\lambda'(x) + \mu'(x)x\right) e^{-x} = 0$, i.e. $\lambda'(x) + x\mu'(x) = 0$. Ceci donne alors

$$\begin{aligned}
f(x) &= (\lambda(x) + \mu(x)x)\, e^{-x} \\
f'(x) &= -\lambda(x)e^{-x} + \mu(x)(e^{-x} - xe^{-x}) = (-\lambda(x) + (1-x)\mu(x))e^{-x} = -f(x) + \mu(x)e^{-x} \\
f''(x) &= -f'(x) + (\mu'(x) - \mu(x))e^{-x} = f(x) + (\mu'(x) - 2\mu(x))e^{-x}.
\end{aligned}$$

   On a alors

$$f''(x) + 2f'(x) + f(x) = f(x) + (\mu'(x) - 2\mu(x))e^{-x} + 2(-f(x) + \mu(x)e^{-x}) + f(x) = \mu'(x)e^{-x} = g(x).$$

   Les fonction λ et μ sont alors des solutions du système

$$\forall x \in [0,1], \begin{cases} \mu'(x) &= g(x)e^x \\ \lambda'(x) + x\mu'(x) &= 0. \end{cases}$$

   On choisit alors $\mu(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)e^t dt$ et $\lambda(x) = \displaystyle\int_0^x tg(t)e^t dt$ ce qui donne la solution particulière

$$f_0(x) = \left(\int_0^x tg(t)e^t dt + x\int_0^x g(t)e^t dt\right) e^{-x}.$$

   Le fait d'imposer $f \in E$ revient à imposer sur les solutions qui nous intéresse les conditions $f(0) = f'(0) = 0$ ce qui impose l'unicité de la solution recherchée. La solution particulière que nous avons trouvé vérifie $f_0(0) = f_0'(0) = 0$ donc elle est dans E donc $f = f_0$ est la solution voulue de notre problème de Cauchy.
3. On a

$$|f(x)| \leq \left(\int_0^x t\,|g(t)|\, e^t dt + x\int_0^x |g(t)|\, e^t dt\right) e^{-x} \leq ||g||_\infty \left(\int_0^x te^t dt + x\int_0^x e^t dt\right) e^{-x} \leq ||g||_\infty\, ||h||_\infty = ||h||_\infty\, N(f)$$

   où h est la fonction définie sur $[0,1]$ par $h(x) = \left(\displaystyle\int_0^x te^t dt + x\int_0^x e^t dt\right) e^{-x}$ qui est continue donc $||h||_\infty$ existe bien. Donc on a bien $||f||_\infty \leq ||h||_\infty\, N(f)$.
4. On considère $f_n(x) = x^n$. Pour $n \geq 2$ il s'agit d'éléments de E. Par ailleurs, $\forall n \geq 2$, $\left|\left|f_n\right|\right|_\infty = 1$ mais $g_n(x) = f_n''(x) + 2f_n'(x) + f_n(x) = n(n-1)x^{n-2} + 2nx^{n-1} + x^n$ vérifie $g_n(1) = n^2 + 1$ donc $N(g_n) \longrightarrow +\infty$ donc il n'existe pas de constante $b \in \mathbb{R}^+$ telle que $\forall f \in E, N(f) \leq b\,||f||_\infty$, i.e. elles ne sont pas équivalentes.

Exercice 241 (correction)

$\boxed{\Rightarrow}$ Supposons que $A^T = -A$. Soit X une solution du système différentiel $X' = AX$. On veut montrer que $||X||$ est constante ce qui revient à montrer que $||X||^2 = \langle X, X\rangle$ est constante. Or le produit scalaire est une application bilinéaire donc différentiable (même de classe $\mathcal{C}^\infty$). On peut donc dériver $\varphi: t \mapsto \langle X(t), X(t)\rangle$ ce qui donne $\varphi'(t) = \langle X'(t), X(t)\rangle + \langle X(t), X'(t)\rangle = 2\langle X'(t), X(t)\rangle$. Puisque la transposée de A est l'adjoint pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ on a alors

$$\varphi'(t) = 2\langle AX(t), X(t)\rangle = 2\left\langle X(t), A^T X(t)\right\rangle = -2\langle X(t), AX(t)\rangle = -\varphi'(t).$$

Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = 0$ donc $\varphi(t)$ est constante donc $||X||$ est aussi constante.

$\boxed{\Leftarrow}$ On propose deux méthodes

Méthode 1 : Supposons que toute solution X de $X' = AX$ soit constante. On a alors $\varphi'(t) = 0$ avec la même application $\varphi: t \mapsto ||X(t)||^2$ que précédemment. Ceci nous donne pour toute solution X

$$\langle AX, X\rangle + \langle X, AX\rangle = \left\langle X, A^T X\right\rangle + \langle X, AX\rangle = \left\langle X, (A + A^T)X\right\rangle = 0. \tag{7}$$

On remarque alors que la matrice $S = A + A^T$ est symétrique réelle donc diagonalisable (dans une base orthonormée) par le théorème spectral. On note $(e_1, \dots, e_n)$ une base de $\mathbb{R}^n$ qui diagonalise S associée à ses valeurs propres $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Par le théorème de Cauchy Lipschitz, pour tout $1 \leq i \leq n$, il existe une unique solution X_i du problème de Cauchy

$$\begin{cases} X' = AX \\ X(0) = e_i \end{cases}$$

En considérant la relation (7) pour la solution X_i au temps $t = 0$ on a

$$\langle e_i, Se_i\rangle = \lambda_i = 0.$$

Par conséquent S est une matrice diagonalisable dont toutes les valeurs propres sont nulles, c'est donc la matrice nulle, i.e. $A = -A^T$.

Méthode 2 : Une solution X s'écrit $\forall t \in \mathbb{R}, X(t) = \exp(At)X_0$. On a alors $\forall X_0 \in \mathbb{R}^n, \forall t \in \mathbb{R}, \left|\left|e^{At}X_0\right|\right| = \left|\left|X_0\right|\right|$, i.e. $\forall t \in \mathbb{R}, e^{At} \in O_n(\mathbb{R})$ donc $e^{A^T t}e^{At} = I_n$. En dérivant on a $A^T e^{A^T t}e^{At} + e^{A^T t}Ae^{At} = 0$ donc

$$e^{A^T t}(A^T + A)e^{At} = 0$$

donc, en évaluant en $t = 0$ on a bien $A^T = A$.

Exercice 242 (correction)

1. Puisque ϕ est autoadjoint il est diagonalisable en base orthonormée $\mathcal{B}_\phi$. On considère $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\phi)} E_\lambda$ la décomposition de E en somme (orthogonale) des espaces propres de ϕ. Soit $v \in E_\lambda$. On a

$$\begin{aligned} \phi(\psi(v)) &= \psi(\phi(v)) && \text{(par commutativité de } \phi \text{ et } \psi) \\ &= \lambda\psi(v) \end{aligned}$$

donc $\psi(v) \in E_\lambda$ donc E_λ stable par ψ. La matrice de ψ dans la base $\mathcal{B}_\phi$ est donc diagonalisable par blocs et chaque bloc est symétrique (car $\psi_{|E_\lambda}$ est toujours autoadjoint). Par le théorème spectral $\psi_{|E_\lambda}$ est diagonalisable dans une base orthonormée $\mathcal{B}_{\psi,\lambda} = \left(v_{\lambda,1}, \dots, v_{\lambda,n_\lambda}\right)$ de E_λ avec $n_\lambda = \dim E_\lambda$ et on pose $\mu_{\lambda,i}$ les valeurs propres associées, i.e. $\psi(v_{\lambda,i}) = \mu_{\lambda,i}v_{\lambda,i}$. On pose $\mathcal{B} = \bigcup_{\lambda \in \mathrm{Sp}(A)} \mathcal{B}_{\psi,\lambda}$ base de E obtenue par concaténation des bases $\mathcal{B}_{\psi,\lambda}$. Dans cette base orthonormée les matrices de ϕ et ψ sont diagonales. En effet, les vecteurs de cette base sont tous des vecteurs propres de ϕ et de ψ.

2. On se place dans la base $\mathcal{B}$ obtenue dans la question précédente. Pour $x = \sum\limits_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\phi)} \sum\limits_{i=1}^{n_\lambda} x_{\lambda,i}v_{\lambda,i}$ exprimé dans cette base on a

$$f(x) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\phi)} \sum_{i=1}^{n_\lambda} \lambda x_{\lambda,i}^2 - \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\phi)} \sum_{i=1}^{n_\lambda} \mu_{\lambda,i}x_{\lambda,i}^2 = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(\phi)} \sum_{i=1}^{n_\lambda} (\lambda - \mu_{\lambda,i})x_{\lambda,i}^2.$$

On remarque donc que $\partial f/\partial x_{\lambda,i} = 2(\lambda-\mu_{\lambda,i})x_{\lambda,i}$ donc si f admet un extremum local en $(x_{\lambda,i})$ alors $\forall \lambda, i, \lambda=\mu_{\lambda,i}$ ou $x_{\lambda,i}=0$. On a alors $f(x)=0$. Par ailleurs, la matrice Hessienne de f est la matrice diagonale diag $\left(\left(\lambda-\mu_{\lambda,i}\right)_{i\in\{1,\dots,n_\lambda\}}\right)_{\lambda\in\mathrm{Sp}(\phi)}$ qui est positive si et seulement si les $\lambda-\mu_{\lambda,i}$ sont tous positifs. La fonction f admet donc un extremum local (par exemple 0) si, et seulement si $\forall\lambda\in\mathrm{Sp}(\phi), \forall i\in\left\{1,\dots,n_\lambda\right\}, \lambda-\mu_{i,\lambda}\geq 0$ ou s'ils sont tous négatifs.

Exercice 243 (correction)

1. L'application det est de classe C^∞ car multilinéaire en dimension finie. On considère (E_{ij}) la base canonique de $M_n(\mathbb{R})$. On cherche à déterminer $\dfrac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(A) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{\det(A+hE_{ij})}{h}$. On sait que ça existe puisque det est différentiable. On a, en développant par rapport à la i-ème colonne,

$$\det(A+hE_{ij}) = \sum_{k=1}^n (-1)^{i+k}\widetilde{a}_{ik}\Delta_{ik} = h\Delta_{ij} + \sum_{k=1}^n(-1)^{i+k}a_{ik}\Delta_{ik} = h(-1)^{i+j}\Delta_{ij}+\det(A)$$

avec $\widetilde{a}_{ik}$ le coefficient en i,k de $A+hE_{ij}$ et Δ_{ik} le mineur d'ordre ik de $A+hE_{ij}$ qui est le même que celui de A puisqu'on supprime la i-ème ligne. Donc $\dfrac{\partial \det}{\partial E_{ij}}(A) = (-1)^{i+j}\Delta_{ij} = (A^+)_{ij}$.

On a alors

$$d\det(A)(H) = \sum_{i,j}(A^+)_{ij}h_{ij} = \sum_{i,j}{}^{\mathrm{t}}(A^+)_{ji}h_{ij} = \sum_{j=1}^n \underbrace{\sum_{i=1}^n {}^{\mathrm{t}}(A^+)_{ji}h_{ij}}_{\left({}^{\mathrm{t}}(A^+)H\right)_{jj}} = \mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{t}}(A^+)H\right).$$

2. Soit $H\in M_n(\mathbb{R})$ on peut toujours trigonaliser H dans $\mathbb{C}$, i.e. $\exists P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ tel que $PHP^{-1}=T$ avec T triangulaire supérieure avec les valeurs propres $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ de H (éventuellement complexes) comptées avec multiplicité sur la diagonale. On a alors $\exp(H)=P^{-1}\exp(T)P$ mais $\exp(T)$ est une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont $e^{\lambda_1},\dots,e^{\lambda_n}$. On en déduit que

$$\det(\exp(H)) = \det(\exp(T)) = \prod_{i=1}^n e^{\lambda_i} = \exp\left(\sum_{i=1}^n\lambda_i\right) = \exp\mathrm{Tr}(H).$$

3. On a $\exp(H) = I+H+\sum\limits_{n=2}^{+\infty}\dfrac{1}{n!}H^n = I+H+o(H)$. Donc $I+H = e^H+o(H) = e^H(I+o(H))$. On en déduit que

$$\det(I+H) = \det\left(e^H(I+o(H))\right) = e^{\mathrm{Tr}(H)}\det(I+o(H)) = e^{\mathrm{Tr}(H)}(1+\underbrace{d\det(I)(o(H))}_{=o(H)}+o(H)) = (1+\mathrm{Tr}(H)+o(H))(1+o(H))$$

Donc $\det(I+H) = 1+\mathrm{Tr}(H)+o(H)$ et on a $d\det(I)(H)=\mathrm{Tr}(H)$.

4. Soit A une matrice inversible. On a alors, grâce à la formule $A^{-1}=\det(A)^{-1}\,{}^{\mathrm{t}}(A^+)$,

$$\begin{aligned}\det(A+H) &= \det(A(I+A^{-1}H)) = \det(A)\det(I+A^{-1}H)\\ &= \det(A)\left(1+\mathrm{Tr}(A^{-1}H)+o(H)\right)\\ &= \det(A)+\mathrm{Tr}\left(\det(A)A^{-1}H\right)+o(H) = \det(A)+\mathrm{Tr}({}^{\mathrm{t}}(A^+)H+o(H)\end{aligned}$$

On a alors bien $\forall A\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}), d\det(A)(H) = \mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{t}}(A^+)H\right)$.

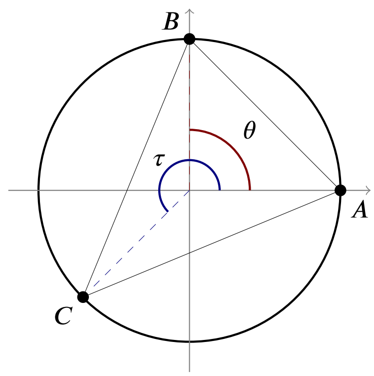
Enfin, à H fixé, l'application $A\longmapsto d\det(A)(H)$ est continue car det est C^1 et $A\mapsto\mathrm{Tr}\left({}^{\mathrm{t}}(A^+)H\right)$ est continue car il s'agit d'une application polynomiale en les coefficients de A. Ces deux applications coïncident sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ qui est dense dans $M_n(\mathbb{R})$ donc coïncident sur $M_n(\mathbb{R})$.

Exercice 244 (correction)

Exercice 245 (correction)

Quitte à conjuguer par la matrice $T = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ on peut se ramener au cas d'un cercle de rayon 1. Une telle matrice modifie les aires d'un facteur $|\det T| = ab$ donc il suffira de multiplier le résultat final par ab.

On considère un triangle ABC inscrit dans le cercle unité. Quitte appliquer une rotation à ce dernier on peut supposer que $A = (1, 0)$. On note alors θ et τ les angles respectifs des points B et C. Quitte à appliquer une symétrie à notre triangle on peut aussi supposer que $0 \leq \theta \leq \tau \leq 2\pi$.



L'aire du triangle est alors donnée par

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\det(B-A, C-A) = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} \cos\theta - 1 & \cos\tau - 1 \\ \sin\theta & \sin\tau \end{vmatrix} &= \frac{1}{2}\left((\cos(\theta)-1)\sin(\tau) - \sin(\theta)(\cos(\tau)-1)\right) \\
&= -\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \sin(\tau) + \sin(\theta)\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \\
&= -2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\tau}{2}\right)\cos\left(\frac{\tau}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\tau}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)\right) \\
&= 2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\tau}{2}\right)\sin\left(\frac{\tau-\theta}{2}\right).
\end{aligned}$$

En posant $x = \frac{\theta}{2}$ et $y = \frac{\tau}{2}$ il s'agit donc de maximiser $f(x, y) = 2\sin(x)\sin(y)\sin(y-x)$ sur le domaine $D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y \leq \pi\}$. Ce domaine étant fermé borné donc compact et f étant continue elle admet bien un maximum. Puisqu'elle est nulle sur les bords du domaine le maximum est atteint à l'intérieur de celui-ci. Il est alors atteint en un point critique de f donc en un point $(x, y) \in \mathring{D} = \{(x, y) \mid 0 < x < y < \pi\}$ vérifiant

$$\begin{cases} 2\cos(x)\sin(y)\sin(y-x) - 2\sin(x)\sin(y)\cos(y-x) &= 0 \\ -2\cos(y)\sin(x)\sin(x-y) + 2\sin(y)\sin(x)\cos(x-y) &= 0 \end{cases}$$

En sommant les deux, par imparité du sinus, on a $(\cos(x)\sin(y) + \sin(x)\cos(y))\sin(y-x) = \sin(x+y)\sin(y-x) = 0$. Ceci impose $x + y = 0 \mod \pi$ ou $x - y = 0 \mod \pi$. La seconde condition ne se réalise pas sur le domaine qui nous intéresse puisque cela impliquerait que x et y soient à distance au moins π l'un de l'autre. Donc on a $y + x = \pi$. On a alors, en remplaçant $y = \pi - x$ dans la première équation que

$$\cos(x)\sin(x)\sin(2x) + \sin(x)\sin(x)\cos(2x) = \sin(x)(\cos(x)\sin(2x) + \sin(x)\cos(2x)) = \sin(x)\sin(3x) = 0.$$

Donc $x = \frac{\pi}{3}$ et $y = \frac{2\pi}{3}$ sont les seules solutions qui conviennent. Cela correspond à $\theta = \frac{2\pi}{3}$ et $\tau = \frac{4\pi}{3}$ donc à un triangle équilatéral. Son aire est alors $2 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$. Ainsi, l'aire maximale d'un triangle inscrit dans l'ellipse $\mathcal{E}$ est d'aire

$$\frac{3ab\sqrt{3}}{4}.$$

Exercice 246 (correction)

1. Si notre forcenée se déplace en ligne droite elle parcourra $2\sqrt{2}$ de terre à vitesse v et $4\sqrt{2}$ à vitesse $\frac{v}{2}$ soit un temps total de $T_P = \frac{2}{v}\sqrt{2} + \frac{2}{v}4\sqrt{2} = \frac{10\sqrt{2}}{v}$ pour arriver à la porte de sortie. Le drone quant à lui, pas dérangé par les milieux terrestres ou aquatiques parcourra $6\sqrt{2}$ à 62% de v donc un temps total de $T_D = \frac{6\sqrt{2}}{0.62v} = \frac{6}{6.2}\frac{10\sqrt{2}}{v} < T_P$. Donc la prisonnière arrivera après le drone se déplace le long de la diagonale.
2. On a :
   - La distance de $(0,0)$ à $(x,1)$ est $\sqrt{x^2+1}$ à vitesse v
   - La distance de $(x,1)$ à $(y,5)$ est $\sqrt{(y-x)^2+16}$ à vitesse $\frac{v}{2}$.
   - La distance de $(y,5)$ à $(6,6)$ est $\sqrt{(6-y)^2+1}$ à vitesse v.

   Donc le temps du parcours est

   $$f(x,y) = \frac{1}{v}\left(\sqrt{x^2+1} + 2\sqrt{(y-x)^2+16} + \sqrt{(6-y)^2+1}\right).$$
3. On commence par remarque que f étant continue et définie sur $[0,6] \times [0,6]$ qui est compact elle admet un maximum et un minimum. Si la trajectoire idéale est atteinte lorsque (x,y) vérifient $0 < x < 6$ et $0 < y < 6$ alors il s'agit d'un point critique de f. On commence donc par calculer les points d'annulation des dérivées partielles de f ce qui donne le système

   $$\left\{\begin{array}{rl} \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & = \frac{2(y-x)}{\sqrt{(y-x)^2+16}} \\ \frac{6-y}{\sqrt{(6-y)^2+1}} & = \frac{2(y-x)}{\sqrt{(y-x)^2+16}} \end{array}\right.$$

   On remarque que pour qu'un tel système ait une solution il faut que le terme de droite soit positif dans la première ligne, donc $y \geq x$ ce qui est assez logique ; si notre prisonnière rebrousse chemin dans la rivière elle va perdre du temps.
   On a alors $\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{6-y}{\sqrt{(6-y)^2+1}}$ ce qui donne, en passant au carré et en multipliant par les dénominateurs,

   $$x^2\left((6-y)^2+1\right) = (x^2+1)(6-y)^2 \text{ i.e. } x^2 - (6-y)^2 = 0, \text{ i.e. } (x-6+y)(x+6-y) = 0.$$

   On en déduit que $y = 6-x$ ou $y = x+6$ ce qui est exclu car $y \leq 6$. Donc $y = 6-x$ ce qui est une condition assez logique quand on y pense : le point de sortie de l'eau doit être symétrique au point d'entrée par rapport à la droite $x = 3$. En en déduit aussi que $6-x \geq x$ donc $x \leq 3$. En remplaçant y par $6-x$ dans la première équation on obtient

   $$\frac{x}{\sqrt{1+x^2}} = \frac{2(6-2x)}{\sqrt{(6-2x)^2+16}}$$

encore en passant au carré et en multipliant par les dénominateurs on obtient

$$\begin{aligned}
x^2((6-2x)^2+16)-4(6-2x)^2(1+x^2)&=0\\
\Leftrightarrow x^2((3-x)^2+4)-4(3-x)^2(x^2+1)&=0.\\
&\vdots\\
\Leftrightarrow x^4-6x^3+9x^2-8x+12&=0.
\end{aligned}$$

Or $x=2$ est une racine évidente qui permet de factoriser notre polynôme en $(x-2)(x^3-4x^2+x-6)=0$. Or pour $0\leq x\leq 3$ on a $x^3-4x^2+x-6=x\underbrace{((x-2)^2-3)}_{\leq 1}-6\leq -3$. Donc $x=2$ est l'unique solution. On a donc un unique point critique : $(2,4)$.

Cela correspond à un temps de trajet $f(2,4)=\dfrac{6\sqrt{5}}{v}$. On veut le comparer au temps de trajet du drone, i.e. on veut déterminer la valeur de vérité du booléen

$$\frac{6\sqrt{5}}{v}\leq\frac{6\sqrt{2}}{0.62v}\Leftrightarrow 5\leq\frac{20000}{62^2}=\frac{5000}{31^2}=\frac{5000}{961}$$

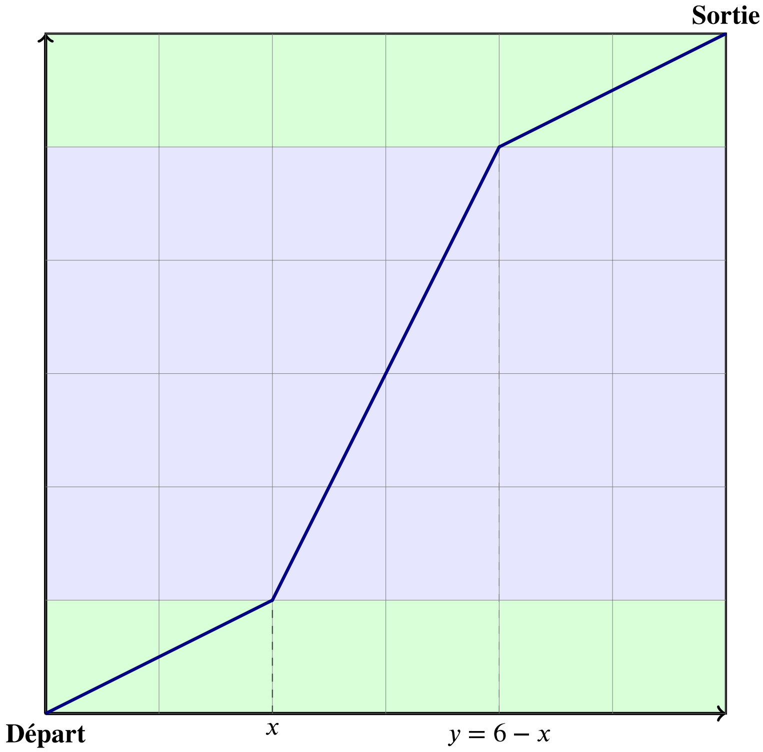
c'est donc correct ; notre prisonnière peut s'échapper. Il reste à déterminer s'il s'agit du trajet optimal. On a seulement prouvé que c'est le trajet optimal à l'intérieur de la cour. Il faut vérifier avec les conditions aux bords $x=0, x=6, y=0$ et $y=6$. Les cas en x et y sont symétrique on va donc seulement justifier pour $y=0$ et $y=6$. Si $y=0$ on pose $h(x)=vf(x,0)=\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{x^2+16}+\sqrt{37}\geq 1+8+6=15\geq 6\sqrt{5}$ car $225\geq 180$. Le cas $y=6$ est beaucoup plus difficile à traiter. On pose $g(x)=vf(x,6)=\sqrt{x^2+1}+2\sqrt{(6-x)^2+16}+1$. Déterminer explicitement le minimum de f semble assez compliqué alors il faut filouter. On peut profiter de la convexité de g qui est une somme de deux fonctions convexes. Elle est donc au dessus de sa tangente en $x=4$. On a $g'(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}-\dfrac{2(6-x)}{\sqrt{(6-x)^2+16}}$ donc $g'(4)=\dfrac{4}{\sqrt{17}}-\dfrac{4}{\sqrt{20}}=\dfrac{4}{17}\sqrt{17}-\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$. La tangente à g en $x=4$ est donc donnée par

$$y=\left(\frac{4}{17}\sqrt{17}-\frac{2}{5}\right)(x-4)+g(2)=\left(\frac{4}{17}\sqrt{17}-\frac{2}{5}\right)(x-4)+\sqrt{17}+4\sqrt{5}+1.$$

Puisque le coefficient dominant est positif la tangente est croissante donc supérieure sur $[0,6]$ à sa valeur en 0 donc on a par convexité

$$\forall x\in[0,6], g(x)\geq y(0)=\frac{1}{17}\sqrt{17}+\frac{28}{5}\sqrt{5}+1>6\sqrt{5}.$$

Bien entendu, ces discussions assez fines sur le bords de notre compact n'étaient pas exigées lors du passage en colle du candidat. Le chemin optimal est alors donné par la figure ci-dessous.



Exercice 247 (correction)

1. Il s'agit du théorème de Cauchy linéaire.
2. (a) Il faut vérifier que A est bien définie. Soit y une solution et $\widetilde{y}$ définie par $\widetilde{y}(x) = y(x+\pi)$. On a alors

$$\widetilde{y}''(x) + q(x)\widetilde{y}(x) = y''(x+\pi) + q(x+\pi)y(x+\pi) = 0.$$

Donc $\widetilde{y}$ est aussi une solution. De plus A est évidemment linéaire.

(b) On pose $\widetilde{y_1}(x) = y_1(-x)$ (resp. $\widetilde{y_2}(x) = -y_2(-x)$). On a

$$\widetilde{y_1}''(x) + q(x)\widetilde{y_1}(x) = y_1''(-x) + q(-x)y_1(-x) = 0$$

donc $\widetilde{y_1}$ est aussi solution de E. Par ailleurs $\widetilde{y_1}(0) = y_1(0) = 1$ et $\widetilde{y_1}'(0) = -y_1(0) = 0$ mais y_1 est l'unique solution vérifiant ce problème de Cauchy donc $\widetilde{y_1} = y_1$, i.e. y_1 est paire. De la même façon $\widetilde{y_2}$ est aussi une solution vérifiant le même problème de Cauchy que y_2 donc y_2 est impaire.

Le wronskien de E associé à n'importe quel couple de solution est constant car $W'(x) = 0$. Donc $y_1y_2' - y_2y_1'$ est constant donc

$$\det(A) = y_1(\pi)y_2'(\pi) - y_2(\pi)y_1'(\pi) = y_1(0)y_2'(0) - y_2(0)y_1'(0) = 1.$$

(c) L'endomorphisme A possède pour inverse $y \mapsto (x \mapsto y(x-\pi))$. La matrice de A^{-1} dans la base canonique est donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} y_1(-\pi) & y_2(-\pi) \\ y_1'(-\pi) & y_2'(-\pi) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ -c & d \end{pmatrix}$. D'autre part A^{-1} est la transposée de la comatrice de A donc $A^{-1} = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$ donc $a = d$ ou alors d'après le théorème de Cayley-Hamilton $A^2 - (a+d)A + I_2 = 0$ donc en multipliant par A^{-1} et en considérant le premier coefficient on a $-d + a = 0$.

3. On remarque que le polynôme caractéristique de A a pour discriminant $\Delta = T^2 - 4$.

- Supposons $|T| < 2$ alors A a deux valeurs propres complexes distinctes $z, \overline{z}$ telles que $z\overline{z} = 1$. On considère y un vecteur propre associé à z (y à valeurs complexes). On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$, $y(x+\pi) = zy(x)$ donc $|y|$ est π-périodique donc bornée. De même en considérant un vecteur propre associé à $\overline{z}$. Puisque les vecteurs propres forment une base de l'espace des solutions toutes les solutions sont bornées.
- Si $|T| = 2$ alors ± 1 est l'unique valeur propre et en considérant y vecteur propre alors $\pm y$ est π-périodique donc bornée.
- Sinon on a $\lambda, \mu \notin \{-1, 1\}$ deux valeurs propres réelles telles que $\lambda\mu = 1$. Quitte changer leur nom on note λ celle qui vérifie $\lambda > 1$ et $\mu = \frac{1}{\lambda} < 1$. On note y un vecteur propre associé à λ et z associé à μ. Une solution quelconque f s'écrit $f = \alpha y + \beta z$. Par ailleurs, $y(x+\pi) = \lambda y(x)$ et, par récurrence, $\forall n \in \mathbb{Z}$, $y(x+n\pi) = \lambda^n y(x)$. De même $z(x+n\pi) = \mu^{-n} z(x)$ donc

  $$f(x+n\pi) = \alpha\lambda^n y(x) + \beta\mu^{-n} z(x).$$

  Si f non nulle alors α ou β est non nul. Disons $\alpha \neq 0$. Puisque y est non nulle, il existe $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $y(x_0) \neq 0$ donc $\lim |f(x+n\pi)| = +\infty$. Même chose si $\beta \neq 0$ en faisant tendre n vers $-\infty$.

Exercice 248 (correction)

On pose $g = f + f''$ qui est, par définition une fonction positive. On veut exprimer f en fonction de g donc on va résoudre l'équation différentielle d'ordre 2. Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $\lambda\cos(x) + \mu\sin(x)$. pour déterminer une solution particulière de l'équation on fait une variation de la constante en cherchant une solution de la forme $f(x) = \lambda(x)\cos(x) + \mu(x)\sin(x)$ sous la contrainte $\lambda'(x)\cos(x) + \mu'(x)\sin(x) = 0$. On a alors $f''(x) = -\lambda'(x)\sin(x) + \mu'(x)\cos(x) - f(x)$ donc $f''(x) + f(x) = -\lambda'(x)\sin(x) + \mu'(x)\cos(x) = g(x)$. On a donc le système

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{rl} \lambda'(x)\cos(x) + \mu'(x)\sin(x) &= 0 \\ -\lambda'(x)\sin(x) + \mu'(x)\cos(x) &= g(x) \end{array} \right.$$

On le résout en faisant $\cos(x)L_2 + \sin(x)L_1$ qui donne $\mu'(x) = g(x)\cos(x)$. De même $\lambda'(x) = -g'(x)\sin(x)$. On pose alors comme solution particulière

$$f_0(x) = -\int_0^x g(t)\sin(t)dt\cos(x) + \int_0^x g(t)\cos(t)dt\sin(x) = -\omega(x)\cos(x) + \theta(x)\sin(x)$$

avec $\omega(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\sin(t)dt$ et $\theta(x) = \displaystyle\int_0^x g(t)\cos(t)dt$. L'ensemble des solutions de l'équation $f'' + f = g$ est alors donné par

$$S = \left\{ \lambda\cos(x) + \mu\sin(x) + f_0(x) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

On remarque que $\displaystyle\int_0^{2\pi} \cos(x)dx = \int_0^{2\pi} \sin(x)dx = 0$ donc le signe de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$ pour $f \in S$ est le même que celui de $\displaystyle\int_0^{2\pi} f_0(x)dx$. On se restreint alors, sans perte de généralité, au cas où $f = f_0$, la solution particulière.

Pour calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)dx$ on sépare l'intégrale en 2 par linéarité puis fait deux intégrations par parties en dérivant respectivement ω et θ et en primitivant respectivement cos et sin. On a alors

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} f(x)dx &= -[\omega(x)\sin(x)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} g(x)\sin^2(x)dx + [-\theta(x)\cos(x)]_0^{2\pi} + \int_0^{2\pi} g(x)\cos^2(x)dx \\ &= 0 - 0 + \int_0^{2\pi} g(x)\left(\cos^2(x) + \sin^2(x)\right)dx - \theta(2\pi)\cos(2\pi) + 0 = \int_0^{2\pi} g(x)dx - \int_0^{2\pi} g(t)\cos(t)dt \\ &= \int_0^{2\pi} g(x)\left(1 - \cos(x)\right)dx \end{aligned}$$

L'intégrale est donc positive comme intégrale d'une fonction positive.

Exercice 249 (correction)

On pose $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) + f'(x)$ qui satisfait $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$ par hypothèse. La fonction f est alors solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y' + y = g.$$

Les solutions de l'équation homogène sont de la forme $f_h(x) = \lambda e^{-x}$ avec λ parcourant $\mathbb{R}$. En appliquant la méthode de variation de la constante, i.e. en cherchant les solutions sous la forme $f_0(x) = \lambda(x)e^{-x}$ on trouve $\lambda'(x) = g(x)e^x$. On peut alors déduire que les solutions de l'équation différentielle sont

$$f(x) = \lambda e^{-x} + \int_0^x g(t)e^t dt e^{-x} = \left(\lambda + \int_0^x g(t)e^t dt\right) e^{-x}.$$

On écrit alors $g(t) = \ell + o(1)$ donc $g(t)e^t = \ell e^t + o\left(e^t\right)$. La fonction $t \mapsto e^t$ n'est pas intégrable donc

$$f(x) = \left(\lambda + \int_0^x g(t)e^t dt = \ell\left(e^x - 1\right) + o\left(\int_0^x e^t dt\right)\right) e^{-x} = \left(\lambda + \int_0^x g(t)e^t dt = \ell\left(e^x - 1\right) + o\left(e^x\right)\right) e^{-x} = (\lambda - \ell)e^{-x} + \ell + o(1) = \ell + o(1)$$

C'est ce qu'on voulait démontrer.

Exercice 250 (correction)

On pose $\forall x \in \mathbb{R}, g(x) = f(x) + f'(x) + \cdots + f^{(k)}(x)$ qui satisfait $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = \ell$ par hypothèse. La fonction f est alors solution de l'équation différentielle linéaire d'ordre 1

$$y^{(k)} + \cdots + y' + y = g.$$

Les solutions à valeurs complexes de l'équation homogène sont de la forme $f_h(x) = \sum\limits_{j=0}^{k} \lambda_j e^{\omega_j x}$ où ω_j est racine du polynôme $P = X^k + \cdots + X + 1$ et les λ_j parcourant $\mathbb{C}$.

On remarque que $(X-1)P = X^{k+1} - 1$ donc les racines de P sont les racines $k+1$-èmes de l'unité auxquelles on a retiré 1. Autrement dit, on peut écrire $\omega_j = \exp\left(i\dfrac{2j\pi}{k+1}\right), j \in \{1, \dots, k\}$. On remarque alors que si $k \geq 3$ alors $\omega_1 = \exp\left(i\dfrac{2\pi}{k+1}\right) = \cos\left(\dfrac{2\pi}{k+1}\right) + i\sin\left(\dfrac{2\pi}{k+1}\right)$. Puisque $0 \leq \dfrac{2\pi}{k+1} \leq \dfrac{\pi}{2}$, $\cos\left(\frac{2\pi}{k+1}\right) \geq 0$ et donc $f_0(x) = Re\left(e^{\omega_1 x}\right) = \cos\left(\sin\left(\dfrac{2\pi}{k+1}\right)x\right)\exp\left(\cos\left(\frac{2\pi}{k+1}\right)x\right)$ n'a pas de limite lorsque $x \to +\infty$ pourtant f_0 satisfait $f_0(x) + \cdots + f_0^{(k)}(x) = 0 \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Si on veut avoir une chance de répondre positivement à la question posée il faut alors étudier en détails les cas $k = 1$ et $k = 2$.

Cas $k = 1$: En appliquant la méthode de variation de la constante, i.e. en cherchant les solutions sous la forme $f_0(x) = \lambda(x)e^{-x}$ on trouve $\lambda'(x) = g(x)e^x$. On peut alors déduire que les solutions de l'équation différentielle sont

$$f(x) = \lambda e^{-x} + \int_0^x g(t)e^t dt e^{-x} = \left(\lambda + \int_0^x g(t)e^t dt\right) e^{-x}.$$

On écrit alors $g(t) = \ell + o(1)$ donc $g(t)e^t = \ell e^t + o\left(e^t\right)$. La fonction $t \mapsto e^t$ n'est pas intégrable donc, par comparaison,

$$f(x) = \left(\lambda + \int_0^x g(t)e^t dt\right) e^{-x} = \left(\ell\left(e^x - 1\right) + o\left(\int_0^x e^t dt\right)\right) e^{-x} = \left(\ell\left(e^x - 1\right) + o\left(e^x\right)\right) e^{-x} = (\lambda - \ell)e^{-x} + \ell + o(1) = \ell + o(1).$$

C'est ce qu'on voulait démontrer.

Cas $k=2$ **:** Les solutions de l'équation homogène donnent $f_h(x)=\lambda e^{jx}+\mu e^{j^2x}$ avec $j=\exp\left(i\frac{2\pi}{3}\right)$. On fait une variation de la constante en cherchant une solution particulière $f_0(x)=\lambda(x)e^{jx}+\mu(x)e^{j^2x}$ imposant la contrainte $\lambda'(x)e^{jx}+\mu'(x)e^{j^2x}=0$. On arrive alors, après simplifications, au système suivant

$$\begin{cases} j\lambda'(x)e^{jx}+j^2\mu'(x)e^{j^2x} & =g(x) \\ \lambda'(x)e^{jx}+\mu'(x)e^{j^2x} & =0. \end{cases}$$

On peut alors choisir

$$f_0(x)=\frac{1}{i\sqrt{3}}\int_0^x g(t)e^{-jt}dte^{jx}-\frac{1}{i\sqrt{3}}\int_0^x g(t)e^{-j^2t}dte^{j^2x}.$$

Puisque $Re(j)=Re(j^2)<0$ les solutions homogènes tendent toutes vers 0 lorsque $x\to+\infty$. Nous allons alors seulement étudier la convergence de f_0. Pour les mêmes raisons que dans le cas $k=1$, en écrivant $g(t)=\ell+o(1)$ et par divergence des intégrales de $t\mapsto e^{-it}$ et de $t\mapsto e^{-j^2t}$ on a

$$f_0(t)=\frac{1}{i\sqrt{3}}\left[\frac{\ell}{-j}e^{-jt}\right]_0^x e^{jx}-\frac{1}{i\sqrt{3}}\left[\frac{\ell}{-j^2}e^{-j^2t}\right]_0^x e^{j^2x}+o(1)=\frac{i\ell}{\sqrt{3}}\left(j^2-j\right)+o(1)=\frac{i\ell}{\sqrt{3}}\times(-i\sqrt{3})+o(1)=\ell+o(1).$$

On en déduit que f possède une limite si et seulement si $k\in\{1,2\}$ et, dans ce cas cette limite est ℓ.

Si vous trouvez des erreurs, des simplifications ou que vous avez des questions sur cette colle merci de m'envoyer un mail à l'adresse ci-dessous

Contact colleur

Mail : `fabien.narbonne@posteo.net` **Site internet :** `https://fabiennarbonne.fr`