Dés pipés

Fabien NARBONNE

Janvier 2024

Introduction

É Dans ce document on veut explorer les différentes façons ou impossibilité de piper deux dés X et Y et/ou changer les valeurs sur les faces pour que $X+Y$, la somme des résultats des deux lancers, donne :

1. Une loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$.
2. Ou se comporte comme le lancer de deux dés non pipés.

On rappelle qu'étant donnée une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ on peut définir

$$G_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mathbb{P}(X=n)t^n$$

qui caractérise la loi de X par unicité des coefficients d'une série entière qui a un rayon de convergence non nul[1]. D'autre part, pour X et Y variables aléatoires indépendantes à valeurs dans $\mathbb{N}$ on a toujours

$$G_{X+Y}(t) = G_X(t)G_Y(t).$$

1 Somme de deux dés pipés sans changement des numéros

On considère deux dés X et Y numérotés de 1 à 6 que l'on peut piper comme on veut, i.e. on peut choisir leur loi. On voudrait répondre aux deux questions posées dans l'introduction.

Proposition 1. *Il n'existe pas de manière de piper deux dés X et Y numérotés de 1 à 6 de telle sorte que la somme suive une loi uniforme.*

Preuve. Je propose deux preuves de ce résultat. La seconde, plus rapide mais moins facilement généralisable, a été trouvée sur un forum.

Méthode 1 : Les fonctions génératrices de X et de Y s'écrivent respectivement $G_X(t) = tP_X(t)$ et $G_Y(t) = tP_Y(t)$ avec $P_X, P_Y \in \mathbb{R}_5[t]$. Une variable U de loi uniforme sur $\{2, \ldots, 12\}$ doit avoir pour fonction génératrice

$$G_U(t) = \frac{1}{11}\left(t^2 + \cdots + t^{12}\right) = \frac{t^2}{12}\left(1 + \cdots + t^{10}\right) = \frac{t^2}{12} \cdot \frac{t^{11}-1}{t-1}.$$

[1] Les fonctions génératrices de variables aléatoires ont toujours un rayon de convergence $R \geq 1$

Donc $X+Y$ suit une loi uniforme si, et seulement si, $G_{X+Y}(t)=G_U(t)$, i.e. $P_X(t)P_Y(t)=\frac{t^{11}-1}{11(t-1)}$. Ce dernier polynôme est de degré 10 donc P_X et P_Y doivent être de degré exactement 5. Par ailleurs, les racines de $\frac{t^{11}-1}{t-1}$ sont toutes les racines 11-ème de l'unité à part 1 et, 11 étant impair, elles sont toutes complexes strictement. On en déduit que $\frac{t^{11}-1}{t-1}=1+t+\cdots+t^{10}$ est toujours du signe de son évaluation en 1 donc strictement positif. Enfin, tout polynôme de degré impair a toujours une racine réelle car ses limites en $-\infty$ et $+\infty$ sont $\pm\infty$ et $\mp\infty$ donc, étant continus, par le théorème des valeurs intermédiaires ils admettent bien une racine. Donc on n'a jamais l'égalité $P_X(t)P_Y(t)=\frac{t^{11}-1}{11(t-1)}$.

Méthode 2 : On note $p_k=\mathbb{P}(X=k)$ et $q_k=\mathbb{P}(Y=k)$ (il s'agit des coefficients de P_X et P_Y avec les notations ci-dessus). On doit avoir $\mathbb{P}(X+Y=2)=\mathbb{P}(X=1)\mathbb{P}(Y=1)=p_1q_1=\frac{1}{11}$ et $\mathbb{P}(X+Y=12)=\mathbb{P}(X=6)\mathbb{P}(Y=6)=p_6q_6=\frac{1}{11}$. On en déduit, grâce à l'inégalité $x+\frac{1}{x}\geq 2$ sur $\mathbb{R}^{+*}$, que

$$\mathbb{P}(X+Y=7)\geq p_1q_6+p_6q_1=\frac{1}{11}\left(\frac{p_1}{p_6}+\frac{p_6}{p_1}\right)\geq\frac{2}{11}>\frac{1}{11}.$$

□

Proposition 2. *Il n'existe pas de manière de piper strictement deux dés X et Y numérotés de 1 à 6 de telle sorte que la somme suive la même loi que la somme de deux dés équilibrés.*

Preuve. On reprend le même raisonnement et les mêmes notations que la première méthode de la preuve précédente. Si D est un dé équilibré alors sa fonction génératrice est $G_D(t)=\frac{t}{6}(1+t+\cdots+t^5)=\frac{t}{6}\cdot\frac{t^6-1}{t-1}$. Si la somme de $X+Y$ suit la même loi que la somme de deux dés équilibrés alors on doit avoir

$$G_X(t)G_Y(t)=t^2P_X(t)P_Y(t)=\left(\frac{t}{6}\cdot\frac{t^6-1}{t-1}\right)^2.$$

La factorisation en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[t]$ de $\frac{t^6-1}{t-1}$ est

$$1+\cdots+t^5=(1+t)(1+t+t^2)(1-t+t^2).$$

Il s'agit donc de factoriser $(1+t)^2(1+t+t^2)^2(1-t+t^2)^2$ en deux facteurs de degré 5. Les seules possibilités sont $P_X(t)=P_Y(t)=(1+t)(1+t+t^2)(1-t+t^2)$ qui correspondent à des dés équilibrés et $P_X(t)=(1+t)(1+t+t^2)^2$ et $P_Y(t)=(1+t)(1-t+t^2)^2$ mais ce dernier a des coefficients strictement négatifs donc il ne s'agit pas de la fonction génératrice d'une variable aléatoire. □

2 Somme de deux dés pipés avec changement des numéros

On considère deux dés X et Y à 6 faces numérotés respectivement $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}\subseteq\mathbb{R}$ et $\{\beta_1,\ldots,\beta_s\}\subseteq\mathbb{R}$ avec $r,s\leq 6$ (on peut avoir plusieurs faces avec un même α_i ou un même β_j). On suppose que les α_i et les β_j sont rangés dans l'ordre strictement croissant et que $X+Y$ est à valeurs dans $\{2,\ldots,12\}$ et que toutes les valeurs sont atteintes avec probabilité non nulle.

On montre un lemme qui permet de se ramener au cas où les α_i,β_j sont des entiers.

Lemme 1. *Soit X et Y deux variables aléatoires prenant pour valeurs respectives $\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}$ et $\{\beta_1,\ldots,\beta_s\}$ telles que $\{\alpha_i+\beta_j/1\leq i\leq r,1\leq j\leq s\}=\{2,\ldots,12\}$. Alors il existe $\gamma\in\mathbb{R},n_1=1<n_2<\cdots<n_r\in\mathbb{N},m_1=1<m_2<\cdots<m_s\in\mathbb{N}^*$ tels que*

$$\{\alpha_1,\ldots,\alpha_r\}=\{n_1,\ldots,n_r\}+\gamma \text{ et } \{\beta_1,\ldots,\beta_s\}=\{m_1,\ldots,m_s\}-\gamma.$$

Preuve. On pose $\alpha_1 - 1 = \gamma$. Puisque $\alpha_1 < \alpha_j$ et $\beta_1 < \beta_j$ pour $1 < j$ on doit avoir $\alpha_1 + \beta_1 = 2$ donc $\beta_1 = 1 - \gamma$. Puisque $\alpha_2 + \beta_1$ entier il existe $n_2 \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha_2 = n_2 + \gamma$ de même jusqu'à $\alpha_r = n_r + \gamma$. On fait subir le même traitement aux $\beta_j + \alpha_1 \in \mathbb{N}$ ce qui donne $\beta_j = m_j - \gamma$. □

On obtient donc que pour des dés X, Y numérotés respectivement $\{\alpha_1, \dots, \alpha_r\}$ et $\{\beta_1, \dots, \beta_s\}$ la somme $X + Y$ suit la même loi que s'ils étaient numérotés $\{n_1, \dots, n_r\}$ et $\{m_1, \dots, m_s\}$. On suppose donc dans la suite que c'est le cas ; que les dés qu'on manipule sont numérotés par des entiers ≥ 1.

Proposition 3. *Soient X, Y deux dés à 6 faces numérotés respectivement $\{n_1, \dots, n_r\} \subseteq \mathbb{N}^*$ et $\{m_1, \dots, m_s\} \subseteq \mathbb{N}^*$ tels que $\{n_i + m_j / 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\} = \{2, \dots, 12\}$. Alors, pour que $X + Y$ suive la même loi que la somme de deux dés standards :*

- *Il existe deux façons sans piper les dés X et Y qui sont*
  - $\{n_1, \dots, n_r\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
  - $\{m_1, \dots, m_r\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

  (qui correspond à deux dés standards) et
  - $\{n_1, \dots, n_r\} = \{1, 2, 2, 3, 3, 4\}$
  - $\{m_1, \dots, m_r\} = \{1, 3, 4, 5, 6, 8\}$
- *Il existe deux façons de piper les dés X et Y qui sont*
  - $\{n_1, \dots, n_r\} = \{1, 2, 3\}$ *avec probabilités* $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{4}$ *respectivement.*
  - $\{m_1, \dots, m_s\} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$ *avec probabilités* $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}$ *respectivement.*

  et
  - $\{n_1, \dots, n_r\} = \{1, 4, 7\}$ *avec probabilités* $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{4}$ *respectivement.*
  - $\{m_1, \dots, m_s\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ *avec probabilités* $\frac{1}{9}, \frac{2}{9}, \frac{3}{9}, \frac{2}{9}, \frac{1}{9}$ *respectivement.*

Preuve. Puisque X et Y sont à valeurs entières on peut encore utiliser les fonctions génératrices. Comme dans la preuve de la Proposition 2 il s'agit donc de factoriser $(1 + t)^2(1 + t + t^2)^2(1 - t + t^2)^2$ en deux polynômes. Cependant les contraintes sont un peu différentes puisqu'on a plus de contrainte sur les degrés des polynômes. Les contraintes qui persistent sur les deux facteurs sont

1. Le fait que les polynômes doivent être à coefficients positifs.
2. Ils doivent avoir moins de 6 coefficients non nuls (car les dés ont 6 faces).

On peut alors tester toutes les possibilités avec ses contraintes et on trouve

- $P_X(t) = \frac{1}{6}(t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)$ et $P_Y(t) = \frac{1}{6}(t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + t + 1)$ (dés standards).
- $P_X(t) = \frac{1}{6}(t^3 + 2t^2 + 2t + 1)$ et $P_Y(t) = \frac{1}{6}(t^7 + t^5 + t^4 + t^3 + t^2 + 1)$ (seconde solution avec des dés équilibrés).
- $P_X(t) = \frac{1}{4}(t^2 + 2t + 1)$ et $P_Y(t) = \frac{1}{9}(t^8 + 2t^6 + 3t^4 + 2t^2 + 1)$ (première solution non équilibrée).
- $P_X(t) = \frac{1}{9}(t^4 + 2t^3 + 3t^2 + 2t + 1)$ et $P_Y(t) = \frac{1}{4}(t^6 + 2t^3 + 1)$ (seconde solution non équilibrée).

$\square$

Proposition 4. *Soient X et Y deux dés à 6 faces numérotés respectivement $\{n_1, \dots, n_r\} \subseteq \mathbb{N}^*$ et $\{m_1, \dots, m_s\} \subseteq \mathbb{N}^*$ tels que $\{n_i + m_j / 1 \leq i \leq r, 1 \leq j \leq s\} = \{2, \dots, 12\}$. Alors il n'existe aucune façon de choisir les n_i, m_j et de piper X et Y pour que $X+Y$ suive une loi uniforme sur $\{2, \dots, 12\}$.*

Preuve. Il s'agit de la même preuve qu'au dessus à part qu'on veut factoriser $1+t+\cdots+t^{10}$. Puisque ses racines sont les racines primitives 11-ème de l'unité, ses facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[t]$ sont les

$$Q_k(t) = t^2 - 2\cos\left(\frac{2k\pi}{11}\right) t + 1 \text{ pour } 1 \leq k \leq 5.$$

Or tous les produits de 3 polynômes Q_k distincts ont exactement 7 coefficients non-nuls et tous les produits de 4 polynômes Q_k distincts ont exactement 9 coefficients non-nuls. Donc on n'a jamais moins de 6 coefficients comme on le voudrait. $\square$